SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

材料力学

（第四版）

〔美〕W. A. 纳什 著

赵志岗 译

- 包括各种难度的题
- 完全解答了618题
- 更适合于工程师和自学者

科学出版社



麦格劳-希尔教育出版集团

(O-1508.0101)
责任编辑：张邦固

SCHAUM'S ouTlines

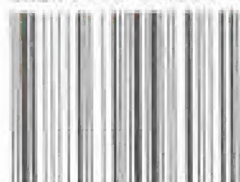
全球销量
超越3000万的
"全美经典学习指导系列"
是您的最佳
学习伴侣！



40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典 学习指导系列

概率和统计	2000工程力学习题精解	电气工程基础
统计学	工程力学	工程电磁场基础
离散数学	3000物理习题精解	数字信号处理
Mathematica使用指南	流体动力学	数字系统导论
数理金融引论	物理学基础	数字原理
机械振动	材料力学	电机与机电学
微分方程	2000离散数学习题精解	基本电路分析
统计学原理（上）	工程热力学	信号与系统
统计学原理（下）	数值分析	遗传学
微积分	量子力学	生物化学
静力学与材料力学	有机化学习题精解	生物学
有限元分析	3000化学习题精解	分子和细胞生物学
传热学	大学化学习题精解	人体解剖与生理学
近代物理学	电路	



ISBN 7-03-009608-8/O·1508
定价：38.00元

全美经典学习指导系列

材料力学

(第四版)

〔美〕W. A. 纳什 著

赵志岗 译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书是一本材料力学的学习指导书。本书内容丰富、深入浅出、对材料力学的知识要点作了系统、全面的总结，并附有大量的例题与习题。

本书的内容有：轴向拉伸与压缩、薄壁压力容器、圆轴的扭转、梁的弯曲及特殊问题、截面的几何性质、超静定杆系及超静定梁、柱的稳定问题、应力状态及失效理论、组合应力、能量方法等，本书还用较多的篇幅讲解了奇异函数及其在求解梁（含超静定梁）弯曲问题中的应用。

此外对含冗长、繁琐计算的典型问题给出了14个计算机程序及相应的例题与习题。本书例题涉及广泛的工程背景，对提高学习者的素质、创新能力、扩大学习者的知识面大有裨益。

本书可供高等院校师生及工程技术人员学习与参考。

William Nash: Schaum's Outlines of Theory and Problems of Strength of Materials, Fourth Edition

ISBN: 0-07-046617-3

图字：01-2001-1508 字

图书在版编目（CIP）数据

材料力学/〔美〕W. A. 纳什（Nash）编著；赵志岗译．－北京：科学出版社，2002.

（全美经典学习指导系列）

ISBN 7-03-009608-8

Ⅰ. 材…　Ⅱ. ①纳…　②赵…　Ⅲ. 材料力学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 045754 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版　开本：A4（890×1240）

2002年1月第一次印刷　印张：22 3/4

印数：1—4 000　字数：648 000

定价：38.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

序

《材料力学》第四版延续该书第三版的基本计划，与之相比第四版有以下特色：

1. 习题的解答用了两种单位制，即 SI(国际)单位制和 USCS(美国)单位制。

2. 对于那些含冗长、繁琐计算的典型问题，用 FORTRAN 语言或 BASIC 语言编写了 14 个计算机程序，例如对梁的应力和挠度，用上述程序很快就会给出解答。所有这些程序只需对输入格式作某些适当的修改，即可适用于大多数 PC 系统。

3. 本书的内容深入浅出，由简单到复杂，涉及承受多种载荷与支承实际条件的结构元素。对具有更普遍意义的方法，如弹性能法和塑性分析与设计，也都作了广泛而详细地讲述。

作者衷心感谢 K. 戴尔文对本书的贡献，他为本书编写了大多数计算机程序，并仔细地校验了一些新的习题。

W. A. 纳什

目　录

第 1 章　拉伸与压缩

1.1　力的内部效应

在本书中，我们将介绍作用在物体上的力的内部效应。为此，物体不再是完全刚性的(如同静力学中假设的)，受力物体的形变计算将是材料力学的基本研究课题之一。

1.1.1　轴向受载杆件

首先，我们研究最简单情况：一等截面金属直杆在其两端承受一对共线、反向力的作用。这两个力的作用线与各截面形心组成的纵向轴线重合，为了满足静力学平衡条件，这两个力的数值必须相等。如果这两个力的方向是离开此杆的，杆将承受拉伸；如果这两个力是指向此杆的，杆将承受压缩，如图 1-1 所示。

在这样两个力的作用之下，杆的内部将产生抗力。我们可以用位于杆轴某处、且与杆轴垂直的假想截面来研究杆的内部抗力，这样的截面如图 1-2(a)中的 a-a 所示。为了分析计算，可考虑将此截面右侧的杆段除去，如图 1-2(b)所示。因而，必须补充右侧杆段对左侧杆段的作用。用此处引入的截面法，初始的内力便成为保留杆段的外力。为使左侧杆段平衡，这种效应在数值上等于水平力 P。然而，沿截面 a-a 法向作用的力 P 实际上是截面上法向分布力合成的结果。

为此，就必须对这些分布力的分布方式作某些假设。通常，通过形心作用的力是假设均匀分布在横截面上的。

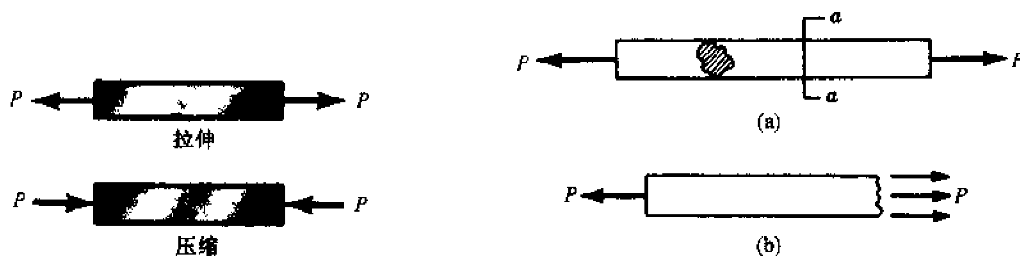


图 1-1　　图 1-2

1.1.2　法应力

替代讨论作用在某处小面积上内力，最好转为处理单位面积上法向力。单位面积上法向力的强度称为法应力，它是用单位面积上的作用力单位表示的，亦即 lbf/in^2 * 或 N/m^2。如果杆端的力使杆拉伸，杆内就产生拉应力，如果杆是受压缩的，杆内产生压应力。施加在杆端的力作用线必须通过每一个截面的形心。

1.1.3　试件

图 1-2(a)所示的轴向载荷经常出现在结构和机械设计中，为了在实验室中模拟这种轴向载荷，试件应夹持在电子或液压万能试验机的夹头中。这两种试验机通常在材料实验室用做

* $1\ lbf/in^2 = 6.895 \times 10^3\ Pa$

施加轴向拉伸载荷。

在材料试验技术规范标准中,美国材料试验协会颁布了详细的使用说明。此处只讲其中两种试件。一种厚度超过 3/16 in* (4.76 mm)的金属板试件如图 1-3 所示,另外一种直径为 1.5 in(38 mm)的金属圆棒状试件如图 1-4 所示,正如图中所看到的,试件的中部区域尺寸略小于两端尺寸。因而,破坏不会发生在两端的夹持段,过渡圆角保证试件两种尺寸的过渡部位不会发生应力集中。供测量伸长的标距长度为 8in(203 mm,图 1-3 试件)和 2in(51 mm,图 1-4 试件)。

试件的伸长既可以使用机械的、光学的引伸计,也可以使用粘贴在试件表面的电阻应变片来测量,这种电阻应变片由若干个沿试件轴向的、很细的电阻丝组成。当试件伸长时,电阻丝的电阻就会发生改变,电阻的改变由惠斯通电桥测量并转换为伸长。

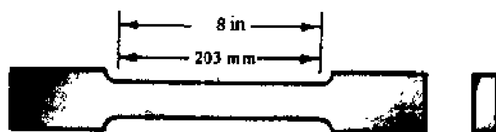


图 1-3

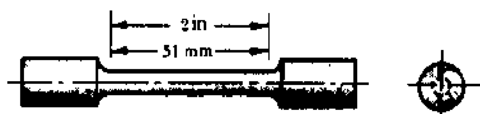


图 1-4

1.1.4　法应变

假设一支试件已经装卡在拉伸-压缩试验机上,并且拉力逐渐地施加在试件的两端。对于每一个事先指定的轴向载荷增量都要测量相应的标距的伸长。由这些数值得到单位长度的伸长,并将之定义为法应变,用 ε 来表示,可以用标距长度 L 去除总伸长 Δ 来得到法应变,即 $\varepsilon = \Delta/L$。法应变通常用"in/in"或"m/m"的单位来表示,因此是无量纲量。

1.1.5　应力-应变曲线

当轴向载荷以某种增量逐渐增长时,对于每一个载荷增量都要测量标距长度的总伸长,直至试件断裂。已知试件的初始截面积,对轴向载荷的任意值,由下式可以得到用 σ 表示的法应力:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

此处,P 是使用"lbf**"或"N"表示的轴向载荷,A 是初始截面积。于是,可以得到由法应力 σ 和法应变 ε 组成的很多数据对,然后分别以法应力为纵轴、法应变为横轴,用上述实验数据对

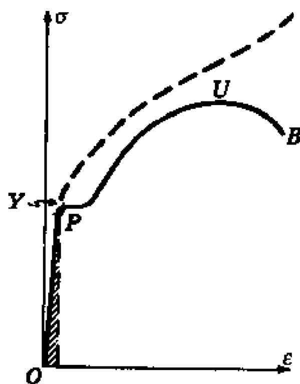


图 1-5

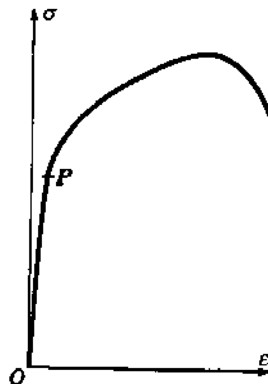


图 1-6

* 1 in = 2.54 cm.

* * 1 lbf = 4.44822 N.

作图,这就是材料的应力-应变曲线或拉伸图。对于不同的材料,应力-应变图有很多不同的形式。图 1-5 是碳素结构钢的应力-应变图,图 1-6 是合金钢的应力-应变图,图 1-7 是硬质钢或某些有色金属合金的应力-应变图,有色金属合金或铸铁的应力应变图如图 1-8 所示,而对于橡胶,图 1-9 是典型的应力-应变图。

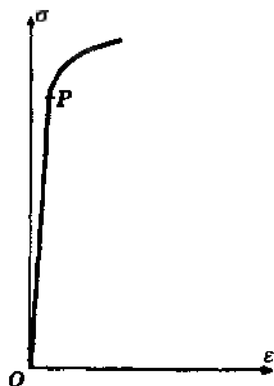


图 1-7

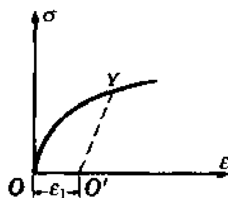


图 1-8

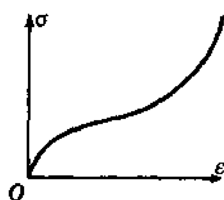


图 1-9

1.1.6 韧性材料和脆性材料

金属工程材料通常区分为韧性材料和脆性材料,在试件断裂之前,韧性材料具有较大的拉伸应变(如结构钢和铝),脆性材料具有较小的拉伸应变。法应变 0.05in/in(或 mm/mm)经常被取做这两类材料的分界线,铸铁和混凝土是典型的脆性材料。

1.1.7 胡克定律

对应力-应变曲线如图 1-5、图 1-6 或图 1-7 所示的任何一种材料,当应变相当小时,其应力、应变关系是线性的。轴向力和由它引起的伸长之间的线性关系(因为这些量各自和应力、应变只相差一个常数因于)是罗伯特·胡克(R. Hooke)首先于 1678 年发现的,称为胡克定律。为了描述材料行为的初始线性区,我们可以将之写作

$$\sigma = E\varepsilon$$

其中 E 表示图 1-5、图 1-6、图 1-7 所示每一曲线的直线段 OP 的斜率。

1.1.8 弹性模量

E(亦即单位应力和单位应变之比)是材料拉伸时的弹性模量,经常又叫做杨氏模量*。各种工程材料的 E 的数值被制成表格、编入手册中,常用材料的表格在本章结尾处。因为应变的单位是纯数(两个长度之比),因而 E 的单位与应力的相同(lbf/in^2 或 N/m^2 等)。很多常用工程材料压缩时的弹性模量和拉伸时弹性模量几乎相同。特别指出:本书中讨论的材料在载荷下的行为限于应力一应变曲线的线性阶段(除非另外指出)。

1.2 材料的力学性质

图 1-5 所示的应力-应变曲线可以用来表示材料的几个强度指标,它们是:

* 托玛斯·杨(T. Young),英国杰出的物理学家,诞生于 1773 年。他的研究工作涉及力学、光学和热学等多个领域。在他之前,历史学家还不能解释史前数千年古埃及人使用的石版图案或彩色符号(象形文字)。他同时还是一位通晓 11 种文字的语言大师,他依据对 1799 年发现的著名 Rossua 石头的研究,首次解释了这些符号。他及其后的治普里昂(Champollion,法国)的工作,使破译远古语言成为可能。

1.2.1　比例极限

P 点的纵坐标，亦即单向拉伸实验时应力是应变线性函数的最大应力，叫做比例极限。与应力-应变曲线图 1-8 所对应的材料没有比例极限。

1.2.2　弹性极限

几乎与 P 点重合的点的纵坐标，亦即单向拉伸试验时载荷全部取消后没有永久或残余形变的最大应力，叫做弹性极限。很多材料的比例极限和弹性极限的数值几乎相等，并且有时这两个名词当作同义词使用。对于两种极限数值有明显差别的那些情况，弹性极限总是大于比例极限。

1.2.3　弹性区和塑性区

应力-应变曲线由原点至比例极限的范围叫做弹性区，由比例极限至断裂点的范围叫做塑性区。

1.2.4　屈服点

图 1-5 中 Y 点的纵坐标叫做材料的屈服点，记作 σ_{yp}。由该处开始，应变增长而应力不再增长，载荷增长到 Y 点后材料发生屈服。某些材料的应力-应变曲线上存在两个应变增长而应力不增长的点，这些点分别叫做上屈服点和下屈服点。

1.2.5　极限强度或拉伸强度

图 1-5 中 U 点的纵坐标，亦即曲线的最大纵坐标，既可以称为材料的极限强度，也可称为材料的拉伸强度。

1.2.6　断裂强度

图 1-5 中 B 点的纵坐标叫做材料的断裂强度。

1.2.7　回弹模量

单向拉伸力逐渐地由零增长到比例极限对应的数值，材料单位体积内所做的功被定义为回弹模量。此功可以用应力-应变曲线下由原点到比例极限的而积、亦即图 1-5 中阴影区的面积来计算，这个量的单位是 $\mathrm{lbf\cdot in/in^3}$ 或在 SI 系统中是 $\mathrm{N\cdot m/m^3}$，因而，材料的回弹模量是材料在弹性区吸收能量的能力。

1.2.8　韧性模量

单向拉伸力逐渐地由零增长到引起断裂的数值，材料单位体积内所做的功被定义为韧性模量。这个量可以用应力-应变曲线下由原点到断裂的面积来计算。材料的韧性模量是材料在塑性区吸收能量的能力。

1.2.9　断面收缩率

由原始面积到断裂横截面积的减少量除以原始面积、再乘以 100% 得到的量叫做断面收缩率。此处要指出，当拉伸力作用在杆上时，杆的横截面在减少。但是，法应力的计算仍使用原始面积，这就是图 1-5 所示的情况。因为应变越来越大，考虑横截面的瞬时值（它在减少）就更为重要，由此才能得到真应力-应变曲线，这样的曲线如图 1-5 中虚线所示。

1.2.10　延伸率

试件断裂后标距长度的增加量除以初始长度、再乘 100% 得到的量叫做延伸率。断面收

缩率和延伸率都是材料韧性的度量。

1.2.11 工作应力

上面提到的强度指标可以用来选择工作应力(许可应力-译者注)。工作应力经常被选作屈服应力或极限应力除以某个安全因数,安全因数的选择要依赖于设计者的识别力和经验。安全因数的规范刊登在设计标准规范中。

1.2.12 应变强化

如果韧性材料能够加载到超过屈服点而不失效,就说材料已被应变强化。很多结构钢都发生这种情况。

如图 1-8 所示,脆性材料的非线性应力-应变曲线表征了另外两个强度指标,如果应力-应变曲线有线性阶段,则不能引入这些指标。它们是

1.2.13 屈服强度

当载荷加到某一数值后卸载,如果材料残留事先指定的永久形变,应力-应变曲线上与之对应的纵坐标叫做材料的屈服强度(国内称为名义屈服极限-译者注)。这个事先指定的永久形变通常选为 0.002 或 0.0035in/in 或 mm/mm。在图 1-8 中,事先指定的应变 ε_1 表示在应变轴上,并且直线 $O'Y$ 和应力-应变曲线的初始切线平行,Y 的纵坐标表示材料的屈服强度,有时也叫实用弹性极限应力。

1.2.14 切线模量

应力相对于应变的变化率叫作材料的切线模量。这是由 $\varepsilon_t = d\sigma/d\varepsilon$ 给出的瞬时模量。

1.2.15 线膨胀系数

线膨胀系数定义为,温度变化一度时,直杆单位长度的变化,它通常用 α 表示。线膨胀系数的值与长度的单位无关,但是与温度的标准有关。例如由本章结尾处的表 1-1 可以知道,钢的线膨胀系数为 6.5×10^{-6}/℉或 12×10^{-6}/℃。温度变化,如同加载一样,也会在结构内部产生应力。

1.2.16 泊松比

当杆承受单向拉伸时,杆将沿载荷的作用方向产生伸长,但是,垂直于载荷的横向尺寸要产生缩短。横向应变与轴向应变之比叫做泊松比。在本书中通常用希腊字母 μ 表示。对于大多数材料,μ 位于 0.25~0.35 的范围。

1.2.17 胡克定律的一般形式

对于轴向拉伸问题,亦即载荷完全沿杆件轴向作用的情况,已经给出了胡克定律的最简单形式。此时只考虑沿载荷方向的形变,且可由下式给出:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

更一般情形,材料单元体承受三个相互垂直方向的法应力 σ_x、σ_y、σ_z 作用,它们分别伴生应变 ε_x、ε_y、ε_z。因为泊松效应将由横向应力产生的应变和正向应变叠加在一起,我们得到胡克定律的一般形式:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

见题1.20和题1.23。

1.2.18 比强度

这个量被定义为极限(或拉伸)强度与比重(单位体积内的重量)的比值。因而在USCS系统中,有

$$\frac{\mathrm{lbf}}{\mathrm{in}^2}\bigg/\frac{\mathrm{lbf}}{\mathrm{in}^3} = \mathrm{in}$$

并且,在SI系统中,有

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\bigg/\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3} = \mathrm{m}$$

亦即,无论在何种系统中,比强度都有长度的单位。对于比较材料的效率性能,这个量是有用的。见题1.25。

1.2.19 比模量

这个量被定义为杨氏模量与比重(单位体积内的重量)的比值。将有关的单位代入,可以发现,在USCS和SI系统中,比模量均具有长度的物理单位。见题1.25。

1.3 动力效应

为了用拉伸或压缩试验测定材料的力学性能,加载速率有时会对测试结果有显著的影响。一般说来,韧性金属对加载速率的变化最敏感,而加载速率对脆性材料(如铸铁)的影响则可忽略。例如,特别快速施加轴向力时,低碳钢的屈服点可提高170%之多。然而有意思的是,在这种情况下总形变与低速加载相比保持不变。

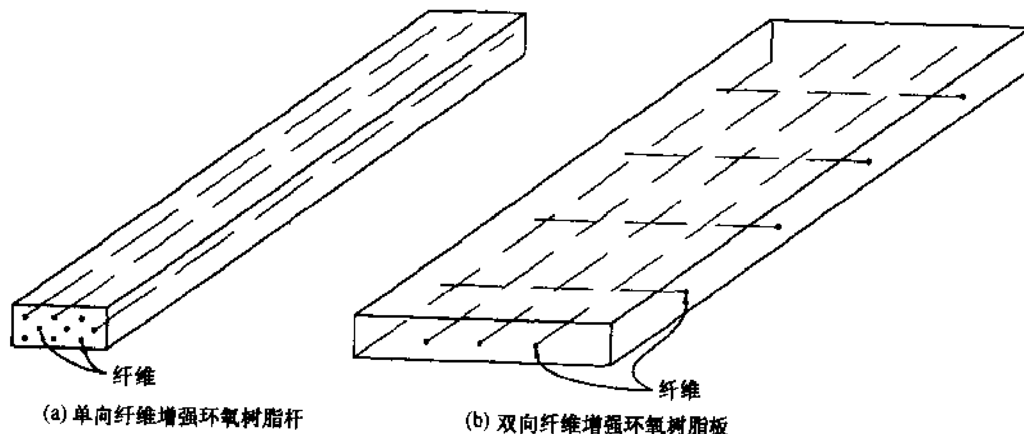
1.4 材料的分类

迄今,以上所有的讨论都是基于如下两个普遍采用的、关于材料特征的假设:

1. 均匀假设,亦即物体内所有点都具有相同的弹性性质(E,μ);

2. 各向同性假设,亦即物体内任一点的所有方向上都具有相同的弹性性质。

并非所有的材料都是各向同性的,如果材料不具有任何弹性对称性,称之为各向异性的,有时也称为偏等性的(aeolotropic)。这类材料与各向同性材料不同,具有21个独立的弹性常数,而不是2个独立的弹性常数。如果材料具有三个相互垂直的弹性对称平面,则称其为正交各向异性材料。这种情况下,独立的弹性常数有9个。如图1-10所示,纤维增强复合材料是



(a) 单向纤维增强环氧树脂杆　　(b) 双向纤维增强环氧树脂板

图1-10

典型的各向异性材料。

1.5 弹塑性分析

在某些结构中，经常允许材料的应力和形变处于塑性范围，例如某些建筑规范允许个别构件发生塑性形变，此外飞行器和火箭结构的某些构件故意设计为在塑性区工作，以减少重量。此外，很多金属加工过程，本身就包括材料的塑性形变。对于如图 1-11 所示的、低碳或中碳钢塑性小应变问题，应力-应变曲线通常理想化为两条直线，其中一条的斜率为 E，表示弹性区；另一条的斜率为零，表示塑性区。图 1-11 表示的材料称为理想弹塑性材料。这个图没有考虑发生在应变强化区内的、更大的塑性应变，亦即图 1-5 所示应力-应变曲线的右侧部分。见题 1.26。

如果产生了与图 1-11 中点 B 对应的应变，然后卸载，卸载过程沿直线 BC 进行。于是，完全卸载后，产生与应变 OC 对应的残留的永久形变。

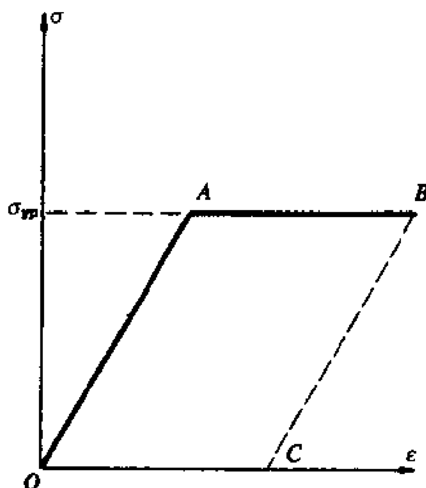


图 1-11

1.6 例　题

题 1.1　长度为 L，截面积为 A 的直杆，如图 1-12 所示。若弹性模量为 E，在其两端承受力 P 作用，试求其伸长。

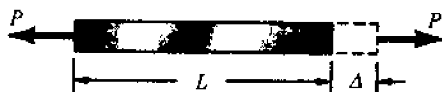


图 1-12

解　力 P 方向的应力等于载荷除以截面积 A，亦即 $\sigma = P/A$。应变 ε 等于总伸长除以初始长度，亦即 $\varepsilon = \Delta/L$。根据弹性模量的定义，E 是 σ 和 ε 的比，亦即

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{P/A}{\Delta/L} = \frac{PL}{A\Delta} \quad 或 \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

指出，Δ 具有长度的单位，或是 in，或是 m。

题 1.2　截面积为 $A = 500\ \mathrm{mm}^2$ 的钢杆受到几个力的作用，如图 1-13(a)所示。试求该杆的总伸长。钢的弹性模量 $E = 200$ GPa。

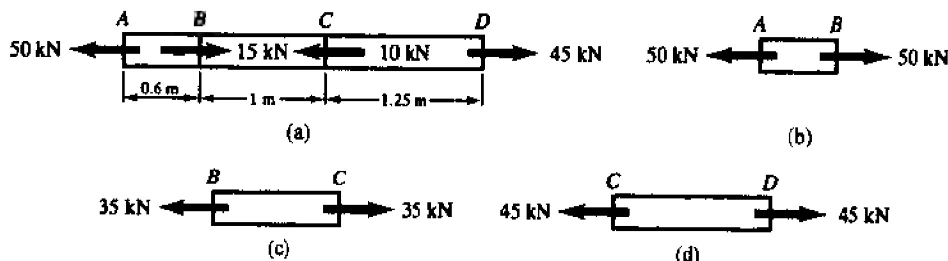


图 1-13

解　因为该杆是平衡的，因此杆的各区段都是平衡的，作用在 AB 区段内各截面的合力为 50 kN，长度为 0.6 m 的分离体图如图 1-13(b)所示。为保持与 A 端载荷平衡，此区段右端的力必然等于 50 kN。由例题 1.1 可知 AB 段的伸长为

$$\Delta_1 = \frac{(50000\text{N})(0.6\text{m})}{(500\times10^{-6}\text{m}^2)(200\times10^9\text{N/m}^2)} = 0.0003\ \text{m}$$

作用在 BC 区段的力,可以由作用在段内任意截面左侧的力的代数和确定,作用在左侧的合力是 35 kN,于是拉力也是 35 kN,BC 区段的分离体图如 1－13(c)所示。它的伸长为

$$\Delta_2 = \frac{(35000\text{N})(1\text{m})}{(500\times10^{-6}\text{m}^2)(200\times10^9\text{N/m}^2)} = 0.00035\ \text{m}$$

类似地,,作用在 CD 区段任意截面内的力必须是 45 kN,以保持和 D 端载荷的平衡。该区段的伸长为

$$\Delta_3 = \frac{(45000\text{N})(1.25\text{m})}{(500\times10^{-6}\text{m}^2)(200\times10^9\text{N/m}^2)} = 0.00056\ \text{m}$$

总的伸长为

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0.00121\ \text{m} \quad 或 \quad 1.21\ \text{mm}$$

题 1.3 承受载荷 P 和 $2P$ 的桁架如图 1-14(a)所示。各杆具有相同的横截面积 A_1,求杆 AB 和杆 AF 的应力。

解 ☞ 约束反力用 C_x、C_y 和 A_x 表示,由静力学,可有

$$\sum M_c = -(2PL) - P(2L) + A_x(3L) = 0, \qquad A_x = 4P/3$$

结点 A 的分离体图如图 1-14(b)所示。由静力学,有

$$\sum F_x = \frac{4P}{3} + \frac{1}{\sqrt{5}}(AF) = 0, \qquad AF = -\frac{4P\sqrt{5}}{3}$$

$$\sum F_y = (AB) + \frac{2}{\sqrt{5}}(AF) = 0, \qquad AB = -\frac{8}{3}P$$

杆的应力是

$$\sigma_{AF} = -\frac{4\sqrt{5}P}{3A_1}, \qquad \sigma_{AB} = -\frac{8P}{3A_1}$$

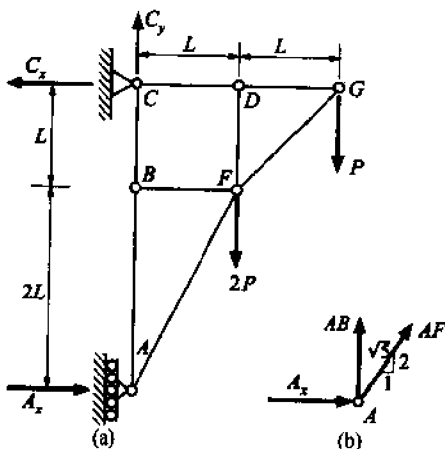


图 1-14

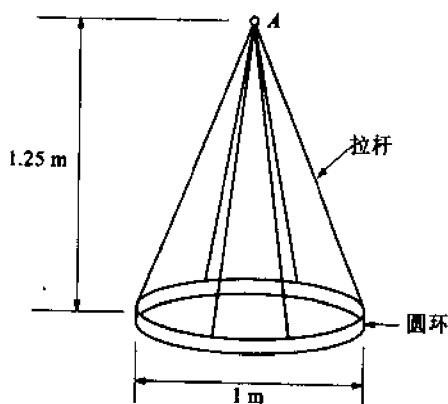


图 1-15

题 1.4 如图 1-15 所示,发电机的部件由圆环和沿环均匀分布的六根拉杆组成。拉杆的悬挂点 A 在圆环中心的正上方 1.25 m 处。已知圆环的平均半径为 0.5 m,圆环每米长度的重量为 2000 N。各拉杆的截面积均为 25 mm²。试确定圆环由于自身重量引起的铅直位移。

解 ☞ 圆环的分离体图如图 1-16 所示,其中 T 表示各杆中的拉力。铅直方向的合力为

$$6T(1.25/1.34) - (2000\text{N/m})2\pi(0.5\text{m}) = 0$$

$$T = 1120\ \text{N}$$

解出

我们考察一个典型杆(如 AB 杆)的形变,图 1-17 说明杆 AB 的伸长 BB' 可由下式给出:

$$\Delta = BB' = \frac{TL}{AE}$$

$$= \frac{(1120\text{N})(1.34\text{m})}{(25\text{mm}^2)(\text{m}/10^3\text{mm})^2(200\times10^9\text{N/m}^2)} = 0.0003\text{m} \quad 或 \quad 0.3\text{mm}$$

因为 B 点在圆环上,它必然沿铅直方向移动至点 B''。由图 1-16,可有

$$BB'' = 0.3/\cos\theta = \frac{0.3}{(1.25/1.34)} = 0.32(\text{mm})$$

此即为刚性圆环的铅直位移。

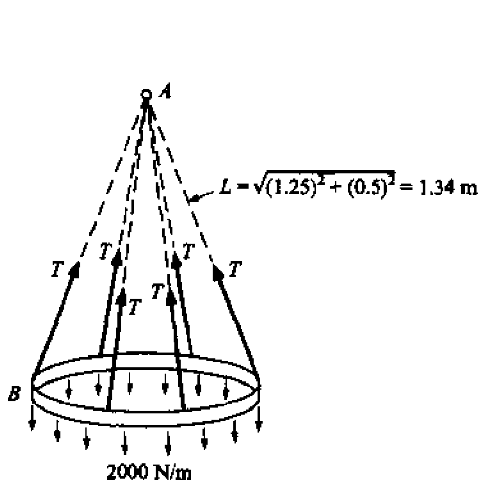


图 1-16

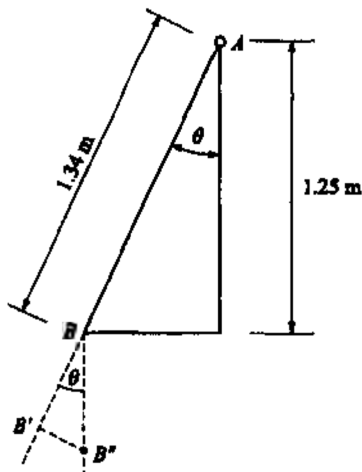


图 1-17

题 1.5 如图 1-18 所示,铅直悬挂的等截面直杆承受自身的重量,试求其长度的伸长。

解 ☞ 任意水平横截面内均有由截面以下杆段重量引起的法应力。长度为 dy 的元素伸长为

$$\text{d}\Delta = \frac{Ay\gamma}{AE}\text{d}y$$

其中 A 为杆的截面积,γ 为比重(单位体积内的重量)。将上式积分,杆的总伸长为

$$\Delta = \int_0^L \frac{Ay\gamma\text{d}y}{AE} = \frac{A\gamma}{AE}\frac{L^2}{2} = \frac{(A\gamma L)L}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

其中 W 表示杆的重量。注意,自重产生的总伸长等于将同样的重量施加在杆端时伸长的 1/2。

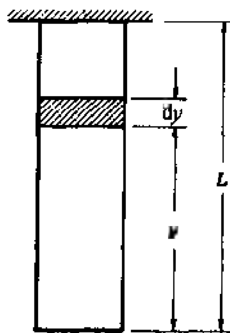


图 1-18

题 1.6 Jason 是一艘重量为 35200 N、并装备有遥控电视监测系统的研究型潜艇,1989 年它在水下 646 m 处作业,将位于意大利海区水下 Roman 舰的图像传输到与之相连的水面装置内。该潜艇连接在一根空心钢缆绳的下端,钢缆绳的截面积 $452\times10^{-6}\text{m}^2$,弹性模量 $E = 200$ GPa,钢缆绳的心部装有光纤传输系统,以便将图像传输到水面的装置内。试确定钢缆绳的伸长。由于整个系统的体积很小,海水浮力可以忽略不计,同时光纤芯缆对拉伸的影响也可忽略不计。

(注解:Jason 是 1986 年首次获得水下泰坦尼克(Titanic)舰图像的系统。)

解 ☞ 整个缆绳的伸长由(a)Jason 的重量和(b)钢缆绳的重量引起的两部分伸长组成。由题 1-1 可有(a)部分伸长,为

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE} = \frac{(35200\text{N})(646\text{m})}{(452\times10^{-6}\text{m}^2)(200\times10^9\text{N/m}^2)} = 0.252\text{m}$$

由题 1.5 可有(b)部分伸长,为

$$\Delta_2 = \frac{WL}{2AE}$$

此处 W 是钢缆绳的重量,可由钢缆绳的体积

$$(452\times10^{-6}\text{m}^2)(646\text{m}) = 0.292\text{m}^3$$

乘以钢的比重计算(按本章末表1-1,钢的比重是77 kN/m³),于是,钢缆绳的重量为

$$W=(0.292\text{m}^3)(77\text{kN/m}^3)=22484\text{N}$$

钢缆绳重量引起的伸长为

$$\Delta_2=\frac{(22484\text{N})(646\text{m})}{2(452\times10^{-6}\text{m}^2)(200\times10^9\text{N/m}^2)}=0.080\text{m}$$

总伸长为以上两项之和

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2=0.252+0.080=0.332(\text{m})$$

题1.7　两个棱柱形地杆件牢固地连接在一起,承受铅直载荷10000 lbf,如图1-19所示。上杆是钢的,比重为0.283 lbf/in³,长度为35 ft*,截面积为10 in²。下杆是黄铜的,比重为0.300 lbf/in³,长度为20 ft,截面积为8 in²。钢的弹性模量$E=30\times10^6$ lbf/in²,黄铜的弹性模量$E=13\times10^6$ lbf/in²。求两种材料中的应力。

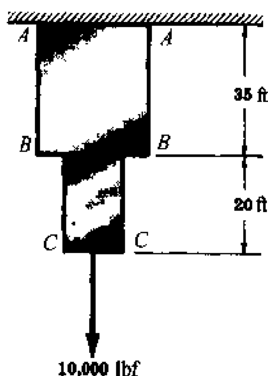


图1-19

解　☞ 黄铜棒中的最大应力发生在结合截面B-B的下方。该处的铅直法应力是由10000 lbf的载荷与B-B截面下的棒重共同产生的。

铜棒的重量为

$$W_b=(20\times12)(8)(0.300)=576\ (\text{lbf})$$

该截面的应力为

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{10000+576}{8}=1320\ (\text{lbf/in}^2)$$

钢棒的最大应力发生在悬挂点A-A截面处。因为该处由钢棒和铜棒总重量引起法应力,而稍下处截面的应力只由铜棒和部分钢棒的重量引起。

钢棒的重量为

$$W_s=(35\times12)(10)(0.283)=1185(\text{lbf})$$

截面A-A处的应力为

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{10000+576+1185}{10}=1180(\text{lbf/in}^2)$$

题1.8　如图1-20所示,长度为L的实心截圆锥棒均匀地由小直径d变化到大直径D。试求由施加在端部的轴向力P引起的伸长。

解　☞ 坐标x表示厚度为dx的圆盘形单元体与小直径端的距离,由相似三角形可以得到该单元体的半径为

$$\gamma=\frac{d}{2}+\frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)$$

该盘形单元体的伸长可由轴向拉伸公式$\Delta=PL/AE$计算,此伸长为

$$d\Delta=\frac{P\,dx}{\pi\left[\frac{d}{2}+\frac{x}{L}\left(\frac{D-d}{2}\right)\right]^2E}$$

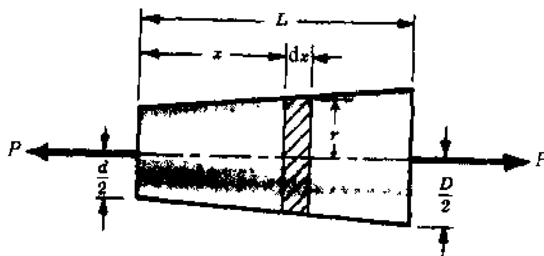


图1-20

整个棒的伸长可由所有单元体伸长之和得到,这需要积分,如果Δ表示整个棒的伸长,则

$$\Delta=\int_0^L d\Delta=\int_0^L\frac{4P\,dx}{\pi[d+(x/L)(D-d)]^2E}=\frac{4PL}{\pi DdE}$$

题1.9　两个截圆锥的实心棒连接在一起,一个是钛的,另一个是钢的,如图1-21(a)所示,左端固接在刚性的墙壁上。该系统在右端承受500 kN轴向集中力作用,同时在两棒接合面处承受合力为1000 kN环形对称分布力作用。试确定系统的伸长。钛的$E=110$ GPa,钢的$E=200$ GPa。

---

* 1 ft = 0.3048 m.

解 ☞ 该系统的分离体图如图 1-21(b)所示，而每个棒的分离体图如图 1-21(c)所示。

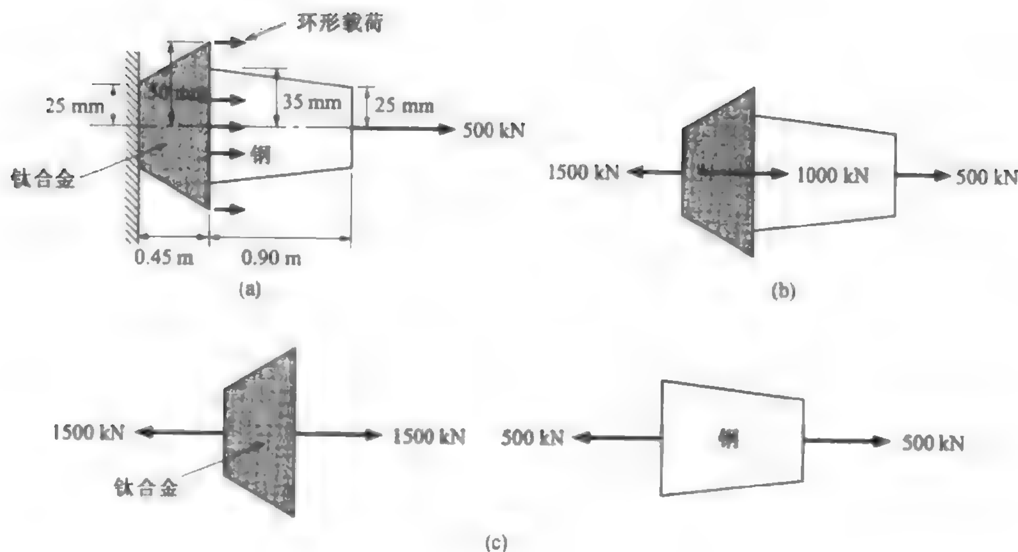


图 1-21

将题 1.8 的结果应用于每个棒，有

$$\Delta_{Ti} = \frac{4(1500000)(0.45)}{\pi(0.1)(0.05)(110\times10^9)} = 0.00156(\mathrm{m})$$

$$\Delta_{st} = \frac{4(500000)(0.90)}{\pi(0.07)(0.05)(200\times10^9)} = 0.00082(\mathrm{m})$$

应用叠加，有

$$\Delta = \Delta_{Ti} + \Delta_{st} = 0.00238\mathrm{m} \quad 或 \quad 2.38\mathrm{mm}$$

题 1.10 如图 1-22(a)所示，大型水泵系统由变直径的厚壁管和悬挂在下方的、重量为 W 的圆柱形水泵组成。已知厚壁管材料的比重是 γ，内径为 R_i(均为常数)。求厚壁管外径的变化规律，以使管内铅直方向的法应力为常数。

解 ☞ 引入坐标 y，原点在泵的顶部，正向指向上方，如图 1-22(a)。考虑一个高度为 $\mathrm{d}y$，距离泵的顶部为 y 的圆环形管元素，如图 1-22(b)所示。该圆环的下表面积为

$$A = \pi(R^2 - R_i^2) \tag{1}$$

上表面的面积为$(A+\mathrm{d}A)$。圆环材料的重量为 $\gamma A\mathrm{d}y$，由铅直方向的平衡，可有

$$\sigma_0(A+\mathrm{d}A) - \sigma_0(A) - \gamma A\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

化简后，有

$$\sigma_0(\mathrm{d}A) = \gamma A(\mathrm{d}y) \tag{3}$$

在管的下端($y=0$)，用 A_0 表示管的截面积。在下端($y=0$)和高程 y 之间积分(3)式，有

$$\int_{A_0}^{A}\frac{\mathrm{d}A}{A} = \int_0^y \frac{\gamma}{\sigma_0}\mathrm{d}y \tag{4}$$

于是

$$\ln\frac{A}{A_0} = \frac{\gamma}{\sigma_0}y \tag{5}$$

$$A = A_0 e^{\gamma y/\sigma_0} \tag{6}$$

在 $y=0$ 处，铅直平衡方程有

$$\sigma_0 = W/A_0 \tag{7}$$

因此，由(1)、(6)和(7)式可以得到任意高程 y 处的半径，为

$$R^2 = R_i^2 + \frac{W}{\pi\sigma_0}e^{\gamma y/\sigma_0} \tag{8}$$

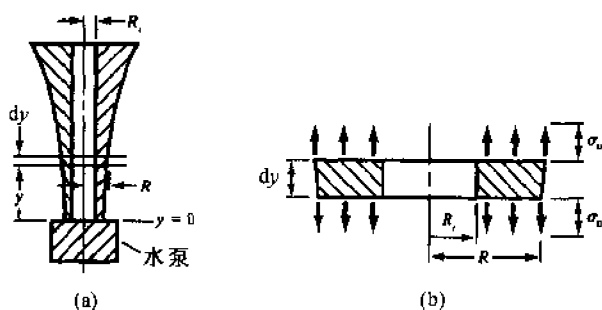


图 1-22

题 1.11　如图 1-23(a)所示，桁架由杆 AB、杆 AC、杆 BD、杆 DC 和刚性横梁 BC 组成。所有的杆都具有相同的截面积和弹性模量 E。求节点 D 由于集中力 P 和均布载荷 q 作用的位移。

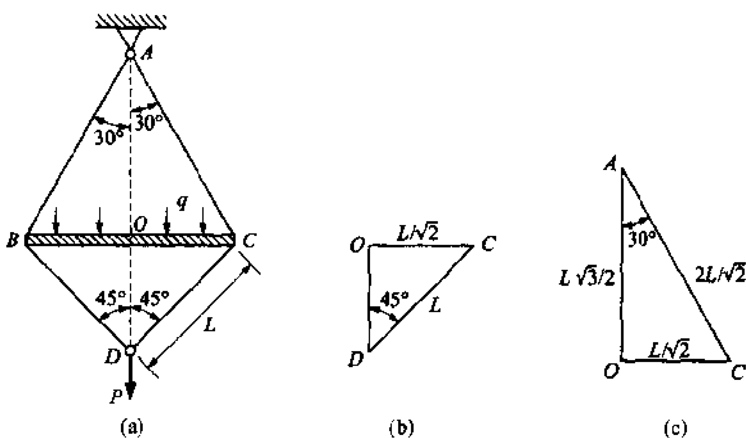


图 1-23

解　在 BC 以上做一个水平截面，分离体图如图 1-24 所示，此处 F_2 表示杆 AB 和杆 AC 的内力，由静力学，有

$$\sum F_v = -P - q(L/\sqrt{2})(2) + 2F_2\sin 60^\circ = 0$$

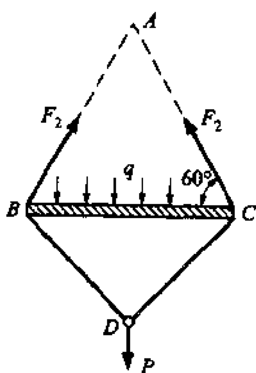


图 1-24

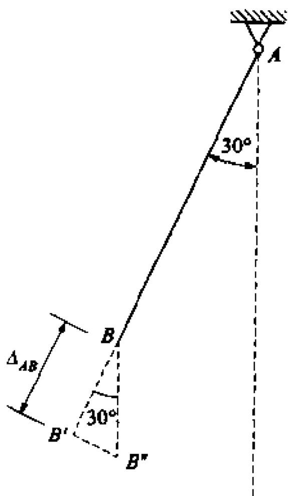


图 1-25

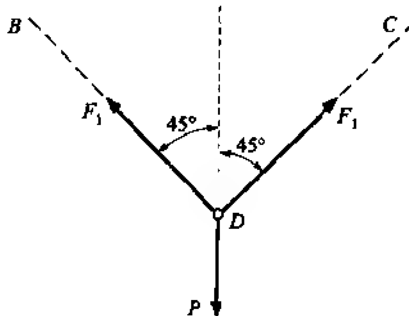


图 1-26

$$F_2 = \frac{P + \sqrt{2}qL}{\sqrt{3}} \tag{1}$$

为了考虑梁 BC 的下降，研究杆 AB 的形变，如图 1-25。杆 AB 长度的增加由下式给出：

$$\Delta_{AB} = \frac{F_2(2L/\sqrt{2})}{AE}$$

与之对应的铅直方向的下移为

$$BB'' = \frac{F_2(2L/\sqrt{2})}{AE\cos 30^\circ}$$

将(1)式的 F_2 代入此式，有

$$BB'' = \frac{4PL}{3\sqrt{2}AE} + \frac{4qL^2}{3AE} \tag{2}$$

再考虑 BC 下面的一个水平截面，分离体图如图 1-26，其中 F_1 表示杆 BD 和杆 DC 的内力。由静力学有

$$\sum F_v = -P + 2F_1\cos 45^\circ = 0$$

$$F_1 = \frac{\sqrt{2}P}{2} \tag{3}$$

现在需要确定由于力 P 作用在 BD 和 DC 杆上使 D 点发生的位移(见图 1-27)。BD 杆的伸长为

$$\frac{F_1L}{AE}$$

与之对应的铅直位移为

$$\frac{F_1L}{AE\cos 45^\circ}$$

将(3)式代入此式，此铅直位移为

$$\frac{PL}{AE} \tag{4}$$

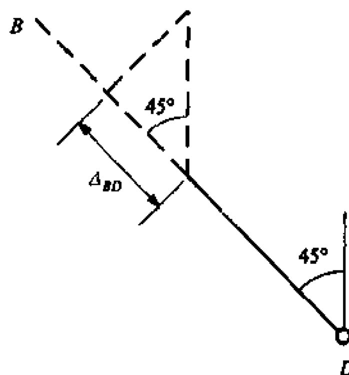


图 1-27

D 点的真实位移为(2)式和(4)式之和，

$$\Delta_D = \frac{4PL}{3\sqrt{2}AE} + \frac{PL}{AE} + \frac{4qL^2}{3AE} = 1.942\frac{PL}{AE} + 1.333\frac{qL^2}{AE} \tag{5}$$

题 1.12　如图 1-28 所示，由 AB 和 CB(CB 是垂直的)两杆组成的系统在 B 点处承受水平力 P。AB 杆的截面积为 A_1，长度为 L_1，弹性模量为 E_1，CB 杆相应的量为 A_2、L_2 和 E_2。求节点 B 的铅直和水平位移。

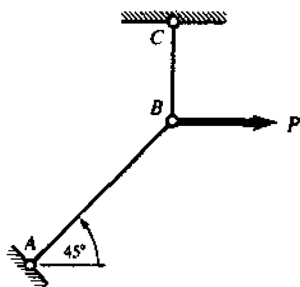


图 1-28

解　☞ 节点 B 的分离体图如图 1-29(a)所示，图中 F_1 和 F_2 是 AB 杆和 CB 杆施加在节点 B 的力，每一个力都假设为正的，亦即为拉伸。如果平衡方程解出这些杆的力为负值，那说明力的方向假设错了，杆是受压缩的。图 1-29(a)和(b)分别表示节点 B 对 AB 和 CB 杆的作用力，这些力和图 1-29(a)中力的数值相等、方向相反。由节点 B 的平衡方程，有

$$\sum F_x = P - F_1\cos 45^\circ = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = F_2 - F_1\sin 45^\circ = 0 \tag{2}$$

解出

$$F_1 = \sqrt{2}P, \qquad F_2 = P \tag{3}$$

结果说明，每一个杆都是受拉伸的。我们假想地解脱两杆在节点 B 处的联接，那么，杆 AB 的伸长为 BB'，杆 CB 的伸长为 BB''，如图 1-30 所示。由题 1-1 可以得到这些伸长，为

$$BB' = \frac{F_1L_1}{A_1E_1} = \frac{\sqrt{2}PL_1}{A_1E_1} \tag{4}$$

$$BB'' = \frac{F_2L_2}{A_2E_2} = \frac{PL_2}{A_2E_2} \tag{5}$$

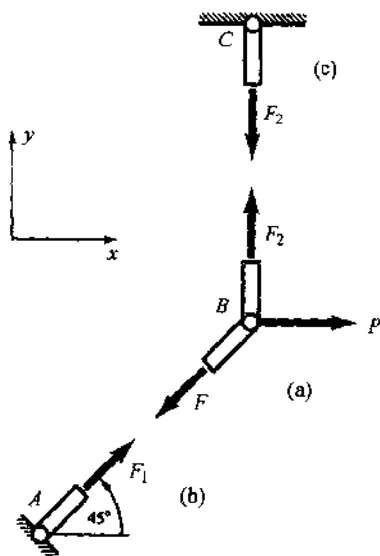


图 1-29

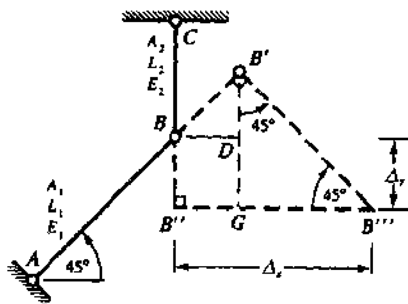


图 1-30

然而，节点 B 的最终位置应与不解除 B 处联接是一致的，因此杆 AB 必须绕 A 点作刚体旋转，杆 CB 绕 C 作刚体旋转。在 AB 延长线上的 B' 点必须沿以 A 为中心的圆弧运动。但是，对于小形变，认为这段圆弧可以用垂直于 AB' 的直线 $B'B'''$ 代替。同样，在 CB 延长线上的 B'' 点必须沿水平虚线 $B''B'''$ 运动，因此发生了以 C 为中心的圆弧运动，两段虚线的交点 B''' 必然是 B 点的最终的真实位置。由图 1-30 的几何关系，可有

$$BD = BB'\cos 45° = \frac{\sqrt{2}PL_1}{A_1E_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{PL_1}{A_1E_1} \tag{6}$$

$$B'D = BB'\sin 45° = \frac{PL_1}{A_1E_1} \tag{7}$$

$$B'G = B'D + DG = \frac{PL_1}{A_1E_1} + \frac{PL_2}{A_2E_2} \tag{8}$$

$$GB''' = B'G\,(45° \text{三角形}) \tag{9}$$

$$B''B''' = BD + GB''' = \frac{PL_1}{A_1E_1} + \left(\frac{PL_1}{A_1E_1} + \frac{PL_2}{A_2E_2}\right)$$

$$= \frac{2PL_1}{A_1E_1} + \frac{PL_2}{A_2E_2} = \Delta_x \tag{10}$$

最后，由图 1-30，B 点的铅直位移为

$$\Delta_y = BB'' = \frac{PL_2}{A_2E_2} \tag{11}$$

题 1.13 1989 年，在大西洋底由加利福尼亚到日本铺设了一条长度为 13300 km 的、可以同时传输 40000 个电话的新光缆。该光缆由一条船在平均温度为 22℃ 的条件下，铺设到平均温度 5℃ 的海底。光缆的线胀系数为 75×10^{-6}/℃。为在海底铺设长度为 13300 km 的光缆，试确定施工船需携带的光缆长度。

解 ☞ 施工船所携带的光缆长度应等于 13300 km 加未知的长度 ΔL，以使得下降到海底时收缩后的长度为 13300 km。由线膨胀系数的定义(第 1 章)，可有

$$\Delta L = \alpha L(\Delta T)$$

$$\Delta L = (75 \times 10^{-6}/℃)(13300 + \Delta L)(22 - 5)℃ \tag{a}$$

解上述方程，有

$$\Delta L = 16.96 \text{ km}$$

长度改变的百分比为

$$\frac{(16.96)(100\%)}{13300+16.96}=0.13\%$$

因而(a)式中 ΔL 的小数项是次要的。于是,在施工船温度下光缆的近似长度为 13317 km。

题 1.14 如图 1-31(a)所示,变截面杆承受端部的轴向拉伸或压缩,截面尺寸沿长度的变化既可以是已知的解析式,也可以是已知的数值。试针对以下两种情况,写出计算杆长变化的 FORTRAN 程序,(1)实心变截面圆棒(如图 1-31(b))、(2)厚度为 t 的(常数)变宽度平板。该板的轮廓由函数 $y=Ae^{Bx}$ 描述,此处 x 为轴向坐标。

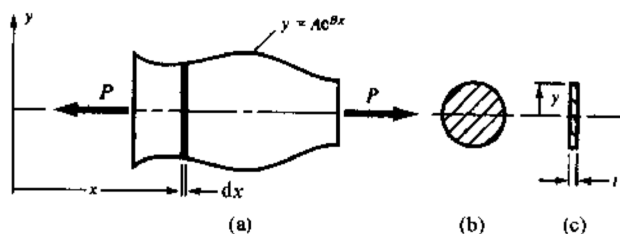


图 1-31

解 ☞ 由题 1.1 导出的公式可以应用于图 1-31(a)所示的、长度为 dx 的微段,每一个微段的截面积均为常数,对此微段可以应用关系式 $\Delta=PL/(EA)$,微段的长度为 dx,截面积为 A。很清楚,截面积 A 既可以由函数 $y=Ae^{Bx}$ 计算,也可以沿长度设置若干点,测量和计算这些点处的截面积的数值。这个计算方法可以表示为如下的 FORTRAN 程序,该程序是自提示的。拉伸载荷为正,压缩载荷为负。

要注意,在描述圆棒形状的方程 $y=Ae^{Bx}$ 中,e 为自然对数的底、A 和 B 均为轮廓变量,此处的 A 不是截面积。

```
00010*****************************************************************
00020                    PROGRAM SLBTEN2(INPUT,OUTPUT)
00030*****************************************************************
00040*
00050*          AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00060*          DATE  : FEBRUARY 5, 1989
00070*
00080*    BRIEF DESCRIPTION:
00090*       THIS PROGRAM DETERMINES THE CHANGE OF LENGTH OF A BAR DUE
00100*    TO AXIAL TENSION OR COMPRESSION. THE BAR MAY BE A CONSTANT
00110*    THICKNESS, VARIABLE WIDTH RECTANGULAR SLAB, OR A SOLID CIRCULAR
00120*    ROD WITH VARIABLE DIAMETER. IN EITHER CASE THE SHAFT IS CENTRALLY
00130*    LOADED BY AN AXIAL FORCE.
00140*       THE VARYING WIDTH (OF THE SLAB) OR DIAMETER (OF THE ROD) MAY
00150*    BE DESCRIBED EITHER ANALYTICALLY AS  Y = A*E ^(B*X)  WHERE X IS THE
00160*    GEOMETRIC AXIS OF THE BAR, OR NUMERICALLY USING THE MAGNITUDE OF
00170*    Y AT EACH END OF  N SEGMENTS, MEANING N+1 VALUES.
00180*
00190*    INPUT:
00200*       THE USER IS PROMPTED FOR THE TOTAL BAR LENGTH, THE ELASTIC
00210*    MODULUS, AND THE AXIAL LOAD. THE USER IS THEN ASKED IF THE
00220*    BAR IS BOUNDED BY A KNOWN FUNCTION, AS WELL AS THE SHAPE OF ITS
00230*    X-SECTION. FOR THE CASE OF THE SLAB, THE UNIFORM THICKNESS IS
00240*    ALSO ASKED FOR... IF THE FUNCTION IS KNOWN, THE CONSTANTS ARE
00250*    THEN PROMPTED AND THE ENDPOINTS OF THE BAR ON THE X-AXIS INPUTTED;
00260*    ALTERNATELY, THE NUMBER OF SEGMENTS AND MEASURED HEIGHTS/DIAMETERS
00270*    MUST BE ENTERED.
00280*
00290*    OUTPUT:
00300*       THE TOTAL ELONGATION OF THE BAR IS DETERMINED AND PRINTED.
00310*
00320*    VARIABLES:
00330*       L,T,EM         ---   LENGTH,THICKNESS,ELASTIC MODULUS OF BAR
00340*       A,B            ---   CONSTANTS OF Y = A*E ^(B*X)   GOVERNING BAR BOUNDA
00350*       X0,XN          ---   ENDPOINTS OF SHAFT ON X-AXIS
00360*       P              ---   CENTRALLY APPLIED AXIAL LOAD
00370*       AA(100)        ---   INDIVIDUAL SEGMENT HEIGHTS/DIAMETERS
00380*       AREA           ---   X-SECTIONAL AREA OF EACH SMALL INCREMENT
00390*       ANS            ---   DETERMINE IF USER HAS A KNOWN FUNCTION
```

```
00400*      TYPE        ---  DETERMINE BAR X-SECTION
00410*      DELTA       ---  UNIFORM BAR ELONGATION
00420*      LEN         ---  LENGTH OF INCREMENTAL ELEMENT
00430*
00440*********************************************************************
00450*********************************************************************
00460*                       MAIN PROGRAM
00470*********************************************************************
00480*********************************************************************
00490*
00500*   VARIABLE DECLARATION
00510*
00520    REAL I,T,L,EM,A,B,X0,XN,P,DELTA,AA(100),AREA,LEN
00530    INTEGER ANS,TYPE,NUM,J
00540*
00550*       USER INPUT PROMPTS
00560*
00570    PRINT*,'ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE BAR (IN M OR INCHES):'
00580    READ*,L
00590    PRINT*,'ENTER THE ELASTIC MODULUS (IN PASCALS OR PSI) :'
00600    READ*,EM
00610    PRINT*,'ENTER THE UNIFORM AXIAL LOAD (IN NEWTONS OR LBS) :'
00620    READ*,P
00630    PRINT*,'PLEASE DENOTE THE BAR X-SECTIONAL SHAPE:'
00640    PRINT*,'ENTER  1--SLAB  ;   2--CIRCULAR ROD'
00650    READ*,TYPE
00660*
00670*       IF A SLAB, PROMPT FOR ITS THICKNESS
00680*
00690    IF (TYPE.EQ.1) THEN
00700       PRINT*,'ENTER THE THICKNESS OF THE SLAB (IN M OR INCHES):'
00710       READ*,T
00720    ENDIF
00730    PRINT*,'DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE BAR?'
00740    PRINT*,'ENTER  1--YES  ;   2--NO'
00750    READ*,ANS
00760*
00770*       IF ANS EQUALS ONE, THE USER KNOWS FUNCTION. PROMPT
00780*       FOR CONSTANTS AND ENDPOINTS.
00790*
00800    IF (ANS.EQ.1) THEN
00810       PRINT*,'F(X) = A*E ^(B*X)'
00820       PRINT*,'ENTER A,B:'
00830       READ*,A,B
00840       PRINT*,'ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE BAR:'
00850       PRINT*,'(IN M OR INCHES):'
00860       READ*,X0,XN
00870*
00880    AREA = 0
00890    L=XN-X0
00900    LEN=L/50
00910    DO 20 I = X0,XN,LEN
00920       Y1=(A*(2.71828**(B*I)))*2
00930       Y2=(A*(2.71828**(B*(I + LEN))))*2
00940       Y=(Y1+Y2)/2
00950       IF(TYPE.EQ.1) THEN
00960          AREA=1/(Y*T) + AREA
00970       ELSE
00980          AREA=4/(3.14159*(Y**2)) + AREA
00990       ENDIF
01000 20 CONTINUE
01010*
01020*       IF ANS EQUALS TWO, THE USER DOES NOT KNOW FUNCTION.
01030*       PROMPT FOR NUMBER OF SEGMENTS AND MEASURED HEIGHTS/DIAMETERS.
01040*
01050    ELSE
01060       PRINT*,'ENTER THE NUMBER OF SECTIONS TO BE CALCULATED:'
01070       READ*,NUM
01080       IF(TYPE.EQ.1) THEN
01090          PRINT*,'ENTER THE HEIGHTS OF THE ENDS FOR SECTIONS 1 TO N:'
01100          PRINT*,'(IN M OR INCHES):'
01110       ELSE
01120          PRINT*,'ENTER THE DIAMETERS OF THE ENDS FOR SECTIONS 1 TO N:'
01130          PRINT*,'(IN M OR INCHES):'
01140       ENDIF
01150*
01160*       INPUT MEASURED HEIGHTS/DIAMETERS
01170*
```

```
01180        DO 30 J=1,NUM+1
01190           READ*,AA(J)
01200 30     CONTINUE
01210*
01220        AREA = 0
01230        LEN = L/NUM
01240        DO 40 J = 1,NUM+1
01250           Y=(AA(J)+AA(J+1))/2
01260           IF(TYPE.EQ.1) THEN
01270              AREA = 1/(Y*T) + AREA
01280           ELSE
01290              AREA = 4/(3.14159*(Y**2)) + AREA
01300           ENDIF
01310 40     CONTINUE
01320     ENDIF
01330*
01340*          DETERMINING THE ELONGATION OF THE LOADED BAR
01350*
01360     DELTA=(P*LEN*AREA)/EM
01370*
01380     PRINT 50,DELTA
01390*
01400 50 FORMAT(2X,'THE DEFORMATION OF THE BAR IS:',F8.5,' (M OR IN.)')
01410*
01420     STOP
01430     END
```

题 1.15 材料性质如图 1-32 所示，由边界曲线 $y=8e^{-0.01x}$ 描述的实心变截面圆棒，杆由 $x=0$ 延伸到 $x=180$ in。该杆承受轴向拉伸载荷 $P=100000$ lbf。材料为钢 $E=30\times10^6$ lbf/in²。试使用题 1.14 的 FORTRAN 程序确定棒的伸长。

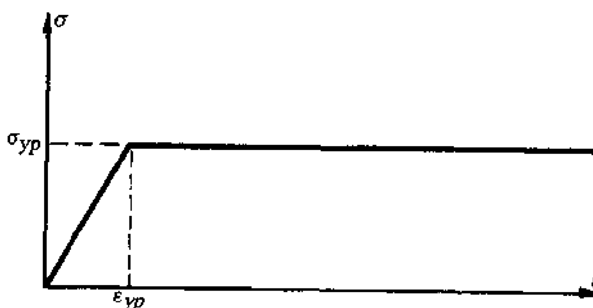


图 1-32

解 因为边界由曲线 $y=Ae^{Bx}$ 描述，可有 $A=8$、$B=-0.01$，将棒的长度(由 $x=0$ 到 $x=180$ in)输入题 1.14 的程序，得到棒的伸长为 0.03176in。

```
run
 ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE BAR (IN M OR INCHES):
? 180
 ENTER THE ELASTIC MODULUS (IN PASCALS OR PSI) :
? 30E+6
 ENTER THE UNIFORM AXIAL LOAD (IN NEWTONS OR LBS) :
? 100000
 PLEASE DENOTE THE BAR X-SECTIONAL SHAPE:
 ENTER  1--SLAB  :   2--CIRCULAR ROD
? 2
 DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE BAR?
 ENTER  1--YES  ;   2--NO
? 1
 F(X) = A*E^(B*X)
 ENTER A,B:
? 8,-0.01
 ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE BAR:
 (IN M OR INCHES):
? 0,180
  THE DEFORMATION OF THE BAR IS:  .03176 (M OR IN)

SRU       0.804 UNTS.
```

题 1.16 边界由曲线 $y=0.25e^{0.025x}$ 描述的变宽度厚板，其长度由 $x=4$ m 延伸到 $x=10$ m，如图 1-33 所示。此板的厚度为 10 mm，承受的轴向拉伸力为 385 kN。试使用题 1.14 的 FORTRAN 程序计算此板的伸长。材料的 $E=200$ GPa。

解 为了运行题 1.14 的程序，必须令 $A=0.25$、$B=0.025$。输入数据后显示

```
run
 ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE BAR (IN M OR INCHES):
? 6
 ENTER THE ELASTIC MODULUS (IN PASCALS OR PSI) :
? 200E+9
 ENTER THE UNIFORM AXIAL LOAD (IN NEWTONS OR LBS) :
? 385000
 PLEASE DENOTE THE BAR X-SECTIONAL SHAPE:
 ENTER  1--SLAB  :   2--CIRCULAR ROD
? 1
 ENTER THE THICKNESS OF THE SLAB (IN M OR INCHES):
? 0.01
 DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE BAR?
 ENTER  1--YES  ;   2--NO
? 1
 F(X) = A*E^(B*X)
 ENTER A,B:
? 0.25,0.025
 ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE BAR:
 (IN M OR INCHES):
? 4,10
  THE DEFORMATION OF THE BAR IS:  .00198 (M OR IN)
```

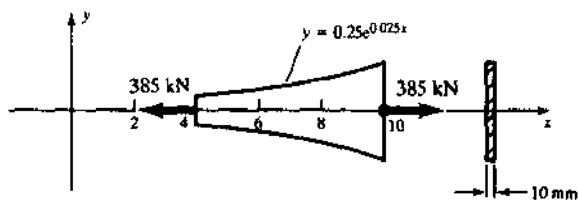


图 1-33

此杆的伸长为 0.00198 m 或 1.98 mm。

题1.17　如图 1-34(a)所示，由长度为 L 的细杆(或线)AB 和BC 组成的结构，A、B 和C 处均为铰链，AB 和BC 杆在没有承受载荷时是水平的，各杆的重量均被忽略。然后在 B 点缓慢地施加力Q。试确定力 Q 的数值，以使 B 点产生指定的铅垂位移。

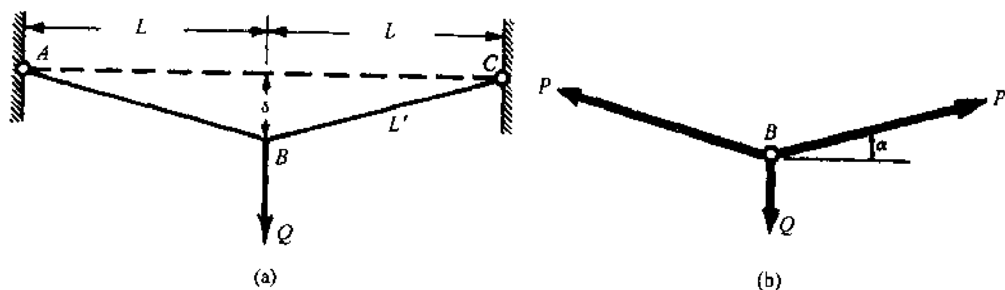


图 1-34

解　☞ 这是一个非常有趣的例子，系统内每一个单独的构件都满足胡克定律，由于几何的原因，节点 B 的垂度和力 Q 不成比例。

每一个杆均服从关系 $\Delta = PL/AE$，式中 P 是杆中的轴力、Δ 是轴向伸长。杆的初始长度为 L，施加载荷 P 后长度为L'。于是

$$L' - L = \frac{PL}{AE} \tag{1}$$

节点 B 的分离体图如图 1-34(b)。由静力学，有

$$\sum F_v = 2P\sin\alpha - Q = 0 \quad 或 \quad Q = 2P(\delta/L')$$

利用(1)式，得到

$$Q = 2\frac{(L'-L)AE}{L}\frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L}\left(1-\frac{L}{L'}\right) \tag{2}$$

但是

$$(L')^2 = L^2 + \delta^2 \tag{3}$$

最终，有

$$Q = \frac{2\delta AE}{L}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+\delta^2}}\right) \tag{4}$$

由二项式定理，有

$$\sqrt{L^2+\delta^2} = L\left(1+\frac{\delta^2}{L^2}\right)^{1/2} = L\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2}{L^2}+\cdots\right) \tag{5}$$

且

$$1-\frac{L}{L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2}\right)} \approx 1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2}\right) = \frac{\delta^2}{2L^2} \tag{6}$$

将(6)式代入(4)式，可以得到力和位移的近似关系

$$Q \approx \frac{2AE\delta}{L}\frac{\delta^2}{2L^2} = \frac{AE\delta^3}{L^3} \tag{7}$$

因而位移 δ 和力 Q 不成比例，尽管胡克定律对每一个杆件都是适用的。此处要指出，当位移变得很大时，假设胡克定律仍然正确，那么位移 δ 近似地和力 Q 成比例。在这个例子中叠加原理不再正确。这个系统的特点是：外力的作用显著地受小位移的影响，应力和位移都不是载荷的线性函数，不能应用叠加原理。

总结：如果应用叠加原理，材料必须服从胡克定律，但是，只此一个要求是不充分的。我们必须知道，载荷的作用是否受结构小形变的影响。如果这种影响是存在的，叠加原理就不再成立。

题 1.18　对于例题 1.17 中讨论的系统，每个杆的初始长度 $L=5$ ft、截面积 $A=0.1$ in^2，弹性模量 $E=30\times10^6$lbf/in^2，载荷 $Q=20$ lbf。试用两种方法（精确方法和近似方法）确定结点 B 的垂度 δ。

解　☞ 力和垂度的精确关系为

$$Q = \frac{2\delta AE}{L}\left(1-\frac{L}{\sqrt{L^2+\delta^2}}\right)$$

代入给定的数据，有

$$20 = \frac{2\delta(0.1)(30\times10^6)}{(60)}\left(1-\frac{60}{\sqrt{60^2+\delta^2}}\right)$$

用试凑法求解，得到 $\delta=1.131$ in。力和垂度的近似关系为 $Q\approx AE\delta^3/L^3$，代入数据，有

$$20 \approx \frac{(0.1)(30\times10^6)\delta^3}{(60)^3}$$

由此可得到 $\delta=1.129$ in。

题 1.19　边长为 50 mm 的正方形截面钢棒，长度 $L=1$ m，承受轴向拉伸力 $P=250$ kN。弹性模量 $E=200$ GPa，泊松比 $\mu=0.3$。试确定侧向尺寸的减少。

解　☞ 因为载荷是轴向的。因而载荷方向的应力

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{(250\times10^3)}{(0.05)(0.05)} = 100(\text{MPa})$$

轴向拉伸的胡克定律为 $E=\sigma/\varepsilon$，载荷方向的应变 ε 为 $(100\times10^6)/(200\times10^9)=5\times10^{-4}$。

泊松比 μ 等于侧向应变和轴向应变之比，亦即：μ =（侧向应变）/（轴向应变），轴向应变是 5×10^{-4}，侧向应变等于 μ 和此值之积，即 $(0.3)\times(5\times10^{-4})=1.5\times10^{-4}$，因为侧向应变为 1.5×10^{-4}，50 mm 长度的形变为 7.5×10^{-3}，它表示棒的侧向尺寸减少。

注意，用两个应变来定义泊松比，是假设只有单纯轴向拉伸载荷作用在构件上。

题 1.20　考虑一个单元体的应力状态，σ 作用在第一方向上，侧面的第二方向（z 方向）是自由的，但是第三方向（y 方向）是完全约束的。试求(1) x 方向的应力和应变之比 (2) z 方向和 x 方向应变之比。

解 ☞ 让我们考虑前面讨论过的胡克定律一般形式，为满足题设条件，应令 $\sigma_z=0,\epsilon_y=0$，胡克定律变为

$$\epsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+0)] \tag{a}$$

$$\epsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(0+\sigma_x)] \tag{b}$$

$$\epsilon_z=\frac{1}{E}[0-\mu(\sigma_x+\sigma_y)] \tag{c}$$

由(b)式得到 $\sigma_y=\mu\sigma_x$，于是，由(a)式得到

$$\epsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu^2\sigma_x)=\frac{1-\mu^2}{E}\sigma_x$$

由此式解出应力 σ_x，并将之代入(c)式，有

$$\epsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\mu\sigma_x)=-\frac{\mu(1+\mu)}{E}\cdot\frac{\epsilon_x E}{1-\mu^2}=-\frac{\mu\epsilon_x}{1-\mu}$$

可以得到比值

$$\frac{\sigma_x}{\epsilon_x}=\frac{E}{1-\mu^2} \quad 和 \quad -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}=\frac{\mu}{1-\mu}$$

第一个量 $E/(1-\mu^2)$ 通常表示有效弹性模量，在薄板和薄壳理论中是很有用的。第二个比值 $\mu/(1-\mu)$ 称为有效泊松比。

题 1.21 考虑一个承受单向拉伸的单元体(见图 1-35)。试求由于此单向拉伸引起的单位体积改变。

解 ☞ 加力方向的应变可以表示为 ϵ_x，另外两个与之垂直方向的应变均为 $-\mu\epsilon_x$，因而，单元体的初始尺寸为 dx、dy、dz，形变后的尺寸为

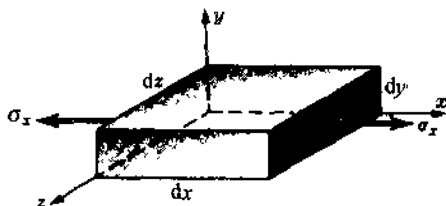


图 1-35

$$(1+\epsilon_x)dx,\quad (1-\mu\epsilon_x)dy,\quad (1-\mu\epsilon_x)dz$$

形变后的体积为

$$\begin{aligned}V'&=[(1+\epsilon_x)dx][(1-\mu\epsilon_x)dy][(1-\mu\epsilon_x)dz]\\&=(1+\epsilon_x)(1-2\mu\epsilon_x)dxdydz\\&=(1-2\mu\epsilon_x+\epsilon_x)dxdydz\end{aligned}$$

注意到形变非常小，以至于应变的平方和乘积均可略去。初始的体积为 $dxdydz$，则单位体积的变化为

$$\frac{\Delta V}{V}=(1-2\mu)\epsilon_x$$

因而，若为拉伸，体积略为增加；若为压缩，体积略为减少。

此外，垂直加力方向的单元体界面面积的减少近似为

$$A=(1-\mu\epsilon_x)^2dydz=(1-2\mu\epsilon_x)dydz$$

题 1.22 边长为 50 mm 的铝棒长度为 250 mm，在端部承受轴向拉伸。试验发现，载荷方向的应变为 0.001，试求此棒的体积改变。泊松比 $\mu=0.33$。

解 ☞ 由题 1.21 可知，单位体积的改变为

$$\frac{\Delta V}{V}=\epsilon(1-2\mu)=0.001(1-0.66)=0.00034$$

于是此棒的体积改变为

$$\Delta V=(50)(50)(250)(0.00034)=212.5(\text{mm}^3)$$

在无约束情况下棒的初始体积为 $6.25\times10^5\ \text{mm}^3$，因为拉伸体积增加，最终的体积为 $6.252125\times10^5\text{mm}^3$。借助于激光设备，可测量载荷作用下最终体积的 7 位有效数字，通常的测试方法当然无法达到这种精确度。

题 1.23 我们已经得到将应变分量表示为应力分量函数的胡克定律的一般形式。有时也需要将应力分量表示为应变分量的函数，试导出这些表达式。

解 ☞ 给出先前的表达式

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \tag{1}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] \tag{2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \tag{3}$$

引入记号

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{4}$$

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{5}$$

将 σ_x、σ_y 和 σ_z 作为未知量，同时利用这些记号，求解(1)、(2)和(3)式，得到

$$\sigma_x = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x \tag{6}$$

$$\sigma_y = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_y \tag{7}$$

$$\sigma_z = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_z \tag{8}$$

此即为欲求的表达式。

由(1)~(5)式还可以得到另外一些内容，将(1)、(2)和(3)式相加，并引用记号 e 和 θ，则有

$$e = \frac{1}{E}(1-2\mu)\theta \tag{9}$$

对于固体承受静水压力 p 的特殊情况，$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$，因此

$$e = -\frac{3(1-2\mu)p}{E} \quad 或 \quad \frac{p}{e} = -\frac{E}{3(1-2\mu)} \tag{10}$$

量 $E/3(1-2\mu)$ 经常记作 K，称为材料的容积模量或体积膨胀模量。容积模量的物理意义是，当没有形状改变时，材料对体积变化抵抗能力的度量。

我们看到，边长为 dx、dy、dz 的单元体，加载后产生应变 ε_x、ε_y、ε_z，最终的体积为

$$(1+\varepsilon_x)dx(1+\varepsilon_y)dy(1+\varepsilon_z)dz = (1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)dxdydz$$

因此体积增加与原始体积之比近似为 $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$。

单位体积的改变 e 定义为膨胀系数。

题 1.24 钢制的立方体承受静水压力 $p = 1.5$ MPa，由于此压力，体积将按膨胀系数 $e = -10^{-5}$ 收缩，材料的杨氏模量 $E = 200$ GPa。试求材料的泊松比和容积模量。

解 ☞ 由例题 1.23 可知，承受静水压力时的膨胀系数由(10)式给出，

$$e = \frac{-3(1-2\mu)p}{E}$$

将给定的数据代入，有

$$-10^{-5} = \frac{-3(1-2\mu)(1.5\times10^6)}{200\times10^9}$$

由此可有 $\mu = 0.278$。并由例题 1.23 可知容积模量 K 为

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

即

$$K = \frac{200\times10^9}{3(1-0.556)} = 150(\text{GPa})$$

题 1.25 利用表 1-1 中给出的材料性质，确定下述材料的比强度和比模量(USCS 体系)(a)铝合金，(b)钛合金，(c)玻璃环氧树脂。

解 ☞ 根据定义，比强度是极限应力和材料比重的比值，比模量是杨氏模量和比重之比。(a)对铝合金，我们有

$$比强度 = \frac{80000\text{lbf/in}^2}{0.0984\text{lbf/in}^3} = 813000\text{in}$$

$$比模量 = \frac{12\times10^6\text{lbf/in}^2}{0.0984\text{lbf/in}^3} = 122\times10^6\text{in}$$

(b)对钛合金,我们有

$$比强度 = \frac{140000\text{lbf/in}^2}{0.162\text{lbf/in}^3} = 864200\text{in}$$

$$比模量 = \frac{17\times10^6\text{lbf/in}^2}{0.162\text{lbf/in}^3} = 105\times10^6\text{in}$$

(c)对玻璃环氧树脂,我们有

$$比强度 = \frac{275000\text{lbf/in}^2}{0.0766\text{lbf/in}^3} = 3.6\times10^6\text{in}$$

$$比模量 = \frac{9.6\times10^6\text{lbf/in}^2}{0.0766\text{lbf/in}^3} = 125\times10^6\text{in}$$

将上述比强度作一比较可知,复合材料(玻璃环氧树脂)的比强度较其他金属大得多,而比模量稍大于其他金属。

题1.26 考虑长度为 $L=1.7$ m,边长 20 mm 的正方形截面杆,假设材料是理想弹塑性的,屈服极限为 275 MPa,杨氏模量 $E=200$ GPa, 如图 1-36 所示。缓慢地施加轴向拉伸载荷,使得此杆的伸长为 15 mm,此后卸载。试求卸载之后的残余伸长。

解 ☞ 当载荷等于下述值时,材料开始屈服,

$$P=\sigma_{yp}(A)=(275\times10^6\text{N/m}^2)(0.020\text{m})^2=110000\text{N}$$

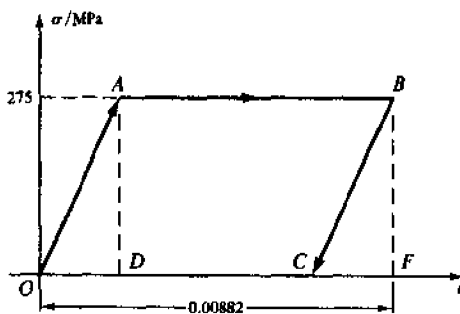


图 1-36

相应于图 1-36 中的点 A。注意,该图纵坐标为应力、横坐标为应变,然而每个轴上的数值与力-伸长图上的数值仅相差一个常数。当伸长为 15 mm 时,相应于图 1-36 中的点 B,开始卸载。当时的轴向应变为

$$\frac{15\text{mm}}{1700\text{mm}}=0.00882$$

卸载沿着直线 BC(平行于 AO)进行,直到水平轴,因而 OC 相应于完全卸载后的应变。下面我们来求应变 CF,利用相似三角形 OAD 和 CBF,有

$$E=\sigma/\varepsilon,\varepsilon=\frac{275\times10^6\text{Pa}}{200\times10^9\text{Pa}}=1.375\times10^{-3}$$

于是,卸载后的残余应变为

$$OC=OF-CF=0.00882-0.00138=0.00744$$

棒长 1.7 m 的伸长为

$$(1.7\text{ m})(0.00744)=0.0126\text{ m} \quad 或 \quad 12.6\text{ mm}$$

1.7 习 题

题1.27 施加在人体脊柱关节上的力可能产生过量的应力,并导致脊椎间盘的破坏。成人脊椎间盘测量结果表明,表面积近似为 1000 mm²,举重练习时测得的法向力为 708 N。求脊椎间盘的法应力。(答案:708 kPa)

题1.28 对人体牙齿测量指出,咀嚼的有效面积近似为 0.04in²,牙齿的长度大约为 0.41 in。如果施加的铅垂载荷为 200 lbf,测量得到的牙齿缩短为 0.0015 in。求牙齿的杨氏模量。(答案:1.37×10^6lbf/in²)

题 1.29 铸铁制成的空心圆柱，外径为 75 mm，内径为 60 mm。承受轴向压缩载荷 50 kN。求长度为 600 mm 的缩短及法向应力。材料的杨氏模量为 100 GPa，并且忽略圆柱侧向屈曲的可能。（答案：$\Delta = 0.188$ mm，$\sigma = 31.45$ MPa）

题 1.30 直径 6 mm 的圆截面钢棒与边长 25 mm 的方截面黄铜棒牢固地连接在一起，钢棒长度为 500 mm，黄铜棒的长度为 400 mm. 钢的弹性模量 $E = 200$ GPa，黄铜的弹性模量 $E = 90$ GPa. 两棒的轴线是完全重合的，承受 5 kN 的轴向拉力。求此棒的伸长。（答案：0.477 mm）

题 1.31 高性能的喷气式飞机在 25000 m 的高空以三倍音速飞行，此飞机具有肋条加强的钛合金细长机体，飞机的长度为 30 m。高空飞行时的温度较地面上高500 ℃，材料的线膨胀系数为 10×10^{-6}/℃。飞机高空飞行时的长度较在地面上增加了多少？（作者注：飞机长度的变化将影响飞机的性能，因而长度变化是非常重要的。设计者必须加以考虑。）（答案：0.15 m）

题 1.32 一种最有希望的超导材料是由金属钇、钡、铜和氧制成的，这种材料作为超导体（基本无阻抗损耗传输电流）可直到 −178℃，如果温度上升到 67℃，材料的线膨胀系数为 11.0×10^{-6}/℃。求 100 m 超导材料的长度变化。（答案：0.27 m）

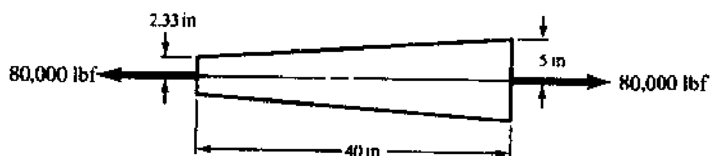


图 1-37

题 1.33 实心的截圆锥棒是由铝制成的，尺寸如图 1-37 所示。此棒受轴向力 $P = 80000$ lbf 的拉伸，弹性模量 $E = 10 \times 10^6$ lbf/in²。求此棒的伸长。（答案：0.00874 in）

题 1.34 实心圆锥棒铅垂悬挂，如图 1-38 所示。长度为 L，上端的直径为 D，弹性模量为 E，材料的比重为 γ。求由于自重引起的伸长。（答案：$\Delta = \frac{\gamma L^2}{6E}$）

题 1.35 如图 1-39 所示，Z -型的刚性曲杆 $ABCD$，在 B 处铰结悬挂，在 D 处受铅垂载荷 P 作用，在 A 处用钢棒 AF 连接在坚固地面支承 F 处。钢棒的 $E = 30 \times 10^6$lbf/in²。求 D 点的铅垂位移。（答案：0.099 in）

题 1.36 刚性杆 ABC 在 B 点铰接，在 A 点联接在一个钢杆 AD 上，AD 又联接在一个更大的钢杆 DF 上，而 DF 再联接在基础上，系统的几何形状如图 1-40 所示。如果施加在 C 处的铅直力 $P = 40$ kN，求 C 点的铅直位移。（答案：9.17 mm）

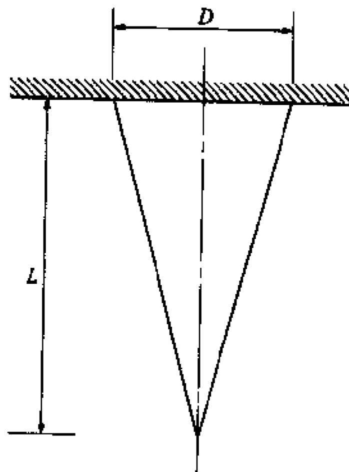


图 1-38

题 1.37 迴转体承受力 P 的作用，如图 1-41 所示，迴转体的上半径是 r_0，材料的比重为 γ。试求迴转半径沿高程的变化规律，以使所有截面上的压应力均为常数。（迴转体自垂可不忽略。）（答案：$r = r_0 e^{\gamma\pi r_0^2 y/2P}$）

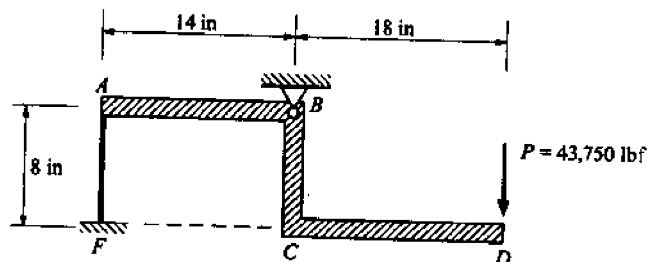


图 1-39

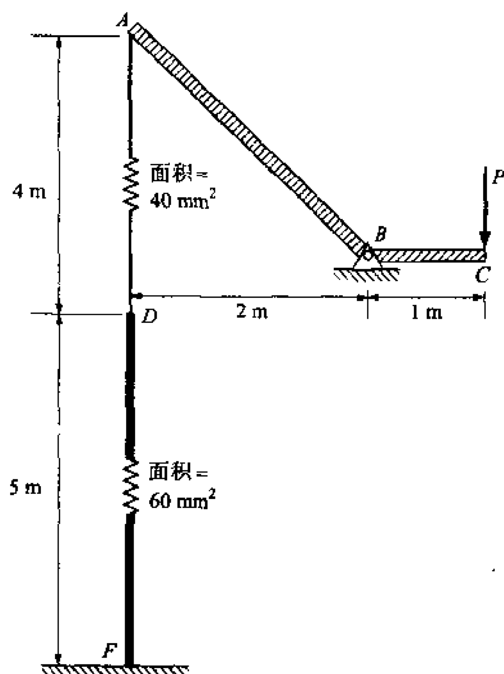


图 1-40

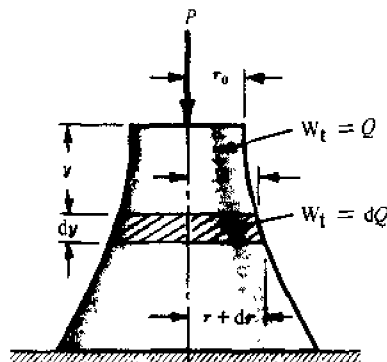


图 1-41

题 1.38　在题 1.12 中考虑力 $P = 20000$ lbf, $A_1 = 1.2$ in², $L_1 = 5$ ft, $E_1 = 16 \times 10^6$ lbf/in², $A_2 = 1.5$in², $L_2 =$ 4ft, $E_2 = 10 \times 10^6$ lbf/in²。求点 B 的水平及铅直位移分量。(答案:$\Delta_x = 0.189$ in, $\Delta_y = 0.064$ in)

题 1.39　在图 1-42 中, AB、AC、BC、CD 和 BD 是相互铰接的杆件,用一个弹簧将点 B 和点 E 相联。此弹簧的自由长度为 1 m,弹簧劲度系数为 4 kN/m。在 D 点施加一铅直力 P,以使 CD 杆保持水平,如果忽略各杆及弹簧的重量,求力 P 的数值。(答案:583 N)

题 1.40　两杆 AB 和 BC 在各端均为铰支,且在 B 处承受 200 kN 铅直力作用,如图 1-43 所示。两杆的材料为结构钢,屈服点为 200 MPa,拉伸和压缩时的安全系数分别是 2 和 3.5,杨氏模量 $E = 200$ GPa。若忽略杆 BC 侧向屈曲的可能性,试求两杆截面积以及 B 点的水平和铅直拉移。(答案:面积$_{AB}$ = 1732 mm²,面积$_{BC}$ = 1750 mm²;$\Delta_h = 0.37$ mm(→),$\Delta_v = 1.78$ mm(↓))

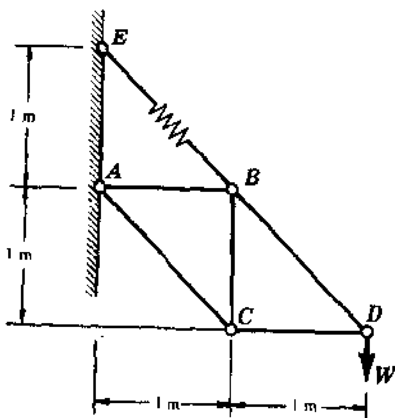


图 1-42

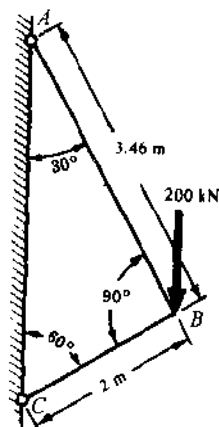


图 1-43

题 1.41　如图 1-44 所示,两杆 AB 和 CB 在其两端均为铰接,并承受单独的铅直力 P 作用,各杆的几何尺寸及弹性常数是不同的。求 B 的水平和铅直拉移。(答案:$\Delta_x = -\dfrac{PL_1}{\sqrt{3}A_1E_1} + \dfrac{PL_2}{\sqrt{3}A_2E_2}$, $\Delta_y = \dfrac{PL_1}{3A_1E_1} + \dfrac{PL_2}{3A_2E_2}$)

题 1.42 在题 1.41 中，杆 AB 是钛合金的，截面积 1000 mm^2，长 2.4 m，$E_1=110$ GPa；杆 CB 是钢的，截面是 400 mm^2，长 2.4 m，$E_2=200$ GPa。当 $P=600$ kN 时，求 B 点的水平和铅直位移。（答案：$\Delta_x=2.83$ mm，$\Delta_y=10.4$ mm）

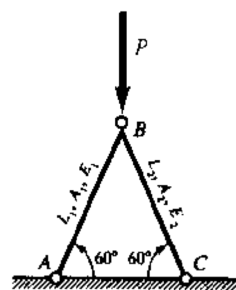


图 1-44

题 1.43 厚度为 0.125 in 的变宽度平板边界为 $y=10\ e^{-0.25x}$ 其长度由坐标原点延伸至 $x=5$ in 处，平板由钢材制成，杨氏模量为 $E=30\times10^6$ lbf/in²，承受轴向拉力 $P=20000$ lbf。试利用题 1.14 中的 FORTRAN 程序计算平板的伸长。（答案：0.00275 in）

题 1.44 实心圆截面钢杆的轮廓为曲线 $y=0.07e^{-0.05x}$，其长度由坐标原点延伸至 $x=5$ m 处，材料的杨氏模量 $E=200$ GPa，承受轴向拉力 $P=1.5$ MN。试利用题 1.14 中的 FORTRAN 程序求此钢杆的伸长。（答案：3.24 mm）

题 1.45 考虑一个单元体的应力状态，它在一个方向的应力为 σ_x，而在另外两个方向上完全限制了侧向收缩。试求有效弹性模量和有效泊松比。（答案：有效弹性模量 $=\dfrac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}$，有效泊松比 $=0$）

题 1.46 铝合金制成的块体，长 400 mm，矩形截面为 25 mm×30 mm，沿其长度方向施加压力 $P=60$ kN，且在另外两个方向完全限制了横向形变。若 $E=75$ MPa，$\mu=0.33$，试求有效弹性模量及长度的变化。（答案：有效弹性模量 = 114.5 GPa，长度改变 = −0.286 mm）

题 1.47 考虑一个轴向压缩杆件内的应力状态，侧向膨胀受到一定的约束，使得其值等于侧面自由时正常膨胀量的 1/2。求有效弹性模量。（答案：$E(1-\mu)/(1-\mu-\mu^2)$）

题 1.48 一等截面杆承受单轴拉伸，在加力方向的应变为 1/800，若泊松比 $\mu=1/3$，求单位体积的改变量。（答案：1/2400（增加））

题 1.49 长度为 250 mm 的正方形截面钢棒，截面边长为 50 mm，杨氏模量 $E=200$ GPa，泊松比 $\mu=0.3$，承受轴向拉力为 200 kN，求单位体积的改变量。（答案：0.00016）

题 1.50 一长度为 70 in 的正方形截面低碳钢杆，截面边长为 1 in，材料的屈服点为 40000 lbf/in²，杨氏模量为 30×10^6 lbf/in²。轴向拉伸载荷缓慢地由 0 增加到某个指定值，此时杆的伸长是 0.6 in，然后卸载。假设材料是理想弹塑性的，试求该杆的永久形变。（答案：0.509 in）

题 1.51 由表 1-1，使用 SI 系统确定下述材料的比强度和比模量，(a)镍(b)环氧树脂硼复合材料。（答案：(a)镍：比强度 = 3563～8736m，比模量 = 2.41×10^6 m(b)环氧树脂硼：比强度 = 71.8×10^3 m，比模量 = 11.0×10^6 m）

表 1-1　室温下常用工程材料的性质

(68℉或20℃)

材料	比重		杨氏模量		极限应力		线胀系数		泊松比
	lbf/in^3	kN/m^3	$10^6 lbf/in^2$	GPa	$10^3 lbf/in^2$	MPa	$10^{-6}/℉$	$10^{-6}/℃$	
1. 板、棒或块状金属试件									
铝合金	0.0984	27	10~12	70~79	45~80	310~500	13	23	0.33
黄铜	0.307	84	14~16	96~110	43~85	300~590	11	20	0.34
紫铜	0.322	87	16~18	112~120	33~55	230~380	9.5	17	0.33
镍	0.318	87	30	210	45~110	310~760	7.2	13	0.31
钢	0.283	77	28~30	195~210	80~200	550~1400	6.5	12	0.30
钛合金	0.162	44	15~17	105~120	130~140	900~970	4.5~5.5	8~10	0.33
2. 板、棒或块状非金属试件									
混凝土	0.0868	24	3.6	25	4~6	28~41	6	11	
玻璃	0.0955	26	7~12	48~83	10	70	3~6	5~11	0.23
3. 丝状材料(晶须)试件(直径<0.01 in(0.025 mm))									
氧化铝	0.141	38	100~350	690~2410	$2\sim4\times10^3$	13800~27600			
碳化钡	0.090	25	65	450	1×10^3	6900			
玻璃			50	345	$1\sim3\times10^3$	7000~20000			
石墨	0.081	22	142	980	3×10^3	20000			
4. 复合材料(沿载荷方向单向增强)									
环氧树脂硼	0.071	19	31	210	198	1365	2.5	4.5	
S-玻璃纤维增强环氧树脂	0.0766	21	9.6	66.2	275	1900			
5. 其他									
石墨增强环氧树脂	0.054	15	15	104	190	1310			
Kevlar-49 环氧树脂*	0.050	13.7	12.5	86	220	1520			

* Tradename of E. I. DuPontCo.(E. I. DuPont 公司商品名称)

第2章 超静定力系

——拉伸与压缩

2.1 静定力系的定义

如果作用在物体上的所有外力，都能仅依靠静力学平衡方程解出，该力系就是静定的，称为静定力系。第1章问题中的力系均为静定力系。

实例1 如图2-1所示，承受力 P 作用的杆，约束反作用力为 R_1、R_2 和 R_3。因为此例中的力系有三个独立有效的静力平衡方程，足以求解三个未知的约束反作用力，因而力系是静定的。

实例2 桁架 $ABCD$ 承受力 P_1 和 P_2 作用，如图2-2所示，约束反作用力为 R_1、R_2 和 R_3。同样地有三个独立有效的静力平衡方程，可求解三个未知的约束反作用力，因而力系是静定力系。

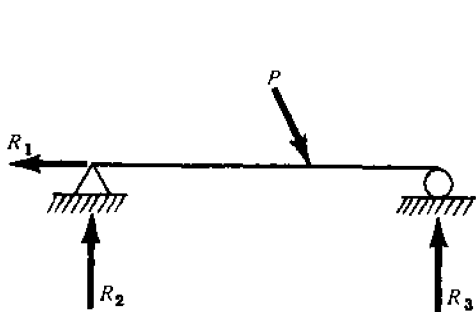


图2-1

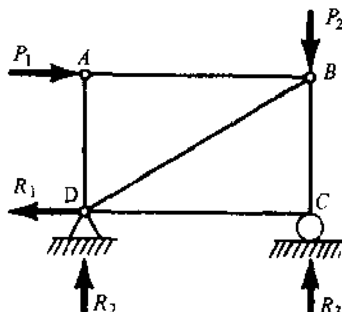


图2-2

上面讲到的两个实例，仅仅涉及到外部的约束反作用力，因为力系被定义为静定的外力系。

2.2 超静定力系的定义

在很多情况下，只依靠静力学平衡方程无法解出作用在物体上的所有力，原因是存在多于平衡方程数目的未知力，这种力系称为超静定力系。

实例3 图2-3所示杆件承受力 P 作用，约束反作用力是 R_1、R_2、R_3 和 R_4。因为有4个约束反作用力而只有3个平衡方程，这样的力系称为一次超静定力系。

实例4 图2-4所示的杆件的外力系是两次超静定的，因为有5个未知的反力，即 R_1、R_2、R_3、R_4 和 M_1。但是只有3个静力平衡方程，从而使约束反作用力不能只依靠静力平衡方程解出。

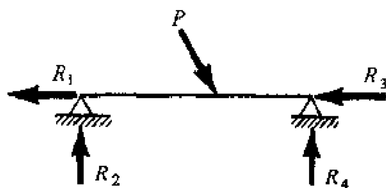


图2-3

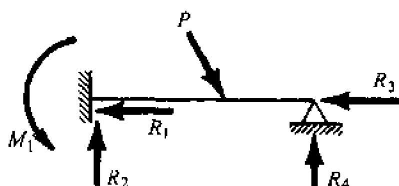


图2-4

2.3　弹性分析方法

此处将要考虑的方法称为位移法，因为该方法要考虑系统的形变或位移。简单地说，这种方法在分析超静定系统时，首先列出与系统有关的、全部静力学平衡方程；然后列出基于结构形变的附加方程去补充上述方程。需指出的是：必须写出含有形变的、足够数量的方程，以使得由静力平衡和形变写出的方程总数等于未知力的数目。见题 2.1～题 2.12。

2.4　极限强度分析(极限设计)

考虑如图 2-5 所示的材料应力-应变曲线，亦即表征完全韧性材料(如结构钢)的应力-应变曲线。这种理想的弹塑性行为是低碳钢的理想化模型，此模型假设：材料中不会出现超过屈服点的应力。

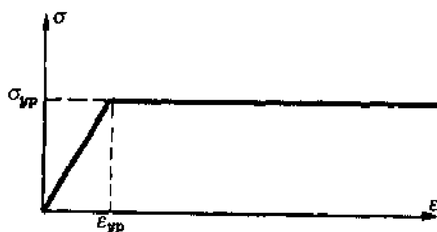


图 2-5

在超静定系统内，任何非弹性的影响都将会改变制约条件。在这些改变后的制约条件下，结构所能承受的载荷通常比基于系统到处均为弹性时的载荷有所增加。相应于结构某些局部或全部区域屈服，并引起结构"崩塌"的载荷称为极限载荷。超静定结构针对极限载荷的设计称为极限设计。相应于此种设计方法的极限载荷除以某个安全系数，用作确定工作载荷。这种意义下的"极限设计"仅适用于超静定结构。此种方法的应用见题 2.13～题 2.17。

2.5　例　　题

2.5.1　弹性分析

在题 2.1～题 2.12 中，假设系统均工作在材料的弹性范围之内。

题 2.1　在医学矫形中，有时要对人的腿或手臂主干骨实施延长术。这种手术经常用于事故接骨复位不准或由于生长发育缺陷而使骨长不当等病例。外科医生实施骨骼延长术的方法之一，首先在干骨的外表面作 1～2 个切口，对干骨作弱化处理，然后将图 2-6 所示结构安装在干骨的外部。这个机构包括一对围绕在腿上的金属环，该金属环用一对平行的黄铜杆连接起来，黄铜杆的端部拧有螺母。在手术的几个月期间内，通过转动铜杆端部的螺母改变金属环之间的距离。一般地，干骨的横截面积为 1.2 in^2，弹性模量为 4.6×10^6 lbf/in^2，长度是 8 in。两根铜杆的总截面积为 0.05 in^2，弹性模量是 13.5×10^6 lbf/in^2，每 in 有 32 个螺纹。现将螺母旋转 1/8 周张拉干骨，求骨内的轴向应力。

解　☞ 考虑一个通过干骨并与之垂直的截面，系统的分离体如图 2-7 所示。其中 P_b 表示干骨的轴力、P_r 表示黄铜棒的轴力。由平衡方程，有

$$P_b = P_r \tag{1}$$

由系统的形变可知：干骨的伸长与黄铜棒的缩短之和应等于螺母在杆上的位移。此位移等于 1/8(1/32)in，因而，可有

$$\frac{P_b(8\text{in})}{(1.2\text{in}^2)(4.6\times10^6\text{lbf/in}^2)}+\frac{P_r(8\text{in})}{(0.05\text{in}^2)(13.5\times10^6\text{lbf/in}^2)}=\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{32}\text{in}\right) \tag{2}$$

求解(1)和(2)式，可有

$$P_b = 588 \text{ lbf}$$

$$\sigma_b = 588/1.2 = 490 \text{ lbf/in}^2$$

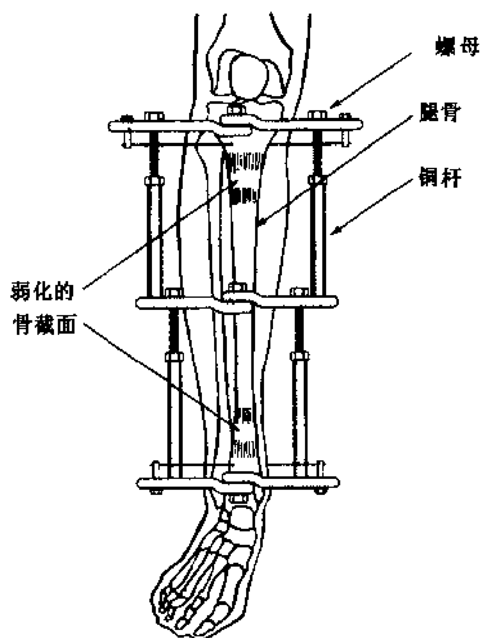


图 2-6

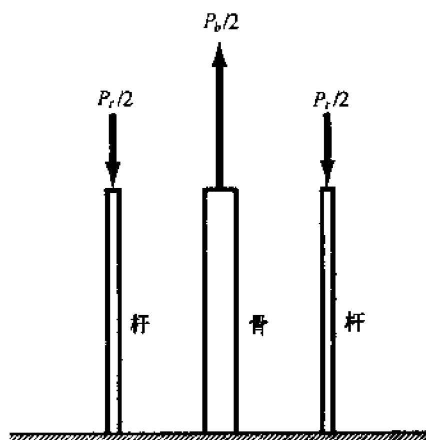


图 2-7

题 2.2 考虑实心铝圆柱与其周围钢管构成的组件，并将之装配在两个无限刚硬的盖板中间，承受中心压力 P 作用，如图 2-8(a)所示。铝圆柱的直径为 3 in，钢管的外径为 3.5 in。钢的 $E = 30\times10^6$ lbf/in²，铝的 $E = 12\times10^6$ lbf/in²，$P = 48000$ lbf。求钢和铝中的应力。

解 ☞ 在距离盖板稍远处，作一个通过组件的水平截面；将组件分为上、下两部分，除去其中的一部分，比如上部分。在这种情况下，必须重新布置除去部分对保留部分的影响，这个影响包含分布在两种材料中的铅垂法向应力。截面下方部分的分离体图如图 2-8(b)所示。其中 σ_s 和 σ_a 分别表示钢及铝中的法应力。

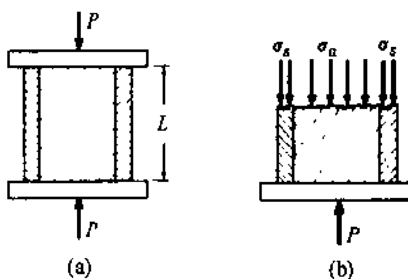


图 2-8

用 P_s 和 P_a 分别表示钢和铝中应力的合力，于是 $P_s = \sigma_s A_s$、$P_a = \sigma_a A_a$；其中 A_s 和 A_a 分别表示钢管和铝圆柱的截面积。对于这个力系，只有一个有效的平衡方程，亦即

$$\sum F_v = P - P_s - P_a = 0$$

有两个未知量，即 P_s 和 P_a；因而问题是超静定的。在这种情况下，必须用分析结构形变的方法补充有效的静力学方程。实际上此种方程已经得到，原因在于无限刚硬的盖板迫使两种金属的形变是相等的。

轴向载荷的形变由公式 $\Delta = PL/AE$ 计算，令钢管和铝圆柱的形变相等，有

$$\frac{P_s L}{A_s E_s} = \frac{P_a L}{A_a E_a}$$

或

$$\frac{P_s L}{(\pi/4)(3.5^2 - 3^2)(30\times10^6)} = \frac{P_a L}{(\pi/4)(3)^2(12\times10^6)}$$

由上式，有 $P_s = 1.23P_a$。将此方程和静力学平衡方程 $P - P_s - P_a = 0$ 联立求解，得到 $P_c = 0.448\text{P}$，$P_s = 0.552\text{P}$。

注意到载荷 $P=48000$ lbf，因而 $P_a=21504$ lbf，$P_s=26496$ lbf。待求的应力可由内力除以相应的截面积得到

$$\sigma_a=\frac{21504}{(\pi/4)(3)^2}=3050(\text{lbf/in}^2),\sigma_s=\frac{26496}{(\pi/4)(3.5^2-3^2)}=1038(\text{lbf/in}^2)$$

题 2.3　三根杆如图 2-9 装配在一起，并承受铅直载荷 P 作用。杆 AB 和杆 BD 是相同的，长度为 L，截面积为 A_1。铅直杆长度也是 L，但截面积是 A_2。各杆的弹性模量相同，且 A、B、C 和 D 处均为铰接。求各杆内的轴力。

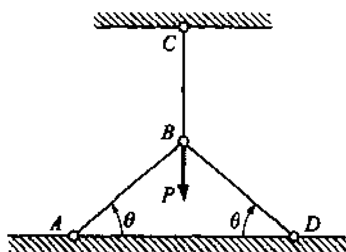


图 2-9

解　首先，画出节点 B 的分离体图。各杆的作用力用 P_1 和 P_2 表示，如图 2-10 所示。铅直杆向平衡方程为

$$\sum F_y=2P_1\sin\theta+P_2-P=0 \qquad (1)$$

假设临时将铰链 B 除去，考查形变。在轴力 P_2 作用下，铅直杆的下垂伸长为

$$\Delta_1=\frac{P_2L}{A_2E} \qquad (2)$$

于是杆的下端(原始位置在 B 处)移动到 B'，如图 2-11 所示。

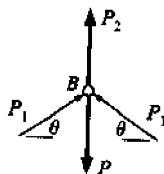


图 2-10

AB 杆中的压力引起的缩短 Δ 如图 2-12 中的 BB''，AB 杆绕 A 点作刚体旋转，于是 B'' 移动到位于 C 点正下方的 B''' 点。由图 2-12 可知，铅直位移 Δ 为

$$BB'''=\frac{P_1L}{A_1E\sin\theta}$$

在系统中重新引入铰链 B，因而 B' 点和 B''' 必须是铰接在一起的，于是

$$\frac{P_2L}{A_2E}=\frac{P_1L}{A_1E\sin\theta} \qquad (3)$$

将方程(3)代入方程(1)，得到

$$P_1=\frac{P\sin\theta}{2\sin^2\theta+\alpha},\qquad P_2=\frac{P\alpha}{2\sin^2\theta+\alpha}$$

其中 $\alpha=A_2/A_1$

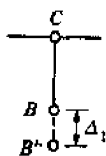


图 2-11

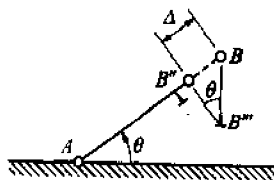


图 2-12

题 2.4　如图 2-13 所示，AB、AC 是两根在 A、B、C 处铰接的相同杆件，长度为 0.5 m，截面积为 A，弹性模量 $E=200$ GPa。杆 DF 截面积为 $2A$，弹性模量 $E=200$ GPa，和 A、D 之间的距离相比，短了 0.8 mm。为使此三根组成一个等腰三角形桁架，节点 A 和 F 被强制联接在一起，求施加外力之前的初始应力。

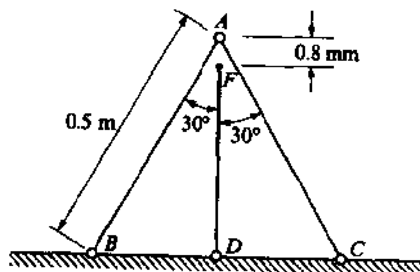


图 2-13

解　在题设条件下，必须强制 A 点向下移动(使 AB、AC 受压缩)，同时强制铅直杆 DF 的 F 点向上移动，以使 A 点和 F 点联接在一起。A 和 F 的联接点不一定在 A 和 F 之间的中点处。将 A 和 F 用铰链联接之后，三个杆组成的系统既使不受外力，但是在每个杆中都会有联接应力。令 AB、

AC 杆中的压力为 P_2、DF 杆中的拉力为 P_1(单位:N),三个杆铰接后,铰链的分离体图如图 2-14 所示。由铰链的平衡方程,有

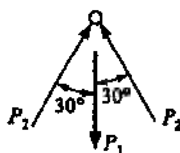


图 2-14

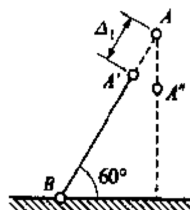


图 2-15

$$2P_2\cos30° - P_1 = 0 \qquad \text{或} \qquad P_1 = \sqrt{3}P_2 \tag{1}$$

因为强制 A 点向下移动,AB 和 AC 杆在各自方向上的缩短 Δ_1 为

$$\Delta_1 = \frac{P_2(500)}{AE}$$

除去铰链后的形变如图 2-15 所示。形变 Δ_1 对应的铅垂量为 $P_2(500)/(AE\cos30°)$。倾斜杆 AB 形变,首先由于受压缩短,A 点移动至 A',然后杆 AB 作为刚体绕 B 点旋转,A' 点移到 A'',实际移动发生在以 B 为圆心的圆弧上,但是由于旋转角很小,可用直线 $A'A''$ 代替圆弧(见图 2-15)。

杆 DF 中的拉力使自由杆的 F 点铅直向上移动至 F',如图 2-16 所示,F' 点将是三根杆重新铰接在一起后 F 点的最终位置。此杆的铅直伸长为

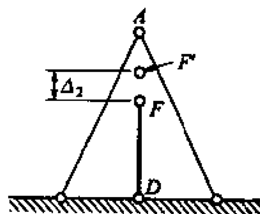


图 2-16

$$\Delta_2 = \frac{P_1(500\cos30°)}{2AE} \tag{2}$$

此处 $2A$ 是杆 DF 的截面积。

为了填补各杆之间的 0.8 mm 缝隙,必须使

$$\frac{P_2(500)}{AE\cos30°} + \frac{P_1(500\cos30°)}{2AE} = 0.8 \text{ mm} \tag{3}$$

将(1)式代入(3)式,有

$$577.4\frac{P_2}{AE} + \frac{(216.5)(\sqrt{3}P_2)}{AE} = 0.8$$

注意到 $E = 200$ GPa,解上述方程得各杆内的法应力为

$$\sigma_1 = \frac{P_1}{2A} = 145.5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{P_2}{A} = 168 \text{ MPa}$$

题 2.5 组合棒与两端支承牢固地联接在一起,其左段是紫铜的,截面积 12 in^2,长度为 12 in,右段是铝的,截面积为 3 in^2,长度为 8 in,如图 2-17(a)所示。在温度为 80 ℉无应力的情况下安装。然后使结构温度下降,在此过程中,右端支承向左移动 0.001 in。求使铝杆中应力不超过 24000 lbf/in^2 时,铝杆的温度。紫铜的 $E_c = 16\times10^6$ lbf/in^2,$\alpha_c = 9.3\times10^{-6}$/℉,铝的 $E_a = 10\times10^6$ lbf/in^2,$\alpha_c = 12.8\times10^{-6}$/℉。

解 ☞ 为简单计,解除组合杆右端支承,杆在降温 ΔT 时自由收缩,根据线膨胀系数的定义,组合杆的总缩短为

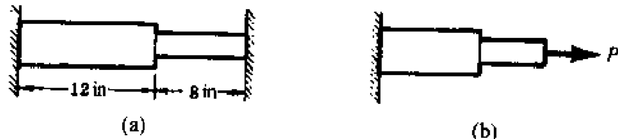


图 2-17

$$(9.3 \times 10^{-6})(12)\Delta T + (12.8 \times 10^{-6})(8)(\Delta T)$$

此式表明：截面形状不影响温度变化引起的长度变化。

尽管组合杆发生了上述的长度变化，但仍然是无应力的，原因在于解除了右端约束而无反力。但是应使用力 P 将右端约束的作用施加在组合杆上，如图 2-17(b)所示。为保持平衡，作用在紫铜杆和铝杆中的内力均为 P。力 P 使

组合杆缩短

$$\frac{P(12)}{12(16 \times 10^6)} + \frac{P(8)}{3(10 \times 10^6)}$$

如果右端支承不发生移动，上述拉力引起的伸长应等于降温引起的缩短。实际上右端支承向左移动了 0.001 in，于是

$$\frac{P(12)}{12(16 \times 10^6)} + \frac{P(8)}{3(10 \times 10^6)}$$
$$= (9.3 \times 10^{-6})(12)\Delta T + (12.8 \times 10^{-6})(8)\Delta T - 0.001$$

铝棒中的应力不应超过 24000 $\mathrm{lbf/in^2}$，注意到应力公式为 $\sigma = P/A$，因而铝棒的内力 $P = A\sigma = 3(24000) = 72000$ lbf。将力 P 的数值代入表示形变关系的上式，解出 $\Delta T = 115$ ℉。亦即温度将从初始的 80 ℉降低 115 ℉，最终温度为 −35 ℉。

题 2.6　截圆锥体的实心棒（见图 2-18）被安置在两个刚性的约束之间限制它长度的变化。整个棒的温度升高 ΔT，假设垂直于纵向对称轴的横截面仍保持平面，并且忽略端部支承的局部效应，求棒中任一点的法应力。

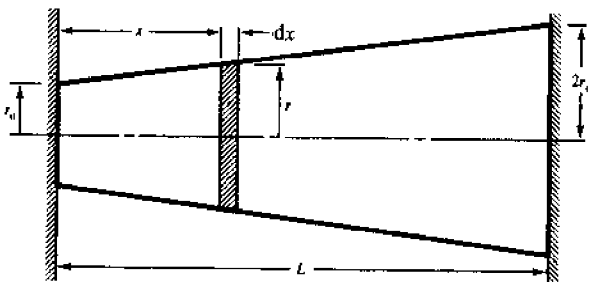


图 2-18

解　我们引入图 2-18 所示的坐标，其中 x 表示薄圆盘到棒左端的距离，$\mathrm{d}x$ 是薄圆盘的厚度。由几何关系可知此圆盘的半径为

$$r = r_0 + \frac{r_0 x}{L}$$

如果暂时将右端的支承除去，整个棒在 x 方向可膨胀 $\alpha(L)(\Delta T)$，其中 α 是材料的线膨胀膨胀系数。

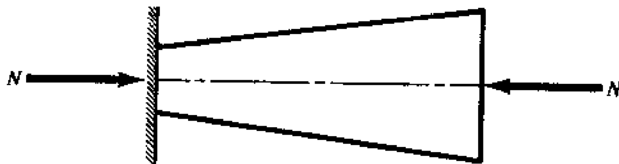


图 2-19

现在考虑作用在棒右端的轴向力 N，如图 2-19 所示，它将棒压缩至它的初始长度 L。因为轴向力是 N（根据平衡方程，在棒的任何截面内均为常数），厚度为 $\mathrm{d}x$ 的圆盘压缩量为（见题 1.1）

$$\frac{N\mathrm{d}x}{AE} = \frac{N(\mathrm{d}x)}{\pi r^2(E)}$$

由于轴力 N 引起棒的全部压缩量可由从 $x = 0$ 到 $x = L$ 的全部圆盘长度变化之和来计算：

$$\int_{x=0}^{x=L}\frac{N(\mathrm{d}x)}{\pi r^2E}=\frac{NL^2}{E\pi r_0^2}\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{(L+x)^2}$$

注意到

$$\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{(L+x)^2}=\frac{1}{2L}$$

并令由于升温引起棒的伸长等于轴向力 N 引起的缩短，即

$$\alpha(L)(\Delta T)=\frac{NL^2}{E\pi r_0^2}\left(\frac{1}{2L}\right)$$

$$N=2\alpha(\Delta T)E\pi r_0^2$$

将轴向力 N 除以任意位置 x 处的横截面积，得到轴向法应力

$$\sigma=\frac{N}{\pi r^2}=\frac{2\alpha(\Delta T)E}{(1+x/L)^2}$$

题 2.7 带孔的钢圆筒包围实心的铜圆柱，并共同承受轴向载荷 50000 lbf 的作用，如图 2-20(a)所示。钢圆筒的横截面积是 3 in^2，铜圆柱的横截面积是 10 in^2。施加载荷之前两者的长度是相等的。如果要求使铜圆柱独自承担全部载荷，试求整个系统应升高的温度。此组件顶部盖板是刚性的。铜的 $E=16\times10^6\ \mathrm{lbf/in^2}$，$\alpha=9.3\times10^{-6}/\mathrm{°F}$，钢的 $E=30\times10^6\ \mathrm{lbf/in^2}$，$\alpha=6.5\times10^{-6}/\mathrm{°F}$。

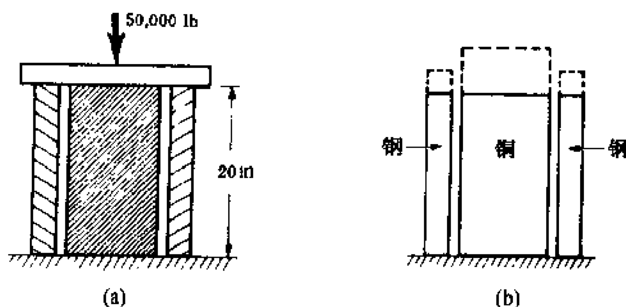


图 2-20

解 ☞ 本题的分析方法之一是：假设暂时将载荷及盖板全部除去，并且允许系统由于温度升高 ΔT 在铅垂方向自由膨胀。在这种情况下，各圆柱上端的位置如图 2-20(b)中虚线所示。

由于铜的线膨胀系数大于钢的线膨胀系数，铜圆柱向上的膨胀要超过钢圆筒。钢圆筒向上的膨胀为 $(6.5\times10^{-6})(20)\Delta T$，铜圆柱向上的膨胀为 $(9.3\times10^{-6})(20)\Delta T$。当然这并非真实的情况，因为尚有 50000 lbf 的载荷没考虑。如果全部载荷均由铜圆柱承担，那么只有铜圆柱受压缩，其压缩量为

$$\Delta_c=\frac{PL}{AE}=\frac{5000(20)}{10(16\times10^6)}$$

本题的条件表明：温度升高 ΔT，并恰好使全部载荷由铜圆柱来承担。因而在上述图形中由虚线表示的铜圆柱膨胀后的长度会由于力的作用有所缩短，铜圆柱的净伸长等于升温伸长减去加载缩短。钢圆筒长度的变化只是由升温引起。因而有

$$(9.3\times10^{-6})(20)\Delta T-\frac{50000(20)}{10(16\times10^6)}=(6.5\times10^{-6})(20)\Delta T$$

可解出

$$\Delta T=110\ \mathrm{°F}$$

题 2.8 刚性横梁 AD 在 A 点处铰接在基础上，同时用铰链将杆 BC 和 DE 均与 AD 联结，如图 2-21(a)所示，整个系统初始不受力，且忽略各杆和梁的自重。令 BC 杆降温 25℃、ED 杆升温 25℃。忽略侧向屈曲的可能性，求杆 BC 和 ED 中的法应力。(杆 BC 是黄铜的，$E=90$ GPa，$\alpha=20\times10^{-6}/℃$；杆 ED 是钢的，$E=200$ GPa，$\alpha=12\times10^{-6}/℃$；杆 BC 横截面积是 500 mm^2，ED 横截面积是 250 mm^2。)

解 ☞ 在图 2-21(b)所示的分离体图中，用 P_{st}和 P_{br}表示沿假设方向作用在梁 AD 上的力。因为梁 AD 作为刚体绕 A 转动(如图 2-21(a)中虚线所示)，应有 $\Delta_{br}/250=\Delta_{st}/600$，此处 Δ_{br}表示 BC 杆的缩短，Δ_{st}表示 ED 杆的伸长。

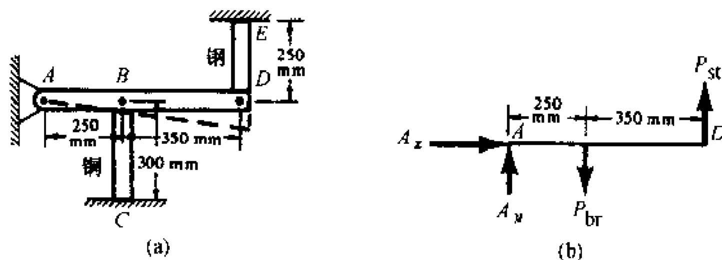


图 2-21

杆 BC 长度的总变化，将由降温引起的缩短及由轴力 P_{br}引起的伸长共同组成，杆 ED 长度的总变化，将由升温引起的伸长及轴力 P_{st}的拉伸共同组成，于是应有

$$\left(\frac{25}{60}\right)\left[(12\times10^{-6})(250)(25)+\frac{P_{st}(250)}{(250)(200\times10^{9}\times10^{-6})}\right]$$
$$=-(20\times10^{-6})(300)(25)+\frac{P_{br}(300)}{(500)(90\times10^{9}\times10^{-6})}$$

或

$$6.66P_{br}-2.08P_{st}=153.0\times10^{3}$$

静力学平衡方程给出

$$\sum M_A=250P_{br}-600P_{st}=0$$

联立解上述方程，得到

$$P_{st}=10.99\ \text{kN},\qquad P_{br}=26.3\ \text{kN}$$

应用公式 $\sigma=P/A$ 计算各杆的应力，有

$$\sigma_{st}=43.9\ \text{MPa},\qquad \sigma_{br}=52.6\ \text{MPa}$$

题 2.9　如图 2-22(a)所示的超静定桁架，施加载荷 P 之前是自由的，求载荷 P 引起的各杆的轴力。杆 AB 和 AD 具有相同的横截面积A_i，AC 杆的横截面积为 A_v，各杆具有相同的弹性模量 E。

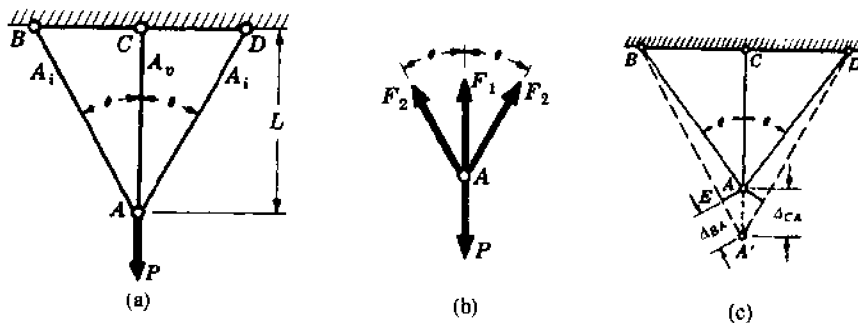


图 2-22

解 ☞ 节点 A 的分离体图如图 2-22(b)所示，其中 F_1 和 F_2 表示铅垂杆和斜杆的轴力(单位：lbf)。根据静力学平衡方程，有

$$\sum F_v=F_1+2F_2\cos\theta-P=0$$

这是惟一的有效平衡方程，根据对称性，两个斜杆的轴力应是相等的。因为上述方程中含有两个未知数，该力系是超静定的，必须考虑系统的形变，得到另一个方程。在 P 力作用下，各杆形变后的位置如图 2-22(c)所示。

因为系统的形变是很小的，系统的基本几何形状可以认为是不变的，$\angle BA'A$ 仍取作 θ。三角形 AEA' 是直角三角形，线段 AE（实际上是半径等于斜杆原长的圆弧）垂直于 BA'。于是，铅直杆的伸长由 AA' 表示，斜杆的伸长由 EA' 表示。由这个小三角形，可得到如下关系：

$$\Delta_{BA} = \Delta_{CA}\cos\theta$$

此处 Δ_{BA}、Δ_{CA} 分别表示斜杆及铅垂杆的伸长。

因为这些杆均承受轴向力，它们的伸长可用公式 $\Delta = PL/AE$ 计算，有

$$\Delta_{BA} = \frac{F_2(L/\cos\theta)}{A_i E}, \quad \Delta_{CA} = \frac{F_1 L}{A_v E}$$

将这些代入上面表示 Δ_{BA}、Δ_{CA} 关系的方程，有

$$\frac{F_2 L}{A_i E\cos\theta} = \frac{F_1 L\cos\theta}{A_v E}, \quad 或 \quad F_2 = F_1\frac{A_i}{A_v}\cos^2\theta$$

将此式代入静力学平衡方程，得到 $F_1 + 2F_1(A_i/A_v)\cos^3\theta = P$，可解出

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2(A_i/A_v)\cos^3\theta} \quad 和 \quad F_2 = \frac{P\cos^2\theta}{(A_v/A_i) + 2\cos^3\theta}$$

题 2.10 两根水平的刚性杆与基础在 A、G 点铰接，并且用刚度为 EA 的两根弹性杆 BD 和 CF 彼此相联，如图 2-23。现令杆 BD 的温度上升 ΔT，求两根铅直杆中的轴力。

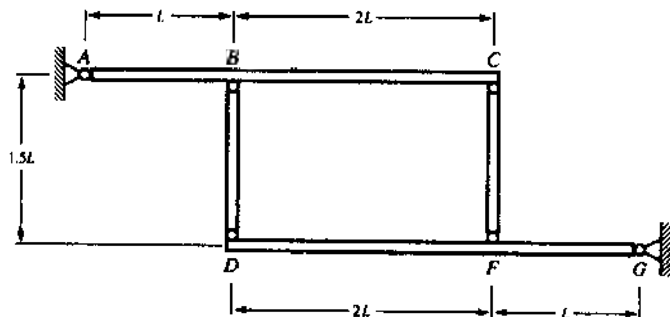


图 2-23

解 ☞ 各构件的分离体图如图 2-24 所示，假设杆 BD 和 CF 的轴力均为拉力，是正的。考虑刚性杆 DG 的平衡，有

$$\sum M_G = -F_2(L) - F_1(3L) = 0, \qquad F_2 + 3F_1 = 0 \tag{1}$$

现在必须考虑系统的形变。为简单计，允许假定：上方的刚性杆 AC 保持水平，而所有的形变均是由下方刚性杆 DG 绕 G 点作刚体转动产生的。杆 DG 形变后的位置如图 2-25 中的虚线所示，铅直杆长度的变化在图中记作 δ_1 和 δ_2。根据几何关系，对于小角度旋转，有

$$\theta = \frac{\delta_1}{3L} = \frac{\delta_2}{L}$$

即

$$\delta_1 = 3\delta_2 \tag{2}$$

杆 BD 长度的增加，一部分由拉力 F_1 产生，另部分由温度升高产生，即

$$\delta_1 = \frac{F_1(1.5L)}{AE} + \alpha(\Delta T)(1.5L) \tag{3}$$

而对杆 CF，长度的增加则是由于拉力 F_2 产生的，有

$$\delta_2 = \frac{F_2(1.5L)}{AE} \tag{4}$$

联立求解方程(1)～(4)，得到

$$F_1 = -\frac{\alpha(\Delta T)AE}{10}, \quad F_2 = -\frac{3\alpha(\Delta T)AE}{10}$$

力 F_1 的负号表明杆 BD 是受压缩的，杆 CF 是受拉伸的

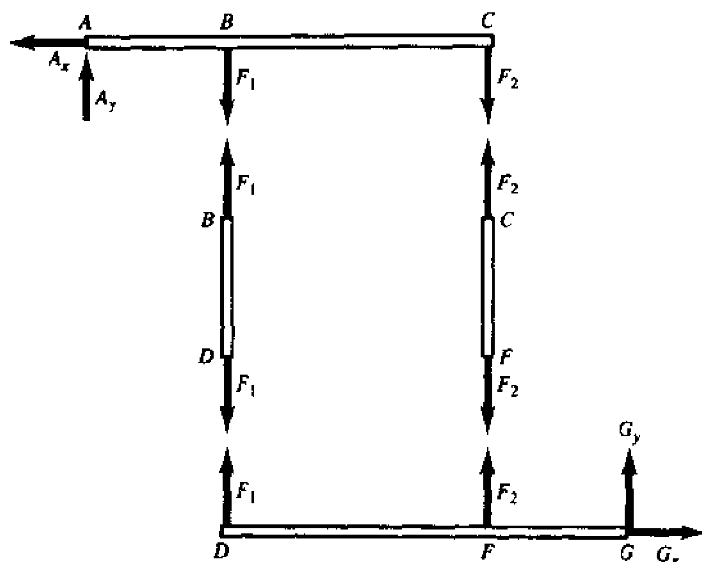


图 2-24

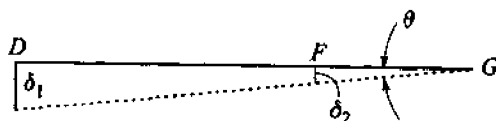


图 2-25

题 2.11　平面桁架由在 A、B 和 H 处铰接的两根杆 AB 和 BH 及水平杆 GD 组成，如图 2-26。由于制造误差的原因，杆 GD 较 $2L$ 略短些。所有的杆都具有相同的刚度 AE。现用机械作用将空隙△闭合（B、G 两点相联）后，求杆 GD 中的轴力。

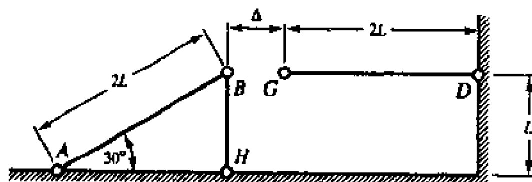


图 2-26

解　☞ 首先考虑作用在 B 处的力，特别注意要将水平力 F 施加在节点 B 上，分离体图如图 2-27 所示。水平方向的平衡方程，有

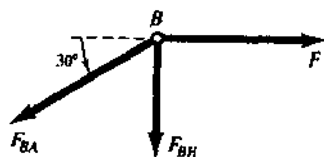


图 2-27

$$\sum F_x = F - F_{BA}\cos 30° = 0$$

可解出

$$F_{BA} = \frac{F}{\cos 30°} \tag{1}$$

其次，考虑节点 B 的位移。杆 AB 是受拉伸的，伸长量为 Δ_{BA}，如图 2-28，有

$$\Delta_{BA} = \frac{F_{BA}(2L)}{AE} \tag{2}$$

然后杆 AB 作为刚体绕点 A 转动，经一段圆弧由 B'' 移动到 B'。对于小形变可近似地将圆弧看作直线 $B''B'$。BB'' 和 $B''B'$ 的水平分量分别用 Δ_3 和 Δ_2 表示。由几何关系，可有

$$\Delta_2 = \Delta_1\sin 30° = \Delta_{BA}(\tan 30°)(\sin 30°) \tag{3}$$

$$\Delta_3 = \Delta_{BA}\cos 30^\circ \tag{4}$$

杆 GD 承受与 F 等值反向的拉力，如图 2-29 所示，它的伸长为

$$\frac{F(2L)}{AE} \tag{5}$$

将 B 点和 G 点联接在一起，填补空隙 Δ，有

$$\Delta_2 + \Delta_3 + \frac{F(2L)}{AE} = \Delta \tag{6}$$

由方程(1)～(6)，可解出填补空隙 Δ 时在杆 GD 中的轴力

$$F = \frac{AE\Delta}{2L(1+\tan^2 30^\circ)} = \frac{2AE\Delta}{5L}$$

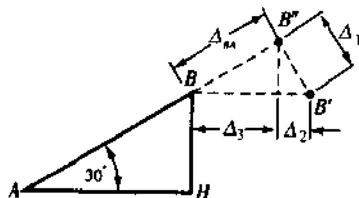


图 2-28

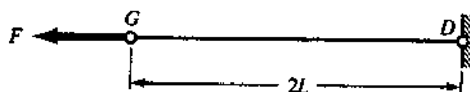


图 2-29

题 2.12　刚性水平横梁 ABC 支承在铅直的弹性柱上，并限制 A 点产生水平位移，如图 2-30。铅垂力作用在 C 处。各立柱的拉压刚度已标注在图上，长度均为 L。求每根立柱中的轴力。

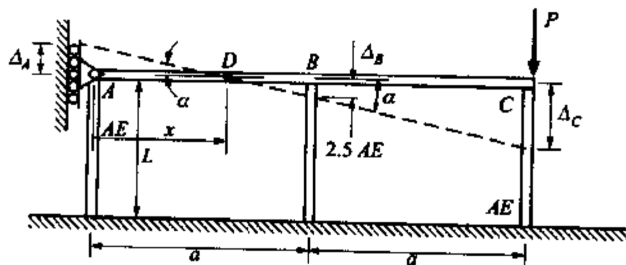


图 2-30

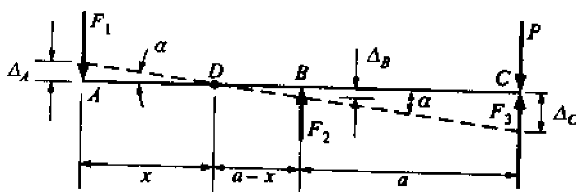


图 2-31

解　☞ 由于载荷 P 的作用，初始水平的刚性杆 ABC 将位移至图 2-31 中虚线表示的位置，亦即绕某个点 D(位置尚属未知)作刚体转动 α 角。

图 2-31 表示刚性杆 ABC 的分离体，其中 F_1、F_2 和 F_3 表示立柱作用在杆 ABC 上的力，每个立柱长度的变化用 Δ 表示。由形变系统的几何关系，可有

$$\alpha = \frac{\Delta_A}{x} = \frac{(F_1 L/AE)}{x} = \frac{(F_2/2.5AE)}{a-x} \tag{1}$$

对于这个平行力系有两个静力学平衡方程。第一个方程为

$$\sum M_C = F_1(2a) - F_2(a) = 0$$

解出

$$F_1 = \frac{F_2}{2} \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式，可有

$$\frac{(F_2L/2AE)}{x} = \frac{(F_2L/2.5AE)}{a-x}$$

解出

$$x = \left(\frac{5}{9}\right)a \tag{3}$$

第二个平衡方程为

$$\sum M_B = -F_3a - Pa - F_1a = 0$$

解出

$$F_3 = P - F_1 \tag{4}$$

立柱 C 和 A 的长度变化为

$$\Delta_c = \frac{F_3L}{AE}, \qquad \Delta_A = \frac{F_1L}{AE} \tag{5}$$

由图 2-31 的几何关系有

$$\frac{\Delta_c}{a+(a-x)} = \frac{\Delta_A}{x}$$

与(3)式联立，可解出

$$\Delta_c = (13/5)\Delta_A \tag{6}$$

将(5)式代入(6)式*，有

$$F_3 = (13/5)F_1 \tag{7}$$

联立求解(2)、(4)和(7)式，得

$$F_1 = (5/18)P, \quad F_2 = (5/9)P, \quad F_3 = (13/18)P \tag{8}$$

2.5.2　极限强度(极限设计)

在以下的问题中，材料的弹塑性行为均假设服从图 2-32 所示的理想应力-应变曲线。每个问题中所确定的极限载荷，均为最大的可能载荷。对每个系统施加此最大可能载荷时，均能提供典型的应力-应变曲线，材料具有无限的塑性，亦即应力-应变曲线的平直阶段可向右无限延伸。

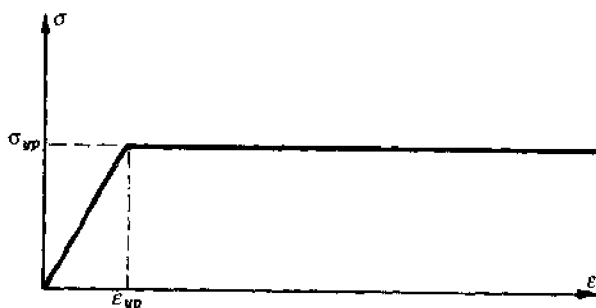


图 2-32

题 2.13　考虑如图 2-33(a)所示的、由三根铅直杆组成的系统。两侧的铅直杆与中间杆距离相等，载荷 P 施加在水平刚性构件上。用极限设计法求极限载荷 P。各杆的弹性模量 E 和截面积 A 均相等。

解　☞ 我们分析载荷从零值增加，亦即缓慢施加载荷的作用。平衡方程有

* 原书此处以下有错，此结果由译者解出。——译者注

$$2P_1 + P_2 = P \tag{1}$$

式中 P_1 外侧杆件的内力，P_2 表示中间杆的内力（见图 2-33(b)）。因为水平构件是刚性的，每个外侧杆的伸长必须等于中间杆的伸长，即

$$\frac{P_1 L}{AE} = \frac{P_2(3L/4)}{AE} \tag{2}$$

或

$$P_1 = 3P_2/4 \tag{3}$$

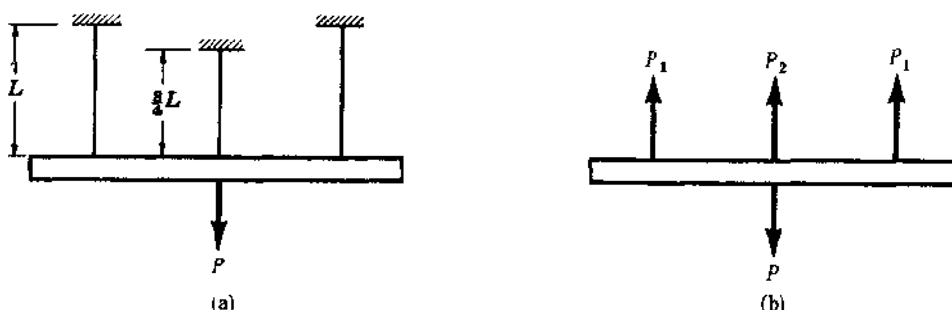


图 2-33

将(3)式代入(1)式，解出

$$P_2 = 2P/5, \qquad P_1 = 3P/10 \tag{4}$$

当 $P_2 - \sigma_{yp}A$ 时，系统开始屈服，此时

$$P_{yp} = 5\sigma_{yp}A/2$$

由中间杆屈服时开始，系统变作由仅有的两根外侧杆件（尚处于弹性）和中间杆件提供的常力 $\sigma_{yp}A$ 共同支承。载荷 P 的数值一直可增加到每个外侧杆件开始屈服即 $P_2 = \sigma_{yp}A$ 为止。因而极限载荷是

$$P_u = 2P_1 + P_2 = 2\sigma_{yp}A + \sigma_{yp}A = 3\sigma_{yp}A$$

需要指出的是：形变方程(2)对于确定极限载荷是无用的。

题 2.14 对于三根等截面杆件的情况，重新考虑题 2.9。确定系统的极限承载能力。

解 ☞ 若 $A_i = A_v = A$，由题 2.9 的(1)式可知：铅垂杆的内力 F_1 大于倾斜杆的内力 F_2，因而，当 P 增加时，中间杆首先进入非弹性阶段，它的刚度（AE 的有效值）降低。载荷 P 的任何附加的增加都不会引起 F_1 的继续增加，它将保持在极限值 $F_1^* = \sigma_{yp}A$。中间的杆可用铅直向下的常量力 F_1^* 代替，系统蜕变为静定的，它由两根外侧的杆组成，承受载荷为 $P - F_1^*$。此时可不考虑系统的形变，只需要根据平衡关系，有

$$P = F_1^* + 2F_2\cos\theta \tag{1}$$

当载荷 P 继续不断增加时，外侧杆的应力也将达到屈服点。每个外侧杆的内力变为

$$F_2^* = \sigma_{yp}A \tag{2}$$

因而极限载荷相应于 $F_1^* = F_2^* = \sigma_{yp}A$ 的情况，由(1)式可知这个载荷是

$$P_u = \sigma_{yp}A(1 + 2\cos\theta) \tag{3}$$

将此极限载荷除以某个安全系数可以得到工作载荷。

题 2.15 如若题 2.9 中的三杆系统需承担的载荷为 $P = 200$ kN。试按如下两种设计方法比较所需要的杆重。(a)峰值应力恰好达到屈服点(b)极限载荷分析。假定所有的杆件均有相同的横截面，$\theta = 45°$，材料的屈服点为 250 MPa。

解 ☞ (a)根据题 2.9 中的弹性分析结果，铅直杆件的内力为

$$F_1 = \frac{2P}{2+\sqrt{2}} = 117\ \text{kN}$$

如果此杆中应力等于屈服点的应力，可由 $F_1 = \sigma_{yp}A_1$ 计算横截面积，即

$$117 \times 10^3 = A_1(250)，\text{或 } A_1 = 468\ \text{mm}^2$$

(b)如果使用题 2.14 的极限分析结果，所有三根杆件的内力都是相等的，均等于屈服点应力，由题 2.14(3)式，可得截面积为

$$200 \times 10^3 = 250A_2[1 + 2(0.707)],\text{或 } A_2 = 331\ \text{mm}^2$$

极限分析的结果与弹性分析结果比较，可节约 29% 的截面积，亦即节约 29% 的重量。

题 2.16 图 2-34 所示的桁架由三根铰接的杆 AD、BD、CD 组成，各杆的材料和截面积均相同，各杆的极限承载能力均为 30 kN。求在 D 点可施加的铅垂极限载荷 P_u。

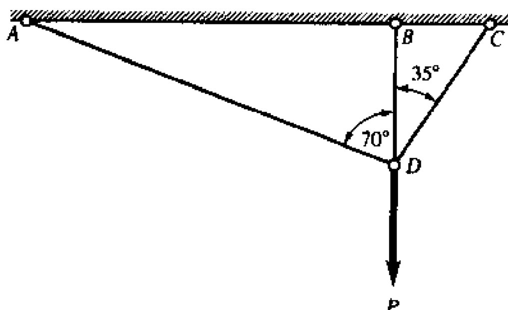


图 2-34

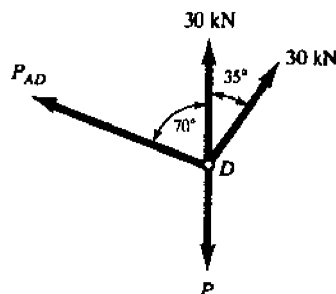


图 2-35

解 ☞ 假定杆 BD 和 CD 已经屈服，节点 D 的平衡条件(如图 2-35)给出

$$\sum F_x = 30\sin 35^\circ - P_{AD}\sin 70^\circ = 0$$

解出

$$P_{AD} = 18.3\ \text{kN}$$

注意到 P_{AD} 低于 30 kN，所以杆 AD 并没有屈服。铅垂方向的平衡条件给出

$$\sum F_y = -P_u + 18.3\cos 70^\circ + 30 + 30\cos 35^\circ = 0$$

解出

$$P_u = 60.9\ \text{kN}$$

题 2.17 如图 2-36(a)所示，刚性横梁 AB 和 4 根支承杆组成的系统。各支承杆具有相同的截面积和材料。求系统所能承受的极限载荷 P_u。

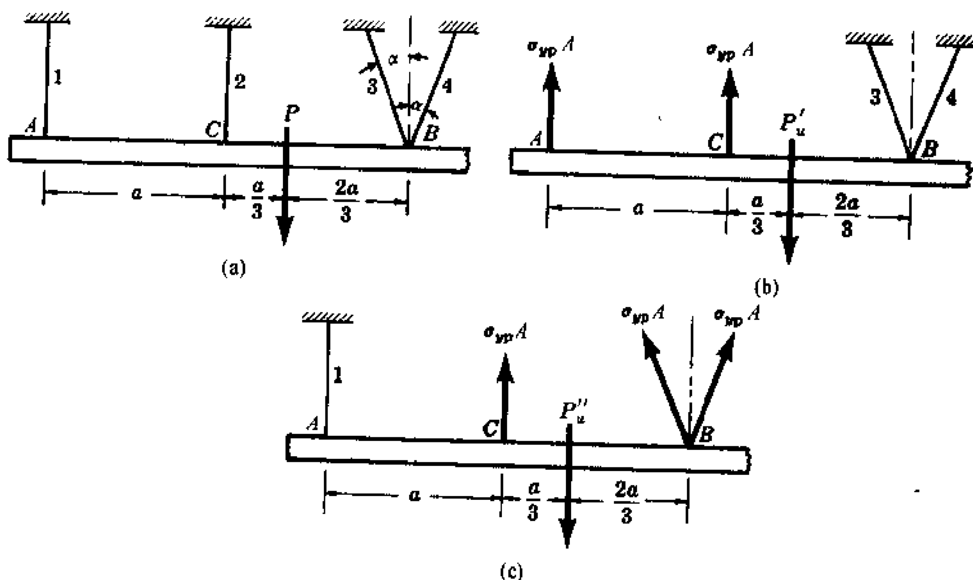


图 2-36

解 ☞ 因为横梁 AB 是刚性的，显然，在足够大的载荷作用下，横梁 AB 会绕 A 或 B 作刚体转动(极限载荷意味着在杆 2 中必然产生塑性形变，因而不需要考虑 AB 绕 C 转动)，相应于这两种情况确定两个可能的极限载荷，选择其中较小者即为真正的极限载荷。首先假定杆 1 和杆 2 发生屈服，此时它们的影响用两个常数力 $\sigma_{yp}A$ 来表示，如图 2-36(b)，杆 3 和杆 4 处于弹性，但内力尚属未知。但是，也并不需要确定杆 3 和杆 4 的内力，极限载荷 P'_u 可由关于 B 点的合力矩得到

$$P'_u(2a/3) - \sigma_{yp}A(a) - \sigma_{yp}A(2a) = 0$$

解出

$$P'_u = 4.5\sigma_{yp}A$$

其次，考虑杆 2、杆 3 和杆 4 屈服，如图 2-36(c)所示。杆 1 尚处于弹性，各力关于 A 点取矩：

$$(\sigma_{yp}A\cos\alpha)4a + \sigma_{yp}Aa - P''_u 4a/3 = 0$$

解出

$$P''_u = 3\sigma_{yp}A(1 + 4\cos\alpha)/4$$

考查 P'_u 和 P''_u 可知：无论角 α 取何值，P''_u 总是两者中较小者，因而 P''_u 即为极限载荷。当载荷达到这一数值时，系统蜕变为“机构”，刚性横梁 AB 要绕 A 点转动。此时，杆 1 的承载能力尚未得到充分的发挥。

2.6 习　题

题 2.18 两个直杆连接在一起并被限定在支撑之内，如图 2-37。左段杆是铜的，$E = 90$ GPa，$\alpha = 20 \times 10^{-6}$/℃，右段杆是铝的，$E = 70$ GPa，$\alpha = 25 \times 10^{-6}$/℃。铜杆的横截面积是 500 mm^2，铝杆的横截面积是 75 mm^2。假定系统无初应力，然后降温 20℃。

(a) 如果支撑是未屈服的，求各杆件的法应力。

(b) 如果右端支撑屈服，向右移动 0.1 mm，求各杆件的法应力。

(忽略各杆的重量)(答案：(a)$\sigma_{Cu} = 41$ MPa，$\sigma_{Al} = 27.33$ MPa；(b)$\sigma_{Cu} = 28.4$ MPa $\sigma_{Al} = 19$ MPa)

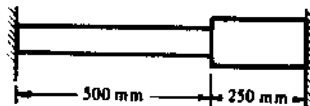


图 2-37

题 2.19 如图 2-38 所示，桁架由杆 AD、AC、BC、BD 及第五根杆 CD 在 A、B、C、D 处铰接而成。此系统承受等值、反向的力 P 作用，所有的杆件均具有相同的材料和截面积。求节点 A、B 之间距离的减少。(答案：$(1+\sqrt{2})\sqrt{2}PL/AE$)

题 2.20 仍如图 2-38 所示桁架。替代两个力 P，整个系统温度升高 ΔT。依据系统的几何形状及材料的线膨胀系数，确定节点 A、B 之间距离的缩短。(答案：$\sqrt{2}L\alpha(\Delta T)$)

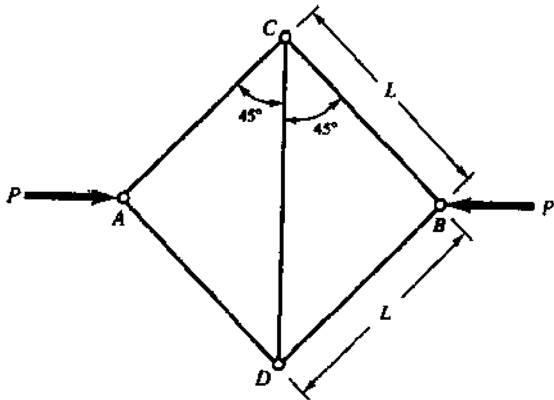


图 2-38

题 2.21 仍如题 2.6。如果截圆锥杆的细端直径是 100 mm，长度为 1 m。此杆是钢的 $E = 200$ GPa，线膨胀系数 $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/℃。试求降温 20℃ 时杆中的最大轴向应力。(答案：96 MPa)

题 2.22 复合棒是由两块冷轧钢板及其中间的紫铜带组成的，此组件的两端有完全刚性的盖板，轴向拉力 P

通过刚性盖板施加在复合棒上，如图 2-39 所示。棒的宽度是 4 in，钢板的厚度是 1/4 in，紫铜的厚度是 3/4 in。试求允许施加的最大载荷。（钢的极限强度是 80000 lbf/in^2，$E = 12\times10^6\ lbf/in^2$；紫铜的极限强度是 30000 lbf/in^2，$E = 13\times10^6\ lbf/in^2$）。（答案 $P = 76200$ lbf）

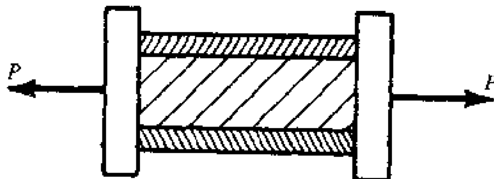


图 2-39

题 2.23　铝制空心圆筒包围钢圆柱，如图 2-40 所示。通过完全刚性的盖板施加轴向载荷 200 kN。如果在加载之前，铝筒较钢柱长 0.25 mm，当降温 20 K 并同时有载荷作用时。求铝筒和钢柱中的法应力。钢：$E = 200$ GPa，$\alpha = 12\times10^{-6}/℃$；铝：$E = 70$ GPa，$\alpha = 25\times10^{-6}/℃$。（答案：$\sigma_{st} = 9$ MPa　$\sigma_{Al} = 15.5$ MPa）

题 2.24　刚性的水平横梁 AB 悬挂在三根铅垂的细杆上，如图 2-41，承受载荷 24000 lbf。忽略横梁 AB 的重量，并且在加载之前系统是自由的。加载之后，三根细杆温度升高 25℉。为保持 AB 水平，试求加载位置 x 及各杆中的应力。（钢 $E = 30\times10^6\ lbf/in^2$，$\alpha = 6.5\times10^{-6}/℉$；黄铜 $E = 14\times10^6\ lbf/in^2$，$\alpha = 10.4\times10^{-6}/℉$；紫铜 $E = 17\times10^6\ lbf/in^2$，$\alpha = 9.3\times10^{-6}/℉$。忽略各细杆侧向屈曲的可能。）（答案：$\sigma_{st} = 32300 lbf/in^2$，$\sigma_{br} = 22400\ lbf/in^2$，$\sigma_{co} = 21400\ lbf/in^2$，$x = 0.273$ ft）

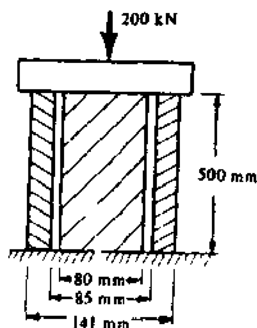


图 2-40

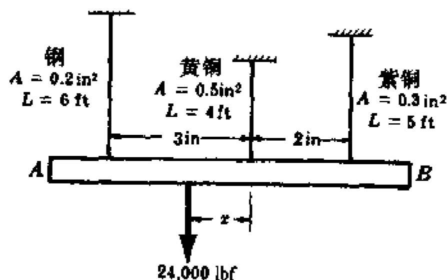


图 2-41

题 2.25　两块刚性端板用三个水平杆件相联组成一个系统，如图 2-42 所示。由于制造误差，中间的杆件②较正常尺寸短 0.0005 L。所有的杆件都具有相同的截面积，材料均为钢，$E = 210$ GPa，如果用机械的方法将杆②和左端板连接在一起填补缝隙 Δ，求各杆的应力。（答案：$\sigma_1 = -35$ MPa，$\sigma_2 = 70$ MPa）

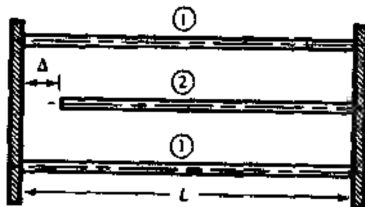


图 2-42

题 2.26　由材料及几何形状均不相同的三个杆组成的结构系统，如图 2-43 所示。杆①是铝的，杆②是冷滚压铜的，杆③是回火钢的。三个杆的材料性能及尺寸均标注在图中。系统的初始状态是自由的，然后右端支承向右移动 3 mm，左端支承保持不动。试求各杆中的应力。（答案：$\sigma_1 = 223$ MPa，$\sigma_2 = 178$ MPa，$\sigma_3 = 446$ MPa）

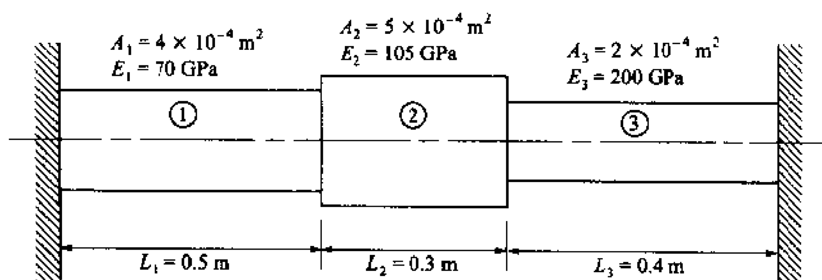


图 2-43

题 2.27 刚性杆 AC 在 A 点铰接在基础上，并与杆 BD 和杆 CE 相联，如图 2-44 所示。杆 AC 的重量是 50 kN，其他两杆的重量均可忽略不计。现将杆 BD 和 CE 温度升高 35℃，试求此两杆的应力。(DB 杆是铜的，E = 90 GPa，$\alpha = 18 \times 10^{-6}$/℃，截面积 A = 1000 mm²；CE 是钢的，E = 200 GPa，$\alpha = 12 \times 10^{-6}$/℃，截面积 A = 500 mm²。忽略任何侧向屈服的可能性。)(答案：σ_{st} = 72 MPa，σ_{Cu} = −21.7 MPa)

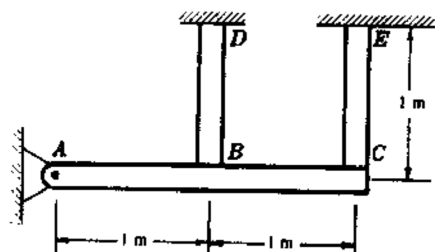


图 2-44

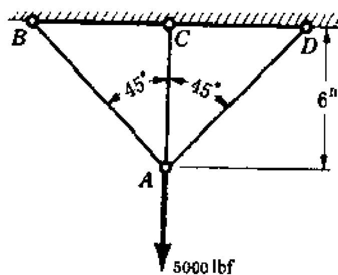


图 2-45

题 2.28 如图 2-45 所示，三根杆组成的桁架，承受 5000 lbf 铅直载荷。在加载之前各杆均是自由的，然后载荷是缓慢加上去的，与此同时三根杆的温度降低了 15℉。试计算各杆中的应力。(两侧杆是黄铜的，截面积为 0.4 in²，$E = 13 \times 10^6$ lbf/in²，$\alpha = 10.4 \times 10^{-6}$/℉；中间杆是钢的，截面积为 0.3 in²，$E = 30 \times 10^6$ lbf/in²，$\alpha = 6.3 \times 10^{-6}$/℉。)(答案：$\sigma_{br}$ = 3550 lbf/in²，σ_{st} = 10000 lbf/in²)

题 2.29 桁架由三根铰接的杆件 AD、BD 和 CD 组成，如图 2-46 所示。铅直载荷 F = 8 kN 作用在 D 处，杆①和杆③的截面积各为 $200\sqrt{5}$ mm²，杆②的截面积为 400 mm²，长度 L = 3 m；弹性模量 E_1 = 200 GPa，E_2 = 80 GPa，E_3 = 100 GPa。试求节点 D 的水平和铅直位移分量及杆②中的轴力。(答案：−0.136 mm，−0.204 mm，2.182 kN)

题 2.30 如图 2-47 所示，刚性横梁 AD 在 A 处铰接，在 D 和 B 处分别由钢杆和线性弹簧悬挂。横梁 AD 在 C 处受铅直载荷 30 kN 作用，求点 D 的铅直位移。(答案：0.8 mm)

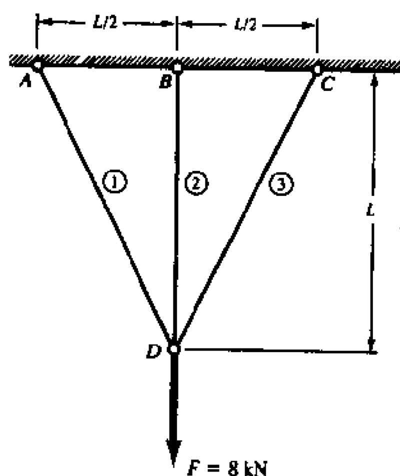


图 2-46

题 2.31 刚性曲杆 ADB 和两个弹性杆件 OA 和 OB 相联，如图 2-48。为了增加此系统的强度，拟将曲杆 ADB 的中点 D 与杆 OC 相联。但是由于加工制造误差使 OC 较正常尺寸短了 1.8 mm。如果使用机械的方法，强行将 C 点与 D 点相联，试求在三根杆件(OA、OB、OC)中的应力。OA、OB 杆的截面积是 OC 杆截面积的 3 倍，各杆的弹性模量均为 E = 200 GPa。(答案：OA、OB 杆应力 43.6 MPa，OC 杆应力 75.5 MPa)

题 2.32 如图 2-49 所示，五根杆组成一个桁架。点 A 和点 C 有间隙 Δ，将此两点强制联结之后试求各杆的

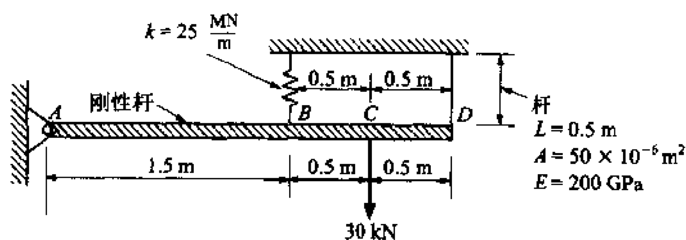


图 2-47

内力。设所有的杆件具有相同的横截面积。

(答案：$F_1 = F_2 = F_3 = \frac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta AE}{L}$，$F_4 = F_5 = -\frac{1}{2+3\sqrt{3}} \cdot \frac{\Delta AE}{L}$)

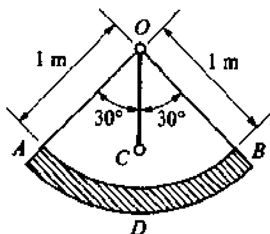


图 2-48

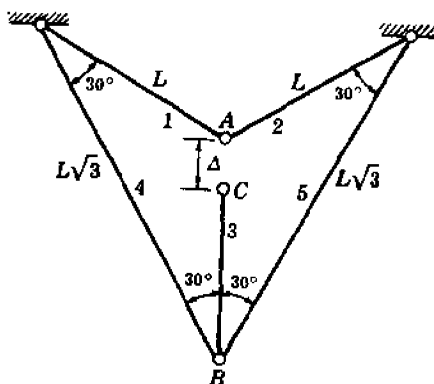


图 2-49

题 2.33　刚性横梁 AB 由四根杆悬挂，如图 2-50 所示。各杆的截面均为圆形的，直径为 50 mm，屈服点为 300 MPa。试用极限设计确定横梁 AB 的最大重量。设横梁 AB 的重量沿长度是均匀分布的。(答案：1.38 MN)

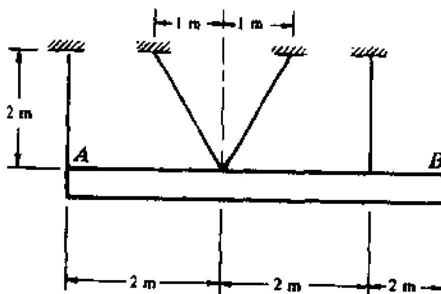


图 2-50

第 3 章　薄壁压力容器

在第 1 及第 2 章中，我们研究了作用在杆中的均布法应力的各种情况，均匀分布法应力的另一种应用情况发生在薄壁压力容器的近似分析中，如圆柱形的、球形的、锥形的壳体承受内部或外部气体或液体压力等情况。在本章中我们将只研究薄壁旋转壳，并限于发生轴对称形变的简单情况。

3.1　应力特点

如图 3-1(a)所示的旋转壳是由一个平面曲线(子午线)绕位于曲线平面内轴线旋转面成的，子午线(经线)的曲率半径用 r_1 表示，曲率半径沿子午线是变化的。曲率半径是 r_1 用垂直于壳体、并分别通过 B 点和 C 点的两条线定义的，如图 3-1(b)。另一个变量 r_2 表示在垂直于子午线方向上壳体表面的曲率半径。曲率半径 r_2 是用两条垂直于壳体、并分别通过 A 点和 B 点的两条线定义的，如图 3-1(b)。与 r_2 相对应的曲率中心必定在壳的对称轴上，尽管与 r_1 相对应的曲率中心通常不在对称轴上。沿壳体曲面法线方向作用的内部压力 p 将引起经向应力 σ_ϕ 和环(纬)向应力 σ_θ，如图所示。这些应力是彼此垂直的，并且作用在壳壁的平面内。

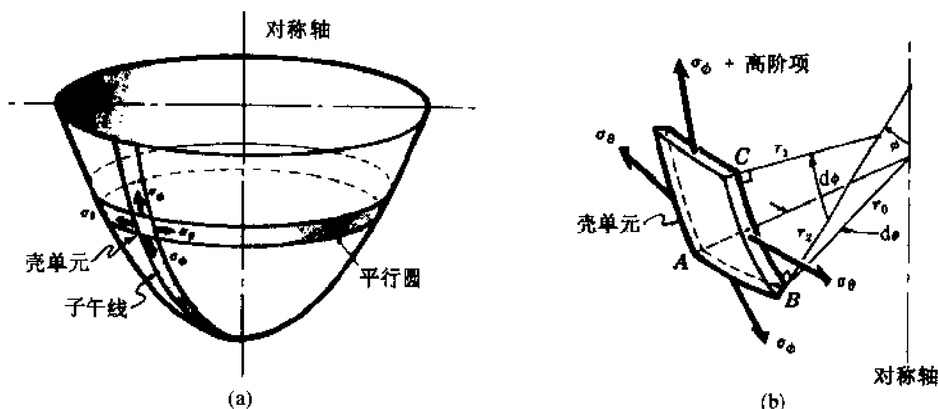


图 3-1

在题 3.15 中以上各量将表明

$$\frac{\sigma_\phi}{r_1}+\frac{\sigma_\theta}{r_2}=\frac{p}{h}$$

其中 h 表示壳壁厚。正如在题 3.15 中指出的，第二个方程可由考虑在某个平行圆上方整个壳体的铅直方向平衡得到。导出上述方程时假设应力 σ_ϕ 和 σ_θ 沿壁厚是均匀分布的。

这种分析方法应用于柱壳，见题 3.1～题 3.6；应用于球壳，见题 3.7～题 3.11、题 3.16 和题 3.17；应用于锥壳，见题 3.14；应用于环壳，见题 3.18。

3.2　限制条件

壁厚与任意一个曲率半径(r_1 或 r_2——译者注)之比，不应超过近似值 0.1。此外，在结构中不允许有间断点。此处的简化处理方法，无法考虑如图 3-2 中的圆柱壳的加强筋环，也无法给出圆柱壳压力容器端封板附近精确的应力和形变。尽管如此，分析结果在某些设计中还是能满足需要的。

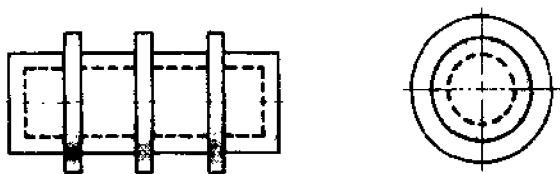


图 3-2

下面研究的问题均与作用在旋转壳上的均匀压力引起的应力有关,如果将压力的方向颠倒,即换为外部压力作用在容器上,各种应力的公式仍将是正确的。然而,此处要指出:一些超出本书范围的附加问题今后也应考虑,不仅仅研究应力分布问题,还要研究本质完全不同的、壳体受压屈曲载荷问题。屈曲或称为稳定失效甚至在峰值应力远低于材料最大许可应力的情况下也可能发生。

3.3 应　用

液体、气体储罐或容器,水管,锅炉,潜艇外壳以及某些飞机的零件都是薄壁压力容器的常见例子。

3.4 例　题

题 3.1　考虑一个两端带有端封板的薄壁圆柱形容器,该容器承受内压 p,厚度为 h,内半径为 r,忽略端封板的约束效应,计算由内压引起的纵向(子午线向)和环向(纬线向)应力。

解　☞ 为了确定环向应力 σ_c,我们考虑自容器中取出的、长度为 L 的圆柱壳段,该壳段的一半的分离图如图 3-3(a)所示。需指出,用这种方法将壳体切开,原内部作用的 σ_c 现在变成分离体的外力。图 3-3(b)说明作用在一个横截面上的力,径向压力的水平分量由于关于铅直中线的对称性而左右彼此抵消。铅直方向的平衡方程为

$$\sum F_v = -2\sigma_c hL + \int_0^{\pi} pr(\mathrm{d}\theta)(\sin\theta)L = 0$$

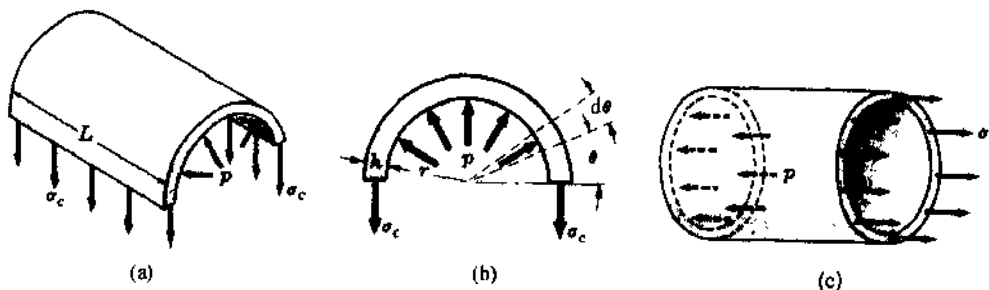


图 3-3

积分后得到

$$2\sigma_c hL = -prL[\cos\theta]_0^{\pi}\quad 或\quad \sigma_c = \frac{pr}{h}$$

根据此式要指出的是:由内压形成的铅垂方向合力可以用内压 p 作用的水平投影面与内压 p 乘积得到。

为了确定纵向应力 σ_l,作一个垂直于圆柱壳轴线的横截面,圆柱壳保留部分的分离体图如图 3-3(c)所示。纵向的平衡方程为

$$\sum F_h = -p\pi r^2 + 2\pi rh\sigma_l = 0,\quad 解出\quad \sigma_l = \frac{pr}{2h}$$

由此可知，环向应力是纵向应力的 2 倍，这些应力公式在紧靠近端封板处是不精确的。

题 3.2　在加利福尼亚的帕萨迪那喷气发动机实验室，一台空间模拟器是长 85 ft、直径为 27 ft 的圆柱形容器。它是由冷轧不锈钢制成的，材料的比例极限是 16500 lbf/in²。燃烧室的最小操作压力是 10^{-6} Totr(1 Totr 等于 1/760 atm)，正常运转时的空气压力近似为 14.7 lbf/in²。试确定此容器的壁厚，以使工作应力不超过比例极限除以安全系数 2.5 得到的许可应力。计算时不考虑外部压力引起的屈曲可能性，也不考虑试件与模拟器连接点处强化载荷的影响。

解 ☞ 由题 3.1 可知，起控制作用的应力是环向应力 $\sigma_c = pr/h$，设计中使用的压力基本上就是作用在壳体外部的空气压力 $p = 14.7$ lbf/in²，因为 10^{-6}torr* 的内压和 p 相比可略去不计，于是有

$$\frac{16500}{2.5} = \frac{14.7(13.5)(12)}{h}, \quad 解出\ h = 0.036\ \text{in}$$

题 3.3　由不锈钢制成的储藏葡萄酒的铅直圆柱形容器，高度为 25 ft，半径为 5 ft，充满深度为 20 ft 的葡萄酒。在液体自由表面 H_0 的上方 5 ft 内充满压力 $p_0 = 12$ lbf/in² 的惰性气体。如果钢的许可应力是 28000 lbf/in²，试求容器的壁厚。(设葡萄酒的比重是 62.4 lbf/ft³。)

解 ☞ 如果在酒的表面上方，没有气体的压力，那么在液体自由表面以下，深度 y 处的液体压力(向任意方向)$p_0 = \gamma y$，此处 γ 是酒的比重。如果我们考虑深度 y 处 1 ft² 水平截面上的液体压力，显然它将等于此截面上的酒液柱的重量除 1 ft² 的面积。在容器的底部($y = H$)的总压力为($p_0 + \gamma H$)。因此由题 3.1 导出的环向应力公式，有

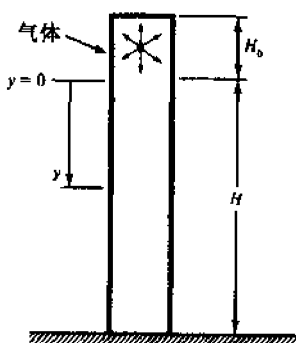


图 3-4

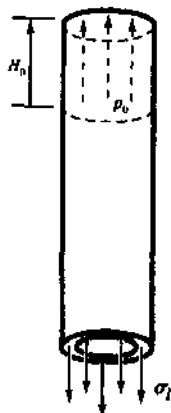


图 3-5

$$\sigma_c = \frac{(p_0 + \gamma H)R}{h} \tag{1}$$

式中 h** 是容器的壁厚。

液体的黏度为零，因此在容器内壁处不可能有切向的剪应力。由于铅垂向平衡，气体压力 p_0 向上的推力必须由纵向应力 σ_l 来平衡，容器底部的 σ_l 沿壁厚是均匀分布的，如图 3-5 所示。于是

$$\sum F_v = \sigma_L(2\pi R)h - p_0\pi R^2 = 0$$

$$\sigma_l = \frac{p_0 R}{2h} \quad (与\ y\ 无关) \tag{2}$$

显然，(1)式的环向应力大于(2)式的纵向应力，因而它将是设计的控制因素，即

$$\frac{[12\ \text{lbf/in}^2 + (62.4\ \text{lbf/ft}^3)\left(\frac{\text{ft}^3}{1728\ \text{in}^3}\right)(240\ \text{in})](60\text{in})}{h} = 28000^*\ \text{lbf/in}^2$$

* 1 torr = 133.322 Pa。

** 此处原文有错。——译者注

由此式可解出壁厚为 $h=0.044$ in * 。

题3.4　铅直轴线的圆柱形储液罐,内部截面积为 A,储液深度为15 m。液体比重 $\gamma=\gamma_0(1+0.018z)$,$z$ 为液体自由表面以下的深度,如图3-6(a)。$\gamma_0=9810\ \mathrm{N/m^3}$ 是水的比重。该储液罐半径为4 m,由钢制成,材料的屈服点为240 MPa。如果取安全系数为2,试确定储液罐的壁厚。

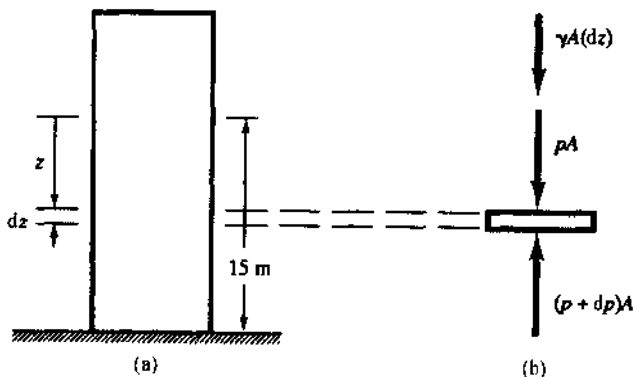


图3-6

解　☞ 我们画出深度为 z 处,厚度 dz 的一薄层液体的分离体图,如图3-6(b)。此薄层液体上表面的压力为 p。下表面为 $(p+dp)$,薄层液体的重量为 $\gamma A(dz)$;此处需要指出的是:本题中的比重 γ 是 z 的函数,即 $\gamma=\gamma(z)$。此外,还需指出:对压力使用题3.3导出的公式 $p=\gamma z$ 是不正确的,因为它是在 γ 为常数的前提下导出的,而此题的 γ 随深度变化。

薄层液体的铅垂向平衡方程

$$\sum F=(p+dp)A-pA-\gamma A dz=0$$

可解出

$$dp=\gamma dz=\gamma_0(1+0.018z)dz$$

积分此式,得到

$$p=\gamma_0(z+0.009z^2)+C$$

注意到在液体自由表面处,即 $z=0$ 处,$p=0$,因此可知 $C=0$。在容器的底部(即 $z=15$ m 处)的压力是

$$p_{max}=\gamma_0[15+0.009(15)^2]$$

因为 $\gamma_0=9810\ \mathrm{N/m^3}$,峰值压力为

$$p_{max}=(9810\ \mathrm{N/m^3})[15\ \mathrm{m}+0.009(15)^2\mathrm{m}]=16700\ \mathrm{N/m^2}$$

由题3.1可知,这是设计的控制压力,于是

$$\sigma_{max}=\frac{(p_{max})r}{h}$$

$$\frac{240\times10^6}{2}\mathrm{N/m^2}=\frac{(16700\mathrm{N/m^2})(4\mathrm{m})}{h}$$

解出储液罐的壁厚 h 为

$$h=0.0056\ \mathrm{m}\quad 或\quad 5.6\ \mathrm{mm}$$

题3.5　计算由于内压 p 作用,题3.1中的圆柱形容器半径的增加。

解　☞ 我们分别单独考虑径向和纵向载荷作用的结果。单独有径向压力 p 作用时,环向应力为 $\sigma_c=pr/h$,因为 $\sigma=E\epsilon$,环向应 $\epsilon_c=pr/Eh$。

需要指出的是:ϵ_c 是单位长度的变化。而 σ_c 作用的长度是圆柱的周长,即 $2\pi r$,因此周长的总伸长为

* 此处原文有错。——译者注

$$\Delta = \varepsilon_c(2\pi r) \approx \frac{2\pi pr^2}{Eh}$$

因而，周长的最终长度是$(2\pi r + 2\pi pr^2/Eh)$，将此长度除以 2π，得到圆柱形变以后的半径为$(r + pr^2/Eh)$。因此，半径的增加是 pr^2/Eh。

由于轴向压力 p 的单独作用，产生轴向应力 $\sigma_l = pr/2h$，相应的轴向应变 $\varepsilon_l = pr/2Eh$。由第1章知道，沿拉伸载荷方向(此处为轴向)产生伸长的同时，在垂直于载荷方向上还要产生缩短。因而此时的圆柱周长尺寸要减少。侧向应变和载荷方向应变的比值在第1章中定义为泊松比，用 μ 来表示。于是，与上述应变同时产生的环向应变是 $-\mu\varepsilon_l$，如果这一应变用 ε_c' 表示，则 $\varepsilon_c' = -\mu pr/2Eh$，因此它将导致圆柱半径减少，所以冠以"-"号。

仿照径向载荷单独作用时，圆柱半径增加的处理方法，可以知道，相应于应变 ε_c' 的半径的减少为 $\mu pr^2/2Eh$。于是，由内压引起的半径的增加为

$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh} - \frac{\mu pr^2}{2Eh} = \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

题 3.6　具有刚性端封板的薄壁圆柱是由长矩形板绕成圆柱形后，焊接成形的，因而制成的压力容器形状如图 3-7 所示，螺旋线和柱壳母线之间的夹角为 35°。圆柱壳的平均半径为 20 in，壁厚 $h = 0.5$ in，内部压力是 400 lbf/in²。忽略端封板的局部效应，试求作用在圆柱曲面螺旋焊缝上的法应力和剪应力。

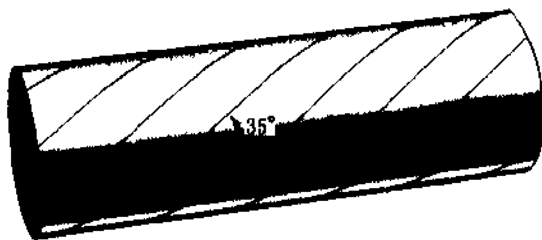


图 3-7

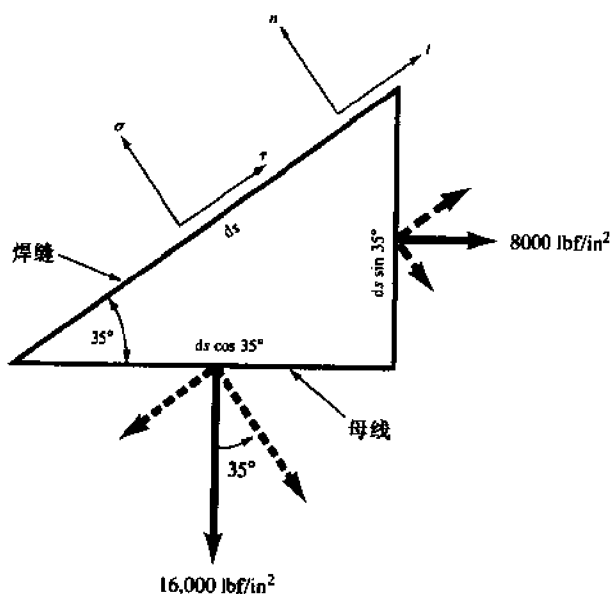


图 3-8

解　☞ 由题 3.1 可知，圆柱的环向应力和轴向应力分别是

$$\sigma_c = \frac{pr}{h} = \frac{(400\ \text{lbf/in}^2)(20\ \text{in})}{0.5\ \text{in}} = 16000\ \text{lbf/in}^2$$

$$\sigma_l = \frac{pr}{2h} = 8000\ \text{lbf/in}^2$$

我们考虑一个取自圆柱壁上的三角形单元体，该单元体的斜边是焊缝，另两个直角边分别为圆柱壳的母线和环向线。上述计算得到的应力(用粗实箭头表示)作用在直角边上，如图 3-8 所示，在单元体的斜边上(与焊缝重合)有未知的法应力 σ 和剪应力 τ。若取单元体的斜边长度为 ds，则母线的边长为 ds cos35°，沿环线的边长为 ds sin35°。

为方便考虑，取 n 轴和 t 轴分别为与焊缝垂直和相切的一对坐标轴，用矢量表示的应力沿 n 向与 t 向的分量如图 3-8 所示。沿 n 向的平衡方程，有

$$\sum F_n = \sigma(ds)(h) - 8000(ds)(\sin 35^\circ)(h)(\sin 35^\circ) - 16000(ds)(\cos 35^\circ)(h)(\cos 35^\circ) = 0$$

$$\sigma = 8000\sin^2 35^\circ + 16000\cos^2 35^\circ = 13370\ \text{lbf/in}^2$$

同理，沿切线方向(亦即沿焊缝方向)的平衡方程，有

$$\sum F_t = \tau(ds)(h) + 8000(ds)(\sin 35^\circ)(h)(\cos 35^\circ) - 16000(ds)(\cos 35^\circ)(h)(\sin 35^\circ) = 0$$

$$\tau = (8000)(\sin 35^\circ)(\cos 35^\circ) = 3760\ \text{lbf/in}^2$$

题 3.7　考虑承受均匀内压 p 的封闭薄壁球壳，内径为 r，壁厚为 h。试导出壳壁内的张拉应力表达式。

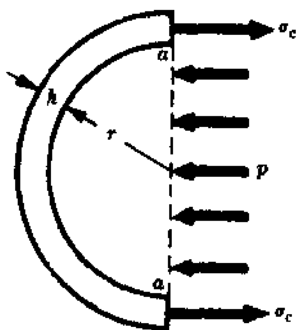


图 3-9

解　☞ 我们考察半球壳的分离体图，此半球壳同时受到内压 p 和已被除去的、另外半球施加力的共同作用，由于载荷和形变都是对称的，另外半球的作用力可用环向应力 σ_c 表示。如图 3-9 所示。这个分离体图表示了半球上的作用力，而且该图只是半球面在铅直平面内的投影。实际上内压 p 是作用在半球的全部表面上，并且垂直于作用点处的半球表面，正如在题 3.1 所讲到的，这个作用可以用同样的压力 p 作用在半球面的投影面上的力替代，此处的投影面是用 a-a 表示的铅直圆面。因为半球面关于水平轴是对称的，压力的铅垂分量相互抵消，只有其水平分量去产生张拉应力 σ_c。平衡方程为

$$\sum F_n = \sigma_c 2\pi rh - p\pi r^2 = 0$$

解出

$$\sigma_c = pr/2h$$

由于对称性，环向的应力在球壁的任一点处任意方向上都是相同的。

题 3.8　直径为 20 m 的球形容器用来储藏气体，若壁厚为 10 mm，材料的许可应力是 125 MPa。求气体最大的许可压力 p。

解　☞ 由题 3.7 可知，球壳内在各方向上的均匀张拉应力均为 $\sigma_c = pr/2h$。将有关数据代入后，有

$$125 \times 10^6\ \text{N/M}^2 = \frac{p(10\text{m})}{2(0.010)}$$

解出

$$p = 0.25\ \text{MPa}$$

题 3.9　水下研究装置 Alvin 的球形压力容器的半径为 1 m，壳体壁厚为 30 mm，它由屈服点 700 MPa 的钢材料制成。试求壳体应力等于屈服点的下潜深度。设海水的比重为 10.07 kN/m³

解　☞ 由题 3.7 可知，由外部静水压力引起的压应力 $\sigma = pr/2h$。相应于屈服点的静水压力为

$$700 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = \frac{p(1\text{m})}{2(0.03\text{m})} \quad 或 \quad p = 42\ \text{MPa}$$

正如题 3.3，应有 $p = \gamma h$，此处 γ 是海水的比重。于是

$$42\times10^6\text{N/m}^2=(10.07\times10^3\text{N/m}^3)(h)$$

解出

$$h=4170\text{ m}$$

应该指出的是：上述结果没有考虑球壳受静水压力屈曲的可能性及舱室进口处强度问题的局部效应影响。如果考虑以上因素。实际操作的下潜深度为1650 m。

题 3.10 试求承受均匀内压 p 的球壳容积的增加．

解 ☞ 由题 3.7 可知：壳体内任一点处所有方向上的环向应力应为一个常数，即

$$\sigma_c=\frac{pr}{2h}$$

由二向应力的胡克定律，可知环向应变 ϵ_c 为

$$\epsilon_c=\frac{1}{E}(\sigma_c-\mu\sigma_c)=\frac{pr}{2Eh}(1-\mu)$$

这个应变是球体环向单位长度的伸长。因此全部周长的增加为

$$(2\pi r)\frac{pr}{2Eh}(1-\mu)$$

承受内压 p 的球壳直径可由受内压后的周长除以 2π 得到，最终的直径为

$$\left[2\pi r+(2\pi r)\frac{pr^2}{2Eh}(1-\mu)\right]/2\pi \tag{1}$$

即

$$\left[r+\frac{pr^2}{2Eh}(1-\mu)\right] \tag{2}$$

受内压后的球形体积为

$$\frac{4}{3}\pi\left[r+\frac{pr^2}{2Eh}(1-\mu)\right]^3 \tag{3}$$

由(3)式减去初始体积，就可以得到待求的、承受内压后容积增加为

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi\left[r+\frac{pr^2}{2Eh}(1-\mu)\right]^3-\frac{4}{3}\pi r^3$$

展开上式，舍去含(p/E)乘幂的各项(它的量级为 1/1000)，受压后容积的增加为

$$\Delta V=\frac{2\pi pr^4}{Eh}(1-\mu)$$

题 3.11 内径 1 m、厚度 7 mm 的钛合金球形壳充满不可压缩的流体。现通过一个小孔注入体积为 1000 cm^3 的同种液体，引起球壳半径的增加。试求注入补充液体并封闭入口后，壳体内的压力。设钛合金的 $E=114$GPa，屈服点应力为 830 MPa。

解 ☞ 球壳的初始容积为

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{\pi}{6}d^3=\frac{\pi}{6}(1\text{m})^3=0.5236\text{m}^3$$

d 为内径，注入液体的体积是

$$1000\text{cm}^3\left(\frac{\text{m}}{100\text{cm}}\right)^3=\frac{1}{10^3}\text{m}^3$$

因而，不可压缩液体的最终体积为$(0.5236)\text{m}^3+(0.001)\text{m}^3=0.5246\text{m}^3$，它将等于膨胀后的球壳的容积。题 3.10 给出的压力和球壳容积变化之间的关系是

$$\Delta V=\frac{2\pi pr^4}{Eh}(1-\mu)$$

代入有关的数据，

$$0.001\text{m}^3=\frac{(2\pi)p(0.5\text{m})^4}{(114\times10^9\text{N/m}^2)(0.007\text{m})}(0.67)$$

解出

$$p=3.03\text{ MPa}$$

校验由于此内压引起钛合金球壳内的法应力。由题 3.7，有

$$\sigma=\frac{pr}{2h}=\frac{(3.03\times10^6\text{N/m}^2)(0.05\text{m})}{2(0.007\text{m})}=109\text{MPa}$$

此应力低于材料的屈服点。

题 3.12 考虑一个由两个共轴薄壁圆筒组成的复合压力容器，如图 3-10 所示。在组装之前，两个薄壁圆筒有稍许"过盈"。亦即内壳与外壳相比，显得大了些。因而应将外壳加热，内、外壳组装后再冷却降温，此即为"热装配"。今设两个柱壳均是由钢制成，组件的平均直径为 100 mm，求由于热装配在每个壳中引起的环向应力。初始直径的过盈量为 0.25 mm，内壳的厚度是 2.5 mm，外壳的厚度是 2 mm，材料的弹性模量 $E = 200$ MPa。



图 3-10

解 ☞ 组合壳体装配好以后，在互相接合的面上，显然会有界面压力 p。注意到此时并无外部作用，因而 p 使外壳的直径增大、使内壳的直径减小，从而使得内壳得以装配在外壳之内。由题 3.5 可知，由于径向压力 p，使径向膨胀 pr^2/Eh。注意到此题并无轴向载荷，因而，由于 p 作用使外壳的半径增大与内壳半径的减小之和等于初始半径的过盈量，即 0.25 mm/2，有

$$\frac{p(0.05\text{m})^2}{(200\times10^9\text{N/m}^2)(0.0025\text{m})}+\frac{p(0.05\text{m})^2}{(200\times10^9\text{N/m}^2)(0.002\text{m})}=\frac{0.125}{1000}\text{m}$$

解出

$$p = 11.1\ \text{MPa}$$

表示在上述图形中的这一压力 p 作用于装在一起的内、外柱壳之间。对内壳而言，将引起环向应力

$$\sigma_c=\frac{pr}{h}=\frac{(11.1\times10^6\text{N/m}^2)(0.05)}{(0.0025\text{m})}=-222\text{MPa}$$

对外壳而言，由于压力引起的环向应力是

$$\sigma_c=\frac{pr}{h}=\frac{(11.1\times10^6\text{N/m}^2)(0.05)}{(0.002\text{m})}=277\text{MPa}$$

如果此种组合壳容器承受均匀内压作用，则这些装配应力将和题 3.1 公式计算得出的应力代数相加。

题 3.13 如图 3-11 所示，钢圆柱壳恰好套装在铜圆柱壳的外面，若温度升高 60°F，求每个壳中的环向应力。不考虑长度方向膨胀的影响，此种装置有时用来储存有腐蚀性的流体。取 $E_{st} = 30\times10^6$ lbf/in², $\alpha_{st} = 6.5\times10^{-6}$/°F；$E_{Cu} = 13\times10^6$ lbf/in², $\alpha_{Cu} = 9.3\times10^{-6}$/°F

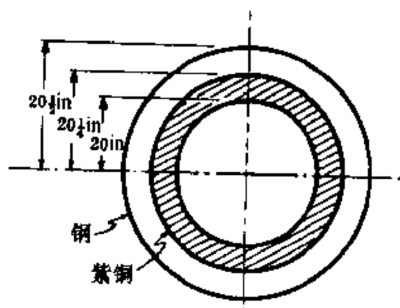


图 3-11

解 ☞ 此题最简单的解法是：首先分别考虑两个壳，而认为它们并不接触。由于温度上升，钢壳周长增加了 $2\pi(20.375)(60)(6.5\times10^{-6}) = 0.0498$ in，同时，铜壳的周长增加了 $2\pi(20.125)(60)(9.3\times10^{-6}) = 0.0705$ in，因而半径之间的过盈，亦即两个壳半径之差（由于加热）是 $(0.0705-0.0498)/2\pi = 0.00345$in，注意此时并无外部的载荷作用在任何一个壳上。

然而，对问题的分析可知：由于升温，在两个壳的接触界面上会有接触，亦即两个界面之间有界面压力 p。此压力 p 导致钢壳半径增加，同时导致铜壳半径减少。

从而使铜柱壳得以装配在钢柱壳之内，此种压力如分离体图 3-12 所示。

在题 3.5 中已经得到，由于径向压力 p(无轴向力作用)引起柱壳半径的改变是 pr^2/Eh。因而由于压力 p 引起外壳半径的增加与内壳半径的减少之和应等于过盈量，即

$$\frac{p(20.375)^2}{(30\times10^6)(0.25)}+\frac{p(20.125)^2}{(13\times10^6)(0.25)}=0.00345$$

解出 $p=19.2\ \text{lbf/in}^2$

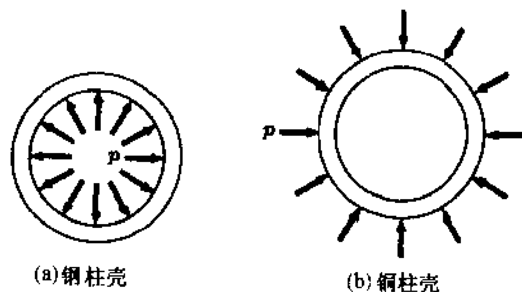


图 3-12

此界面压力提供了两个壳公共接触面上必要的连接条件。利用环向应力公式 $\sigma_t=pr/h$，得到钢壳和铜壳内的应力分别是

$$\sigma_{st}=\frac{19.2(20.375)}{0.25}=1560(\text{lbf/in}^2),$$

$$\sigma_{Cu}=-\frac{19.2(20.125)}{0.25}=-1550(\text{lbf/in}^2)$$

题 3.14 考虑一个装有比重为 γ 的液体的圆锥形薄壁壳[如图 3-13(a)]，此壳在上边缘周圈为铰接，充液的深度为 H，壳的几何对称轴是铅直的。试求壳内的应力。

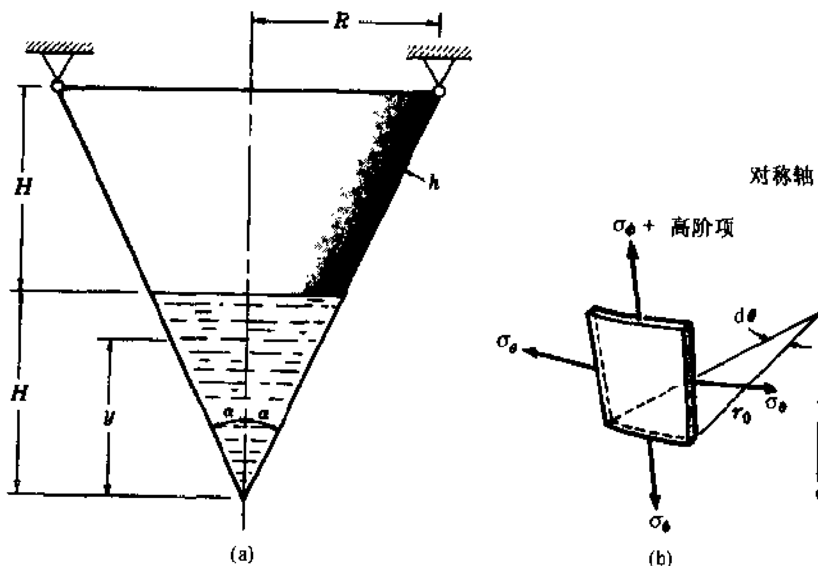


图 3-13

解 ☞ 此壳内的应力状态显然是轴对称的。假设壳的厚度 h 和 H 及 R 相比是很小的。壳内的应力可以由壳体单元的平衡条件得到，这个壳体单元的四个边界分别由两个邻近的、垂直于对称轴的平行圆和两根临近的母线组成，单元体以及表示水平方向的应力矢量 σ_θ，表示母线方向的应力矢量 σ_ϕ 如图 3-13(b)所示。σ_θ 称为环向应力，σ_ϕ 称为子午线向应力。

在图 3-13(b)中，θ 是在垂直于壳体对称轴的水平面内度量的角坐标，圆锥壳体在某处的半径为 r_0，它是单元体相应于对称轴上位置的函数。对于确定锥壳有用的另一个坐标是 r_2，它相应于在垂直于母线的平面内壳体表面的曲率半径。用通过壳体对称轴的一个铅垂平面图来图解以上

内容最直观与方便，如图 3-14(a)，显然 $r_0 = r_2\cos\alpha$。

由几何学，可有

$$r_0 = y\tan\alpha, \qquad 因而 \qquad r_2 = y\tan\alpha/\cos\alpha$$

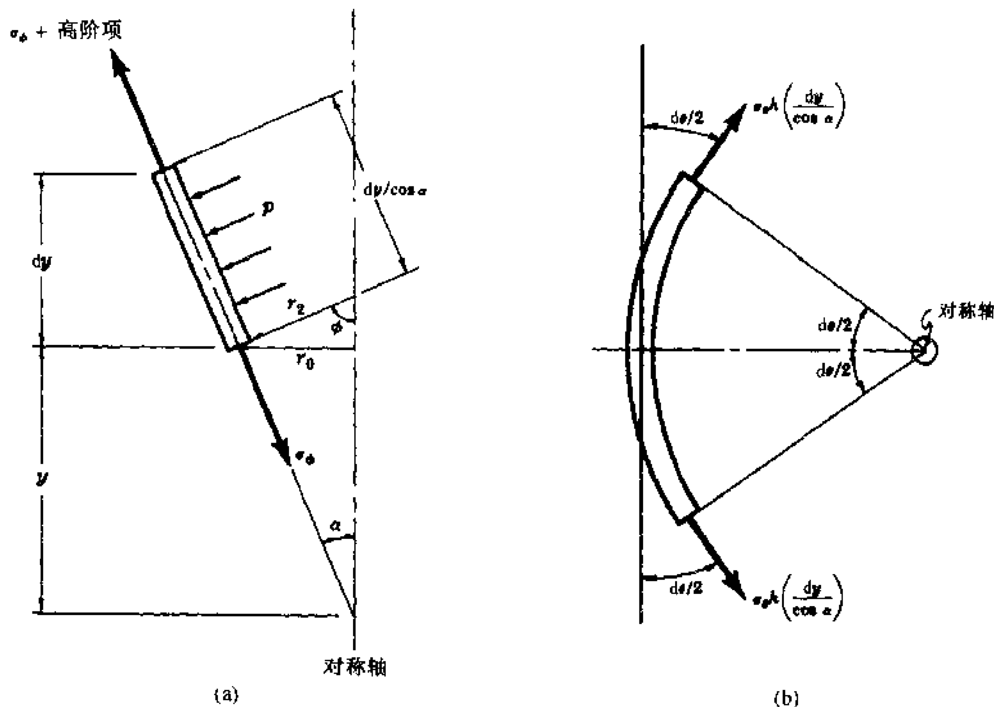


图 3-14

在图 3-13(b)中，循着对称轴看环向应力，可看得更清楚一些，这如图 3-14(b)所示。显然，每个环向力矢量 $\sigma_\theta(\mathrm{d}y/\cos\alpha)h$ 和单元体的切线倾斜角度 $\mathrm{d}\theta/2$。作用在水平平面内，指向壳体对称轴的环向力合力分量是 $2\sigma_\theta h(\mathrm{d}y/\cos\alpha)\sin(\mathrm{d}\theta/2)$，注意到 $(\mathrm{d}\theta/2)$ 是很小的量，上述合力分量又可写作 $\sigma_\theta h(\mathrm{d}y/\cos\alpha)\mathrm{d}\theta$。由图 3-14(a)可以看出：为了确定上述合力在垂直于壳体表面方向的分量，应将上述合力乘以 $\cos\alpha$。此外，也可以看出，图 3-14(a)中的子午线向应力相互抵消，而液体的压力 p 作用在面积 $(r_0\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}y/\cos\alpha)$ 上。因而，在壳体表面法线方向单元体的平衡方程为

$$\sigma_\theta h(\mathrm{d}y/\cos\alpha)(\mathrm{d}\theta)\cos\alpha - pr_0(\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}y/\cos\alpha) = 0 \tag{1}$$

解出

$$\sigma_\theta = \frac{pr_0}{h\cos\alpha} = \frac{py\tan\alpha}{h\cos\alpha} = \frac{pr_2}{h} \tag{2}$$

(2)式在壳体的任何地方都是正确的，在壳的下半部分，$0<y<H$，有 $p=\gamma(H-y)$，于是

$$\sigma_\theta = \frac{\gamma(H-y)y\tan\alpha}{h\cos\alpha} \qquad (0<y<H) \tag{3}$$

在壳体的上半部分，$H<y<2H$，有 $p=0$。于是在该区域内，应有 $\sigma_\theta=0$

可以用研究锥壳铅直向平衡方程的方法得到另一个应力分量 σ_ϕ。如图 3-15(a)，当 $0<y<H$ 时，在锥形区域 abo 内和圆柱区域 $abcd$ 内的液体重量需由与 σ_ϕ 相应的力来维持平衡，即

$$\sigma_\phi h 2\pi y\tan\alpha\cos\alpha - \gamma\left[\frac{1}{3}\pi(y\tan\alpha)^2 y + (H-y)\pi(y\tan\alpha)^2\right] = 0 \tag{4}$$

解出

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma\tan\alpha}{h\cos\alpha}\left(\frac{Hy}{2} - \frac{y^2}{3}\right) \qquad (0<y<H) \tag{5}$$

同理，当 $H<y<2H$ 时，全部液体的重量都需由与 σ_ϕ 相应的力平衡，由图3-15(b)有

$$\sigma_\phi h(2\pi y)(\tan\alpha)\cos\alpha - \gamma\frac{1}{3}\pi r_0^2 H = 0 \tag{6}$$

因为 $r_0 = H\tan\alpha$，得到

$$\sigma_\phi = \frac{\gamma H^3 \tan\alpha}{6hy\cos\alpha} \qquad (H < y < 2H)$$

由此可以发现：与这些轴对称形变对应的应力是静定的，不需要研究形变关系即可求解。直到塑性作用阶段这种关系都是正确的。

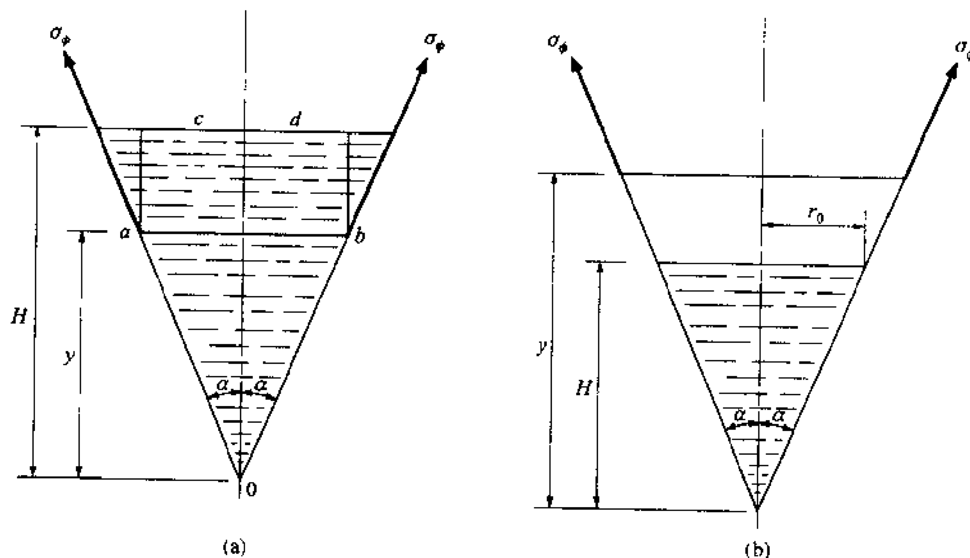


图 3-15

题 3.15 求承受内部压力 p 的旋转壳的环向应力和子午线向应力。

解 作为题 3.14 的推广，实际上此题已经得到解决了。各应力仍可由壳体单元的平衡方程得到，该壳体单元仍是由两个临近的、垂直于壳体铅直对称轴的平行圆和两根临近的母线共同界定（见图 3-1）。这个壳体单元与题 3.14 的图 3-13(b) 中的单元体类似，所不同的是，铅直边是曲线而不是直线。

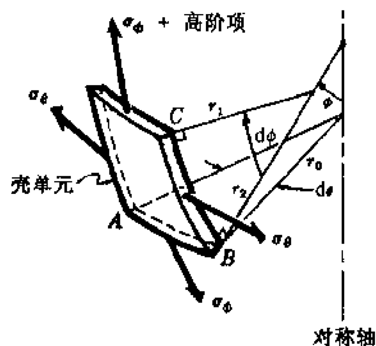


图 3-16

环向应力 σ_θ 和子午线向应力 σ_ϕ 如图 3-16 所示，为了描述这个单元体需引入两个曲率半径，我们用 r_1 表示子午线的曲率半径，r_2 表示垂直于子午线方向上壳体表面的曲率半径。与 r_2 对应的曲率中心必然在对称轴上，尽管 r_1 的曲率中心（一般）不在对称轴上。

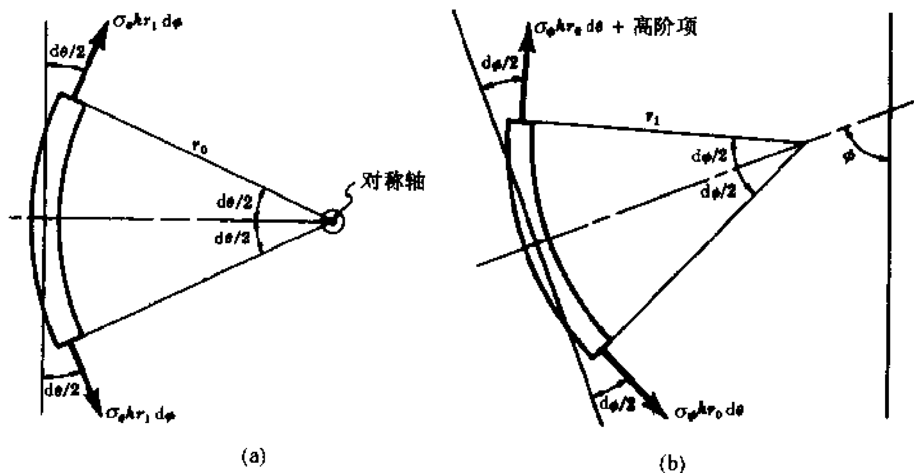


图 3-17

图3-17(a)说明，循着对称轴看环向力，与题3.14类似，它们的水平分量是$2\sigma_\theta h r_1 d\phi(d\theta/2)$，并指向壳体的对称轴。将这个量再与$\sin\phi$相乘，就可以得到与壳体单元垂直的分量。如图3-17(b)所示子午线方向的力，这些力在垂直于壳体方向上的分量是$\sigma_\phi h r_0 d\theta d\phi$。压力$p$作用在面积$(r_0 d\theta)(r_1 d\phi)$上，于是，垂直于壳体方向上的平衡方程为

$$\sigma_\theta h r_1 d\theta d\phi \sin\phi + \sigma_\phi h r_0 d\theta d\phi - p r_0 d\theta r_1 d\phi = 0$$

注意到$r_0 = r_2 \sin\phi$，得到

$$\frac{\sigma_\phi}{r_1} + \frac{\sigma_\theta}{r_2} = \frac{p}{h}$$

这个基本的方程适用于所有的旋转薄壳轴对称形变。如同在题3.14中一样，也可以用研究某个方便的平行圆以上部分薄壳的铅直向平衡方程得到第二个方程。这些方程也适用于塑性作用区。

题3.16　如图3-18(a)所示半径r的球形圆顶壳。此球形壳厚度为一常数，只承受单位面积为q的自身重量的作用，下周圈为铰支。试求壳内各点处的环向应力和子午线向应力。

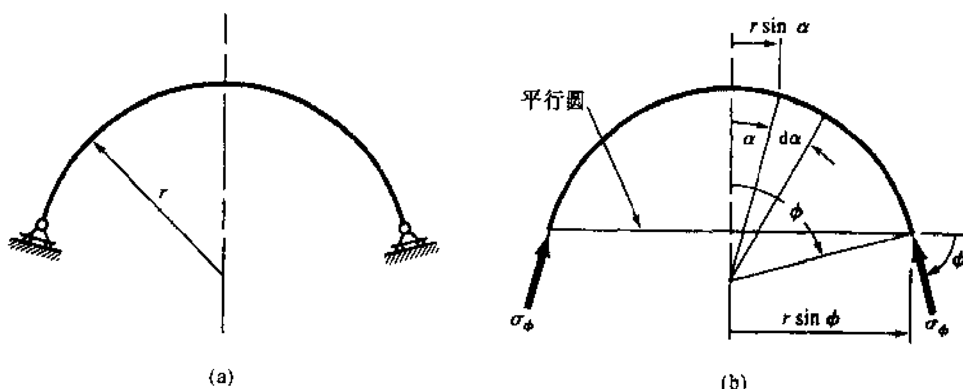


图3-18

解　如图3-18(b)所示，用角度为ϕ的平行圆截取圆球壳的顶部部分，并考虑此部分铅直向平衡问题。引入角坐标α，平行圆以上的中心区域的重量可由研究一个环向单元体得到，该单元体的半径是$(r\sin\alpha)$，子午线长度为$(r d\alpha)$。于是，平行圆以上区域的重量为

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\phi} q[2\pi(r\sin\alpha)](r d\alpha) = 2\pi r^2 q(1 - \cos\phi)$$

子午线向的应力沿平行圆周应是均匀分布的，此应力铅直向上的合力为

$$2\pi(r\sin\phi)h\sigma_\phi(\sin\phi)$$

由平行圆以上部分球顶壳的铅直平衡方程，有

$$2\pi(r\sin\phi)h\sigma_\phi(\sin\phi) - 2\pi r^2 q(1 - \cos\phi) = 0$$

解出

$$\sigma_\theta = \frac{rq}{h(1+\cos\phi)} \quad (\text{压缩}) \tag{1}$$

将(1)式结果带入题3.15的(1)式，可解出环向应力σ_θ为

$$\sigma_\theta = \frac{rq}{h}\left[\frac{1}{1+\cos\phi} - \cos\phi\right] \tag{2}$$

题3.17　如果题3.16中的圆顶球壳的展开角为120°，厚度100 mm，半径50 m，比重为23.5 kN/m³。试求(a)球壳顶部，(b)简支边处的子午线向及环向应力。

解　题3.16中圆顶球壳的子午线向应力如该题中(1)式，式中q是单位表面积球壳的重量，此题中给出的是单位体积重23.5 kN，注意到壳体壁厚为100 mm，则单位表面积的重量为

$$q = (23500\text{N/m}^3)\left(\frac{100}{1000}\text{m}\right) = 2350\text{N/m}^2$$

顶部 $\phi = 0$ 处的子午线向应力为

$$\sigma_\phi = -\frac{(50)(2350\text{N/m}^2)}{(0.1)[1+\cos 0^\circ]} = -587500\text{N/m}^2 \quad 或 \quad 0.588\text{MPa}$$

简支边处，$\phi = 60^\circ$，有

$$\sigma_\phi = -\frac{(50)(2350\text{N/m}^2)}{(0.1)[1+\cos 60^\circ]} = -78600\text{N/m}^2 \quad 或 \quad 0.786\text{MPa}$$

题 3.16 的环向应力如(2)式，在球壳的顶部，有

$$\sigma_\theta = \frac{(50)(2350\text{N/m}^2)}{(0.1)}\left[\frac{1}{1-\cos 0^\circ} - \cos 0^\circ\right] = -587500\text{N/m}^2 \quad 或 \quad 0.588\text{MPa}$$

简支边处，$\phi = 60^\circ$，有

$$\sigma_\theta = \frac{(50)(2350\text{N/m}^2)}{(0.1)}\left[\frac{1}{1+\cos 60^\circ} - \cos 60^\circ\right] = 195000\text{N/m}^2 \quad 或 \quad 0.195\text{MPa}$$

由此可知，环向应力在周边简支处为拉伸，而在壳体顶部为压缩。由题 3.16 的(2)式，可知在 $\phi_0 = 51.8^\circ$ 处环向应力为零，ϕ_0 是由 $\frac{1}{1+\cos\phi_0}\cos\phi_0 = 0$ 解出的。

题 3.18 环形壳有时用作宇宙飞船中的气体储藏罐。(美国)国家航空航天局为不久的将来设计的环形壳如图 3-19 所示，其平均直径 $2b = 70$ ft，截面直径 $2R = 5$ft，内部压力 $p = 20$ lbf/in^2，壳体的材料是 2219T87 铝合金，室温时材料的屈服点应力为 50000 lbf/in^2。此种材料的屈服点在低温时会升高，在低温 -300°F 时，可达室温屈服点的 120%。如果安全系数为 1.5，试确定所需要的壁厚。

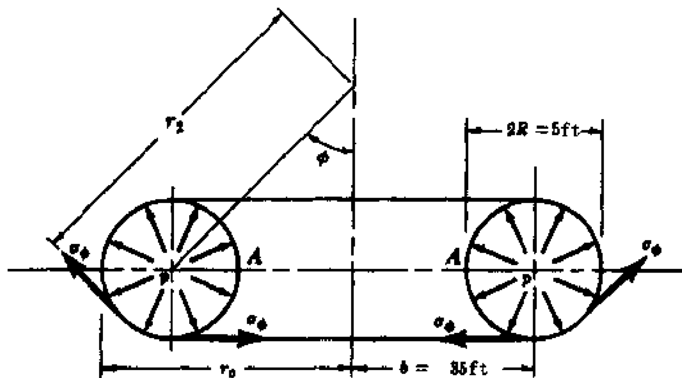


图 3-19

解 ☞ 首先考虑此环形壳某个平面以上部分的平衡，该平面的位置是由角度 ϕ 指明的。考虑内压 p 对曲面水平投影面的作用，即可得到子午线向应力 σ_ϕ，即

$$2\pi r_0 \sigma_\phi h \sin\phi = \pi p(r_0^2 - b^2)$$

注意到 $\sin\phi = (r_0 - b)/R$，可解出

$$\sigma_\phi = \frac{pR(r_0 + b)}{2\pi r_0 h} \tag{1}$$

由(1)式可知，子午线向应力 σ_ϕ 的峰值发生在最内部的点 A 处。

$$(\sigma_\phi)_{\max} = \frac{pR}{2h}\left(\frac{2b - R}{b - R}\right) \tag{2}$$

如果 $b = 0$，环形壳蜕变为球形壳，(2)式将与题 3.7 球形壳的子午线向应力公式一致。对于题设的数据，有 $R = 30$ in，$b = 420$ in，$p = 20$ lbf/in^2；(2)式成为

$$\frac{50000}{1.5} = \frac{20(30)(840 - 30)}{2h(420 - 30)} \tag{3}$$

解出

$$h = 0.0187\ \text{in}$$

如果将此题(1)式的 σ_ϕ 代入题 3.15(1)式(该式适用于任意旋转薄壳的轴对称问题)，且 $r_1 = R$、$r_2 = (b + R\sin\phi)/\sin\phi$ 时，可以得到

$$\sigma_\theta = \frac{pR}{2h} \tag{4}$$

此题即环形壳中任意点处的环向应力。显然可见，由(2)式给出的 σ_ϕ 的峰值要超过 σ_θ，因而，σ_ϕ 的最大值将控制设计条件，所需要的厚度由(3)式给出。

3.5 习　　题

题 3.19　高能汽车的某种建议设计包括一个储存氢气的容器。该容器是圆筒形的，直径为 0.4 m，端部具有半球状的封头。容器由 302 不锈钢制成，材料的拉伸许可应力为 290 MPa。充氢的压力为 15 MPa，试求容器所需要的壁厚。(答案：$h = 5.2$ mm)

题 3.20　直径 30 m 的铅直圆筒形汽油容器，储油深度为 15 m。汽油的比重是 7.4 kN/m^3，如果材料的屈服点应力是 250 MPa，安全系数取作 2.5。试计算容器底部所需要的厚度。(答案：$h = 16.7$ mm)

题 3.21　深水研究潜艇 Aluminaut 的圆柱形压力外壳的外径为 8 ft，厚度为 5.5 in，它是由 7079-T6 铝合金制成的，材料的屈服点应力为 60000 lbf/in^2，试计算该艇潜入海面下 15000 ft 深度时，外壳圆柱区段的环向应力。(计算时使用壳体的平均直径，海水比重为 64.0lbf/in^3。)(答案：54800 lbf/in^2)

题 3.22　端部用圆板封闭的圆柱壳，承受均匀内压力 p，假设沿柱壳长度半径的膨胀是常数，试求此柱壳单位体积增加的公式。(答案：$\frac{\Delta V}{V} = \frac{pr}{Eh}\left(\frac{5}{2} - 2\mu\right)$)

题 3.23　试求两端封闭圆柱壳承受均匀内压时单位体积的增加，设内压 $p = 0.5$ MPa，壁厚 $h = 1.5$ m，半径 r 350 mm，泊松比 $\mu = 1/3$，弹性模量 $E = 200$ GPa。(答案：$\Delta V/V = 10^{-3}$)

题 3.24　一组合壳是由薄壁钢壳热装在薄壁铝壳上制成的。两个壳的厚度均为 0.1 in，组件的平均直径为 4 in。两壳的初始直径过盈为 0.004 in，试求热装后两个壳中的环向应力；铝：$E_{Al} = 10 \times 10^6$ lbf/in^2；钢：$E_{st} = 30 \times 10^6$ lbf/in^2。(答案：$\sigma_{st} = 7500$ lbf/in^2，$\sigma_{Al} = -7500$ lbf/in^2)

题 3.25　盛装压力气体的球形容器直径为 25 m，厚度为 15 mm，该容器由屈服点应力 250 MPa 的结构钢制成，安全系数取作 2.5。试对以下两种情况求许可的内部压力：(a)焊缝的强度与材料相同，(b)焊缝的强度是材料强度的 75%。(答案：$p = 0.24$ MPa，$p = 0.18$ MPa)

题 3.26　薄壁球形壳温度升高 ΔT(各处均为常数)，试求壳的单位体积增加；设材料的线膨胀系数是 α。(答案：$3\alpha(\Delta T)$)

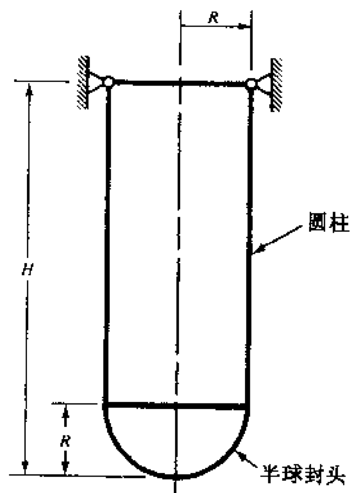


图 3-20

题 3.27　一储存液体的容器由铅直轴线圆柱壳组成，该圆柱壳的下端由半球形壳作封头，如图 3-20 所示。此容器由比重为 γ 的液体充满。系统的重量全部由上部的环形铰链支承，下部没有支承。试求圆柱壳内环向应力及子午线向应力的峰值以及半球壳内的峰值应力。(答案：圆柱壳内：$\sigma_t = \frac{\gamma R}{h}(H - R)$　$\sigma_l = \frac{\gamma R}{2h}\left(H - \frac{R}{3}\right)$

半球壳内：$\gamma HR/(2h)$)

题 3.28　重新研究题 3.18。该环形壳是由钛合金制成的，常温下屈服点应力为 12600 lbf/in^2。如果取安全系数为 1.5，其余数据如题 3.18 所给出的。试求所需要的壁厚。(答案：0.0074 in)

第4章 剪　切*

4.1 剪切力的定义

通过物体作一截面，作用在这个截面内的力称为剪切力，或称为剪力，用 F_s 表示。

4.2 剪应力的定义

剪切力除以其作用面积，所得结果称为剪应力，或称为切应力。本书中将之表示为 τ，于是

$$\tau = \frac{F_s}{A} \tag{4.1}$$

4.3 剪应力和法应力的比较

如图 4-1 所示，用与杆件轴线垂直的平面 a-a，截取部分杆件，法应力 σ 是垂直于该平面的应力。此种应力是我们在第 1、第 2 和第 3 章中研究过的应力。

剪应力是沿着该平面作用的应力，因而将之表示为 τ。由此可知，法应力和剪应力的区别是作用方向不同。

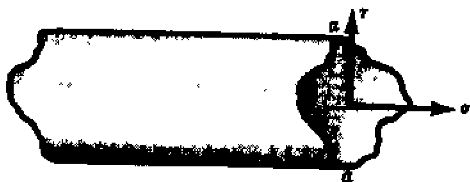


图 4-1

4.4 假　设

关于剪应力的分布方式必须作某些假设，同时考虑到目前尚缺乏更为严谨的知识，因而假设：在本章所讨论的所有问题中，剪应力将被取作均匀分布的，因而表达式 $\tau = F_s/A$ 可表示作用截面内的平均剪应力。

4.5 应　用

冲孔作业（题 4.2）、木材试验试件（题 4.3）、铆钉连接（题 4.5）、焊接连接（题 4.6）以及牵引装置（题 4.10）等都是含剪应力的最常见实例。

---

* 本章标题的原文是 Direct Shear Stresses，按国内习惯的称谓，将之译为"剪切"。——译者注

4.6 剪应力引起的形变

考虑取自受力物体内的矩形平面单元体的形变，作用在此单元体界面上的力是剪应力，其方向如图4-2(a)所示。

我们假设：与纸平面平行的单元体界面是自由的。由于在单元体上没有法应力作用，当剪应力假设为 τ 时，矩形单元体的边长不会变化，然而单元的初始直角将会发生畸变。由剪应力引起的畸变发生之后，单元体的构形如图4-2(b)中的虚线所示。

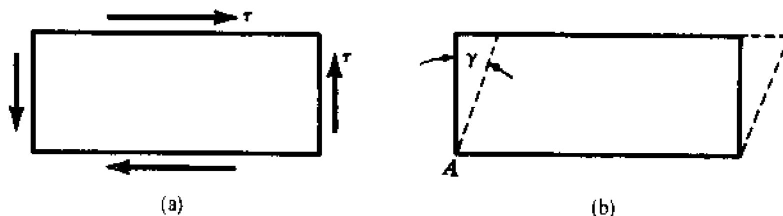


图4-2

4.7 剪应变

发生在原始矩形单元体角点处的角度变化定义为剪应变。它是用弧度(rad)来度量的，通常用 γ 表示。

4.8 剪切模量

剪应力 τ 和剪应变 γ 的比值称为剪切模量，通常用 G 来表示，亦即

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \tag{4.2}$$

G 也可称为刚性模量。

G 的单位与剪应力相同，亦即："lbf/in^2"或"N/m^2"，原因在于应变是无量纲量。关于 G 的实验测定、τ 和 γ 的线性作用区等内容，将在第5章讨论。与第1章中画出的法向载荷的应力-应变关系图相同，也可画出各种材料相应于剪切载荷的剪应力-应变图形。这些图形具有与第1章图形相似的一般性特点，图上的具体数据当然是不相同的。

4.9 焊接连接

作为对通常的气体焊接和电弧焊接工艺的补充，在过去的十余年中出现了两种非常有意义的新方法：(a)电子束焊接(b)激光束焊接。

4.9.1 电子束焊接

在电子束焊接(EBW)中，是用聚焦高能电子束轰击待焊接金属的表面，实现金属熔融连接的。这种电子束具有很高的能量密度，因而能形成很深、很窄的焊缝。与气体焊接或电弧焊接比较，电子束焊缝的形成更为快捷，母体金属形变也更少。电子束焊接的不利之处在于：(1)待焊接金属的表面必须加工得非常平整。(2)在某些情况下，电子束焊接必须在部分真空的环境中进行。此外，尚需采取安全防护措施，以防止电子束对人体的伤害(见题4.12)。

4.9.2 激光束焊接

在激光束焊接(LBW)中,金属的焊接是通过光能源聚焦在很小的区域上实现的,例如圆形区域直径通常是 100～1000 μm(0.004～0.040in),Laser 一词是“射线刺激增强光放大”(light amplification by stimulated emission of radiation)的英语字头连写。能量密度量级达到 10^5 W/cm^2(6×10^6W/in^2)的激光束才适合于金属的焊接。激光束焊接能产生高质量的焊缝,但必须采取防护措施以保护激光器的操作者,特别注意对人眼睛的保护。20 世纪 60 年代后期“阿波罗”登月探测器中的热电偶激光束焊接是第一个成功应用的范例,当前常用的典型系统包括有:红宝石激光器、二氧化碳以及各种稀有矿物材料等。20 世纪 90 年代通用的工业应用有:数字手表及心脏起搏器用电池封装;自来水笔墨水盒的封装;电话线路连接以及在航空航天技术、汽车及电子消耗品中的大量应用等。

4.10 例 题

题 4.1 如图 4-3 所示螺栓连接,力 $P=30$ kN,螺栓直径是 10 mm。试求 a-a 及 b-b 截面内剪应力的平均值。

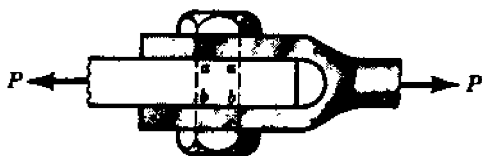


图 4-3

解 ☞ 因为缺乏更精确的资料,我们只能假设力 P 平均分布在截面 a-a 和 b-b 上,亦即 $(30\times10^3)/2=15\times10^3$N 作用在每个截面上,截面积为 $\pi(10^2)/4=78.6$ mm^2,截面上端平均剪应力为

$$\tau = P/(2A) = 15\times10^3/78.6 = 192\ (\text{MPa})$$

题 4.2 低碳结构钢的剪切强度极限约为 45000 lbf/in^2,今欲在厚度为 3/8 in 的钢板上冲一个直径 1 in 的孔。试求所需的力 P。如果此种材料的剪切模量为 12×10^6 lbf/in^2,试求当孔边剪应力等于 21000 lbf/in^2 时,剪应变是多少。

解 ☞ 假设均匀剪应力作用在直径为 1 in、高度为 3/8in 的圆柱表面上,如图 4-4。由平衡方程 $P=\tau A=\pi(1)(3/8)(45000)=53100$ lbf。

为了确定剪应力等于 21000 lbf/in^2 时的剪应变,根据定义 $G=\tau/\gamma$,得到 $\gamma=\tau/G=21000/12000000=0.00175$ rad。

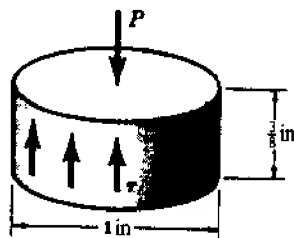


图 4-4

题 4.3 在木材工业中,倾斜的木块有时被用来测定胶黏结压剪强度。今有一对粘结的木块 A 和 B,它们在垂直于底平面方向上的宽度是 1.5 in,如果引起黏结接头破坏的铅直力是 9000 lbf,如图 4-5(a)所示。试求此胶的强度极限。要指出的是:比较好的胶会引起木材的大范围撕裂。

解 ☞ 我们考虑下方木块 A 的平衡,上方木块 B 施加在下方木块 A 的作用力有法向力和切向力,如图 4-5(b)和(c)所示的透视图和正视图。

考查图 4-5(c),水平方向的平衡方程,有

$$\sum F_h = \tau(2)(1.5)\cos75^\circ - \sigma(2)(1.5)\cos15^\circ = 0$$

解出

$$\sigma = 0.269\tau$$

铅直方向的平衡方程，有

$$\sum F_y = 9000 - \tau(2)(1.5)\sin 75^\circ - \sigma(2)(1.5)\cos 15^\circ = 0$$

将 $\sigma = 0.269\ \tau$ 代入上式，可解出

$$\tau = 2900\ \text{lbf/in}^2$$

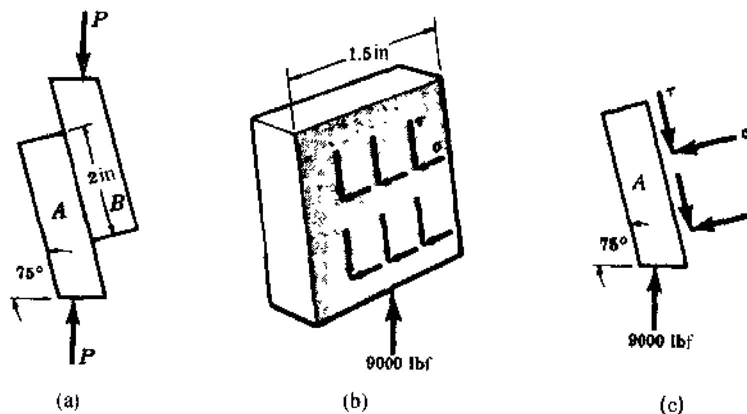


图 4-5

题 4.4　一块结构钢的剪应力是 100 MPa，若材料的刚性模量 $G = 85$ GPa，试求剪应变 γ。

解　根据定义 $G = \tau/\gamma$，因而剪应变

$$\gamma = \tau/G = (100\times10^6)/(85\times10^9) = 0.00117(\text{rad})$$

题 4.5　如图 4-6 所示，用一个铆钉连接两块板。如果铆钉的直径为 20 mm，载荷 $P = 30$ kN，试求铆钉中的平均剪应力。



图 4-6

解　此处铆钉中的平均剪应力为 P/A，其中 A 是铆钉的截面积。但是通常铆钉孔的直径较铆钉直径大 1.5 mm，习惯上又假设完全充满铆钉孔，因而剪应力是

$$\tau = \frac{30000\text{N}}{(\pi/4)(0.0215\text{m})^2} = 8.26\times10^7\ \text{N/m}^2,\quad \text{或 } 82.6\ \text{MPa}$$

题 4.6　连接两块板料的一种常用焊法是填角焊接，这种焊缝通常承受剪切以及拉伸或压缩，还经常有附加的弯曲。对于图 4-7 所示的两块板，试求许可载荷 P。

设材料用于剪切载荷的许可应力为 11300 lbf/in²，此许可应力是美国焊接协会颁

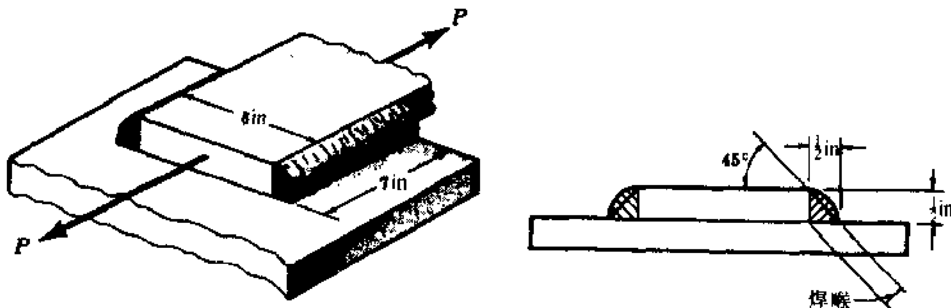


图 4-7

布的熔融焊接规范中规定的。解题时只考虑焊缝中的剪应力，载荷作用在两个焊缝的中间。

解 ☞ 焊缝截面的最小尺寸处称为"焊喉"，在题设条件下，"焊喉"的尺寸为(1/2) sin45° = 0.353 in。承受剪切的有效面积等于焊缝长度乘以"焊喉"尺寸，对每个焊缝，有效面积为 7(0.353) = 2.47 in^2。因而许可载荷等于许可切应力和有效面积之积，即

$$P = 11300(2)(2.47) = 56000\ (\text{lbf})$$

题 4.7 传动轴和皮带轮是用键联接在一起的，如图 4-8(a)所示。设皮带轮承受扭转力偶矩为 10000 lbf·in，使用尺寸为(1/2)×(1/2)×3 的键将轮与轴联接在一起，传动轴的直径为 2 in。试求键水平截面内的剪应力。

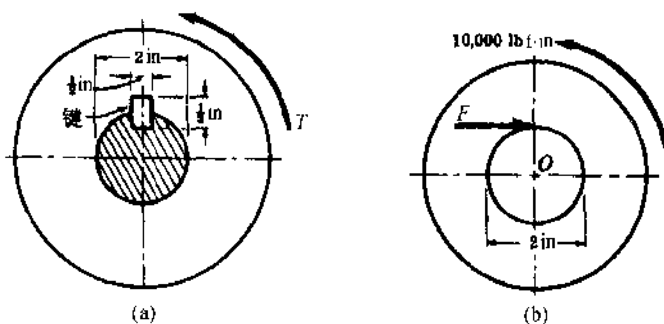


图 4-8

解 ☞ 单独画出皮带轮的分离体图，如图 4-8(b)所示。可以看出，施加的 10000 lbf·in 的扭转力偶需由键作用在轮上的水平切向力 F 平衡，关于轮心的转矩平衡，有

$$\sum M_0 = 10000 - F(1) = 0, \qquad \text{解出}\ F = 10000\ \text{lbf}$$

此处要指出，轴提供的附加力作用在轮上，但没有表示出来，这些作用力通过中心 O，因而不会出现在上述转矩方程中。作用在键上的合力如图 4-9(a)所示。实际上，向右方向作用的力 F 是作用在键的左侧表面下半面积上分布力的合力，与此类似，其他力 F 亦均为各分布力系的合力，力分布的真实情况尚属未知。

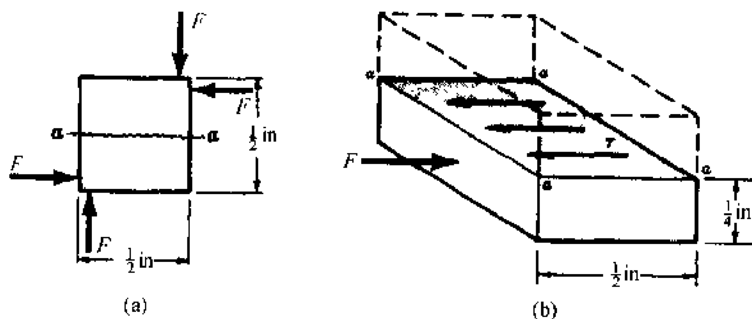


图 4-9

键的水平截面 a-a 以下部分的分离体图如图 4-9(b)所示。水平方向的平衡方程为

$$\sum F_h = 10000 - \tau(1/2)(3) = 0, \qquad \text{解出}\ \tau = 6670\ \text{lbf/in}^2$$

此即为键中的水平剪应力。

题 4.8 海上巡航舰的救生艇在端部由绕在缆轮上的钢缆悬挂，缆轮安装在顶部甲板的挂艇架上。钢缆每端的拉伸力是 4000 N，钢缆与缆轮均按装在铅直平面内，如图 4-10 所示。缆轮可绕图示的水平圆轴自由转动。如果圆轴材料的许可剪应力为 50 MPa，试求圆轴的直径。

解 ☞ 缆轮的分离体图上不仅有钢缆的拉力，同时还有圆轴作用在缆轮上的力 R_H 和 R_V。由静力学平衡方程，有

$$\sum F_H = -R_H + 4000\sin 60° = 0$$

$$R_H = 3464\text{N}(\leftarrow)$$

$$\sum F_V = R_V - 4000 - 4000\cos 60° = 0$$

$$R_V = 6000\text{N}(\uparrow)$$

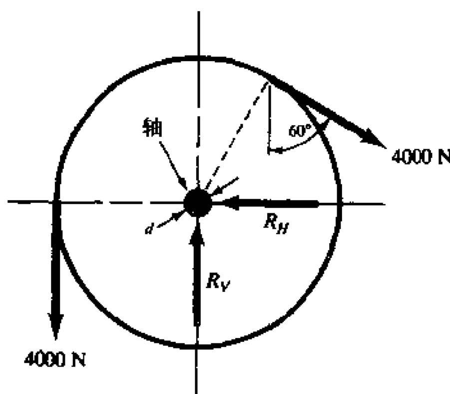


图 4-10

R_H 和 R_V 的合力等于 $R=\sqrt{(3464)^2+(6000)^2}=6930(\text{N})$，其方向与水平轴夹角为 θ

$$\theta = \arctan\frac{6000\text{N}}{3464\text{N}} = 60°$$

由缆轮作用在轴上的力与图 4-11 所示力数值相等、方向相反。如果假设合力 6930 N 均匀分布在圆轴的横截面上，则横向剪应力如图 4-12 所示。由方程(4.1)，有

$$50\times 10^6\text{N/m}^2 = \frac{6930\text{N}}{(\pi/4)d^2}$$

其中 d 即为待求的圆轴直径。解出 $d=13.3\times 10^{-3}$m 或 $d=13.3$mm。

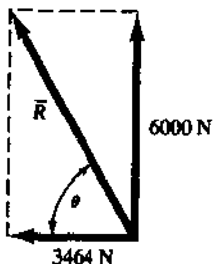


图 4-11

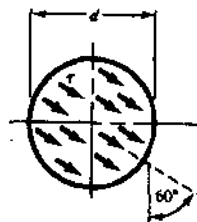


图 4-12

题 4.9　如图 4-13 所示，楼房高为 60 m，三个方向的视图均为矩形。作用在铅直表面上的水平风载荷，可以近似地认为在三层的每一层内均匀分布，如图示。由每层中点处的风压力实测资料，可知风压力下层为 781 N/m²，中层为 1264 N/m²，上层为 1530 N/m²。为使楼房基础能承受此风载荷，试求基础应具有的抗剪切能力。

解 ☞ 风载荷作用在每层的水平力分别为

$$P_1 = (20\text{m})(50\text{m})(781\text{N})/\text{m}^2 = 781\text{ kN}$$

$$P_2 = (20\text{m})(50\text{m})(1264\text{N})/\text{m}^2 = 1264\text{ kN}$$

$$P_3 = (20\text{m})(50\text{m})(1530\text{N})/\text{m}^2 = 1530\text{ kN}$$

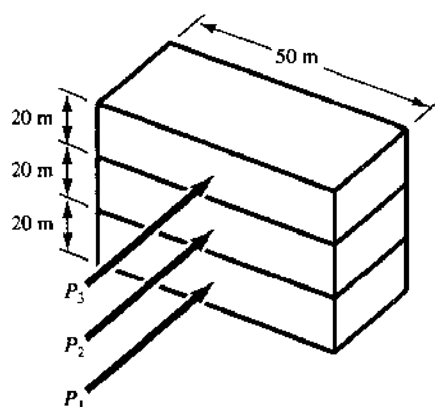


图 4-13

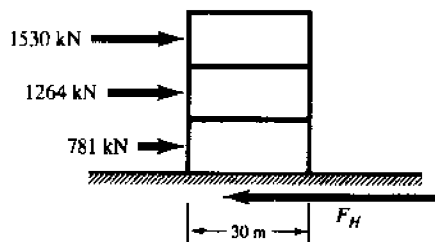


图 4-14

可以认为这些力均作用在每层的半高度上，楼房的分离体图如图 4-14 所示，其中 F_H 表示由基础施加在楼房上的水平反力。水平方向的平衡方程，有

$$\sum F_H = 1530 + 1264 + 781 - F_H = 0$$

$$F_H = 3575 \text{ kN}$$

如果我们认为这个水平的反力均匀地分布在结构的基础上，那么由(4.1)式可以得到水平剪应力为

$$\tau = \frac{3575\text{kN}}{(30\text{m})(50\text{m})} = 2.38\text{kN/m}^2$$

此即为基础应具备的抗剪切能力。

题 4.10 在北大西洋，冰山(经常重达 8000 MN 以上)常会对海上交通构成威胁，目前的技术可将其拖至无危险的地方。具体作法是用一艘无人驾驶的遥控潜水艇在冰山的水下约 30 m 处钻一个洞，然后在洞中插入 个圆筒形的插桩，如图 4-15 所示。插桩是一个直径为 100 mm 的圆钢管，用通过钢管内的一个小孔喷射二氧化碳的方法将插桩牢固地固结在冰山孔内。这些气体很快结冰，并填在钢管和冰山孔之间的窄小圆柱形空间内。用一根钢缆将插桩的露出端和牵引船连接起来。如果固态二氧化碳的许可剪应力为 0.5 MPa，试确定圆柱形插桩的长度，以使得牵引力为 200 kN 时不至于将插桩从冰山中拉出。

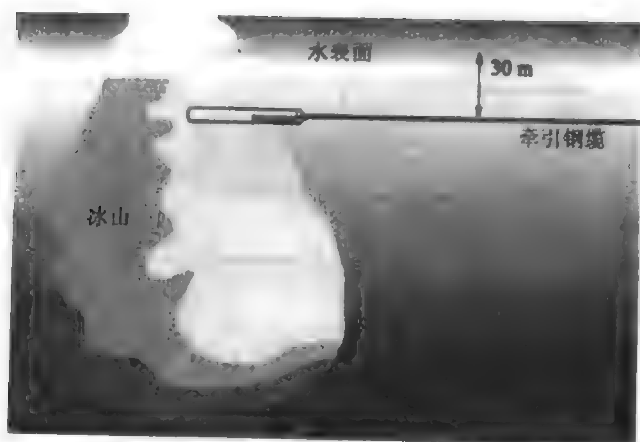


图 4-15

解 ☞ 圆钢管(插桩)的分离体图如图 4-16 所示，图中：T 表示钢缆施加在插桩上的牵引力，τ 是固态二氧化碳中的剪应力。假设剪应力沿插桩长度及圆周方向均是均匀分布的。由水平向平衡方程，有

$$\sum F_H = T - \pi D L \tau = 0$$

$$200000\text{N} - \pi(0.1\text{m})L(0.5 \times 10^6\text{N/m}^2) = 0$$

解出

$$L = 1.27\ \text{m}$$

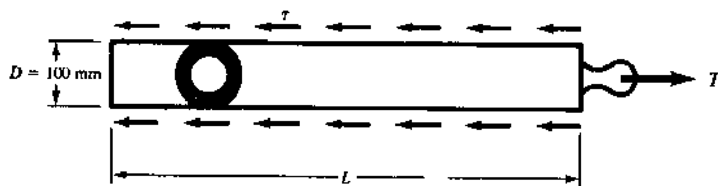


图 4-16

题 4.11 有时需要设计某种特殊的结构扣件,该扣件拉伸强度很高,而横向剪切强度较差,四引擎宽体飞机的现代设计中就可以找到这样的例子。每个引擎都是用铝合金螺栓连接在机翼内的主框架上的(见图 4-17(a)),这种螺栓足以支持引擎的重量以及飞行中的附加载荷。然而合金冶炼时要保证每个螺栓只能承担在偶然事件强迫着陆中发生的、适度的横向剪切力,以致可使引擎脱离机翼。

如果每个螺栓的剪切强度极限是 120 MPa,直径是 20 mm,用四个螺栓将引擎牢靠地连接在机翼上。试求作用在引擎和地面之间的、可以使引擎脱离机翼的水平力。

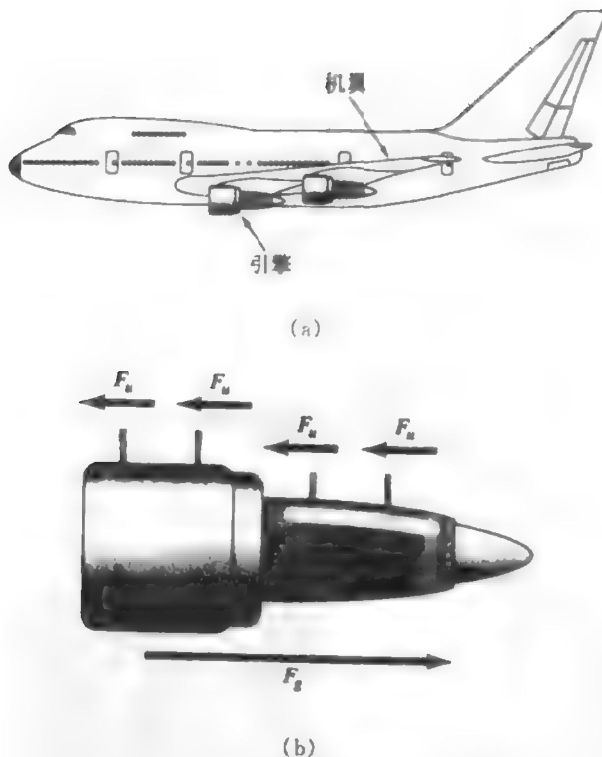


图 4-17

解 ☞ 引擎和 4 个螺栓的分离体图如图 4-17(b)所示,图中 F_u 是每个螺栓的极限剪切力。($F_u = \tau_u A$),式中 τ_u 是极限剪应力,A 是每个螺栓的截面积,F_g 是地面加在引擎底部的力。要指出的是,机身的下侧高于引擎底部。注意到

$$F_u = \frac{\pi}{4}(0.020\text{m})^2(120 \times 10^6\text{N/m}^2) = 37.7\text{kN}$$

水平向平衡方程为(略去动力影响)

$$\sum F_H = F_g - 4F_n = 0, F_g = 4(37.7) = 151\text{kN}$$

题 4.12 发电机的某个承拉零件(见图 4-18)是用 304 不锈钢制成的,板厚 2.5 in。相邻的端焊截面是在局部真空中用 200 kW 功率的电子束焊接设备焊接的。母体钢材的强度极限为 160000 lbf/in²。如果焊接是 100% 有效的,试确定宽 14 in 的截面能传递的力,若焊接是 80% 有效,这力又该是多少。

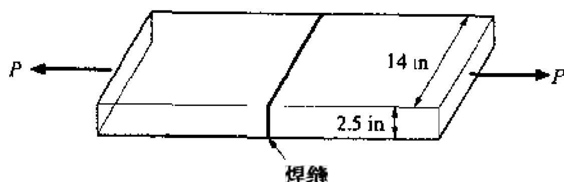


图 4-18

解 ☞ 若焊接是 100% 有效,横截面积为(14 in)(2.5 in) = 35 in²,许可载荷将由下式给出 $P = (35\ \text{in}^2)(160000\ \text{lbf/in}^2) = 5.6\times10^6$ lbf

若焊接为 80% 有效,许可载荷为

$$P = (5.6\times10^6\text{lbf})(0.80) = 4.48\times10^6\text{lbf}$$

题 4.13 两块厚度为 1/16 in、宽度为 1.75 in 的钛合金板条,使用激光束沿 45°坡口焊接,如图 4-19。焊接工作是用 100 kW 二氧化碳激光系统进行的。如果钛合金的许可剪应力为 65000 lbf/in²,焊接为 100% 有效,试求许可载荷 P。

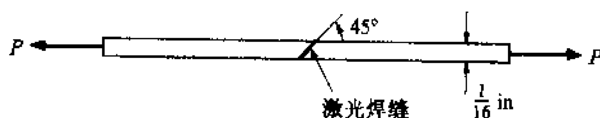


图 4-19

解 ☞ 右侧板条的分离体图如图 4-20 所示,其中,σ 表示 45°焊缝截面内的法应力,τ 表示剪应力。当然,这些都是单位面积上的力,应将之与 45°截面的面积 $bt/\cos45°$ 相乘,t 为板条厚度,b 为板条宽度。横向(45°截面的切向)的平衡方程为

$$\sum F_t = \tau\left(\frac{bt}{\cos45°}\right) - P\cos45° = 0,\ \tau = \frac{P\cos^2 45°}{bt}$$

$$65000\ \text{lbf/in}^2 = \frac{P(1/\sqrt{2})^2}{(1.75\text{in})(1/16\text{in})}$$

解出

$$P = 7110\ \text{lbf}$$

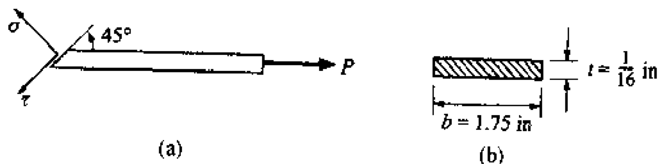


图 4-20

4.11 习　题

题 4.14 在题 4.1 中,如果许可剪应力为 14000 lbf/in²,试求螺栓直径,以使工作应力不致超过许可应力。(答案:$d = 0.585$ in)

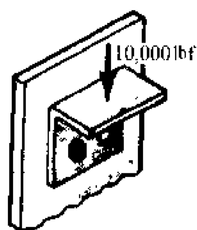


图 4-21

题 4.15　冲头的直径是 20 mm,用此冲头欲在厚 10 mm 的钢板上冲孔,如果所需要的冲压力是 250 kN,试求材料中的最大剪应力。(答案:$\tau=400$ MPa)

题 4.16　在结构工程中,钢制角钉经常被用来将水平桁条的载荷传递至铅直柱上。如果水平桁条对角钉的作用力是 10000 lbf(向下),如图 4-21 所示。此力由两个直径为 7/8 in 的铆钉承担并传递,试求每个铆钉中的平均剪应力。与题 4.5 相同,仍假设铆钉充满钉孔,且钉孔直径较铆钉大 1/16 in。(答案:7200 lbf/in^2)

题 4.17　皮带轮用键和直径 60 mm 的轴连接(防止相对转动),不等的皮带张力 T_1 和 T_2 作用在皮带轮的两边,形成转矩 120 N·m。键的长度为 75 mm,截面尺寸为 10×15 mm,如图 4-22 所示。试求键水平截面内的平均剪应力。(答案:$\tau=5.33$ MPa)

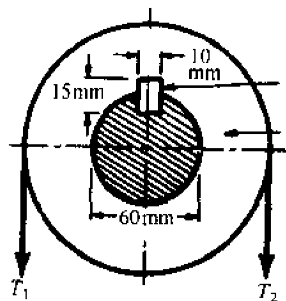


图 4-22

题 4.18　考虑如图 4-23 所示的轴台结构。水平台承受轴对称分布的载荷,其合力为 80 kN。心轴直径 500 mm,台与轴是上、下双面焊接的,焊缝为 10×10 mm,其放大后如图所示。试求焊缝内的平均剪应力。(答案:2.5 MPa)

题 4.19　如图 4-24 所示的、双填角焊接的两块等厚度钢板。试求焊缝中的最大剪应力。(答案:0.707 P/ab)

题 4.20　外径 55 mm、壁厚为 5 mm 的铜管套装在直径为 40 mm 的钢棒外,用两个直径 8 mm 的金属销钉横穿铜管和钢棒,各有一个销钉靠近铜管、钢棒组件的端部,将它们固结在一起,室温时组件内是无应力的。今令组件升温 40℃,求销钉的平均剪应力。(铜 $E=90$ GPa, $\alpha=18\times10^{-6}$/℃, 钢 $E=200$ GPa, α　12×10^{-6}/℃)(答案:$\tau=132$ MPa)

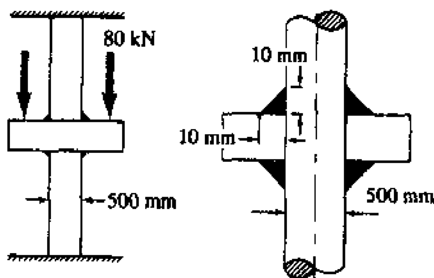


图 4-23

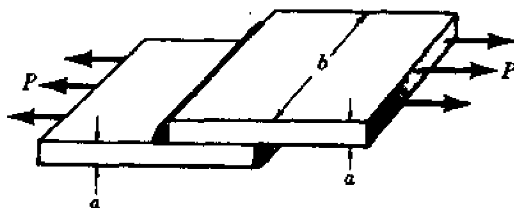


图 4-24

题 4.21　在骨科治疗中。为保持已骨折的腿或手臂的理想长度,必须使用植入手术。因此,人骨的剪切强度将是一个很重要的参数。有时植入一段动物的骨骼,但必须选择与人骨具有相同横向剪切强度的骨骼。为此,首先应考虑作图 4-25 所示的实验,如果动物骨骼的截面积是 150 mm^2,为将骨骼剪断,所需横向力 $F=600$ N,试求平均横向剪应力。(答案:2 MPa)

题 4.22　在飞机以及汽车加工中,两块薄金属板经常用单搭粘接,如图 4-26 所示。若金属板厚 2.2 mm,环氧树脂粘结金属时的剪切强度极限为 2.57×10^4 kPa,环氧树脂的剪切模量是 2.8 GPa,粘结在搭接面积 12.7×25.4 mm 内都是有效的,试求此种连接所能承担的最大轴向力。(略去由于两块板不在

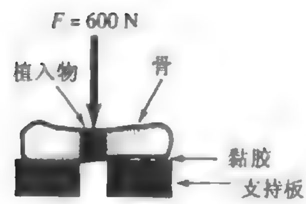


图 4-25

同一平面内产生的少许弯曲影响。)(答案:8290 N)

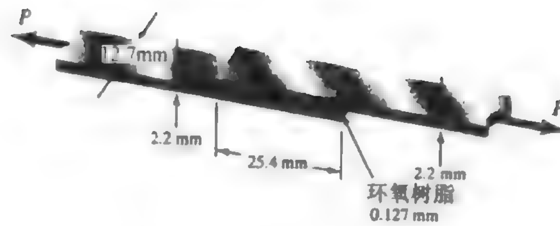


图 4-26

题 4.23 如果题4.22中环氧树脂的剪切模量是2.8GPa,粘结层的厚度是0.127 mm,试求破坏过程中两层金属板的相对轴向位移。(答案:0.0017 mm)

第5章 扭　转

5.1 扭转的定义

考虑一个一端固定，另端承受扭转力偶（转矩）$T = Fd$ 作用的杆件，该扭转力偶作用在与杆轴垂直的平面内，如图5-1所示，这样的杆件处于扭转之中。扭转力偶的另一种表示方法是一个沿杆轴的双箭头矢量。

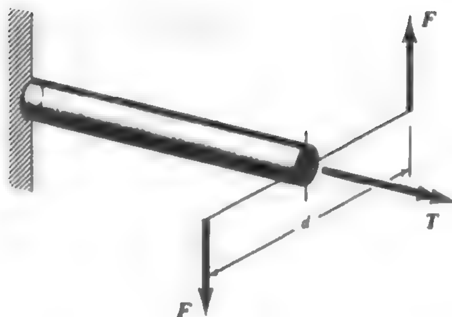


图5-1

5.2 扭　矩

有时可能会有若干个力偶沿轴的长度作用，在这种情况下，为方便引入一个新的物理量——扭矩。任意一个截面内的扭矩等于其一侧作用在轴上的力偶矩的代数和，至于选择哪一侧，在所有情况下均是任意的。

5.3 极惯性矩

对于外径 D_0，同心内孔直径 D_i 的空心圆轴，其横截面的极惯性矩通常用 J 来表示，计算公式为

$$J = \frac{\pi}{32}(D_0^4 - D_i^4) \tag{5.1}$$

实心圆轴的极惯性矩可由令 $D_i = 0$ 得到，见题5.1，极惯性矩 J 是横截面的几何（数学）性质。通常会在研究圆轴扭转应力时用到。

将上述公式写成如下形式有时会更便于应用

$$J = \frac{\pi}{32}(D_0^2 + D_i^2)(D_0^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{32}(D_0^2 + D_i^2)(D_0 + D_i)(D_0 - D_i)$$

对于外、内径差 $(D_0 - D_i)$ 是很小的量时，此处的最后一个表达式对 J 的数值计算是很有用的。见题5.6。

5.4 扭转剪应力

无论实心圆轴还是空心圆轴，扭转剪应力 τ 均可用下式计算：

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{5.2}$$

式中 ρ 是计算剪应力处与圆轴中心的距离，这个公式是在题 5.2 中导出的。此式的应用可参阅题 5.4，题 5.5，题 5.9，题 5.10 和题 5.11。上式所表达的应力分布由轴中心的零(实心轴)变化之外缘处的最大，如图 5-2。需要强调指出的是：轴内任一点处的剪应力均不应超过材料(剪应力)的比例极限。

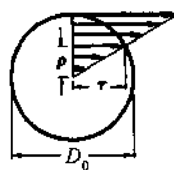


图 5-2

5.5 剪应变

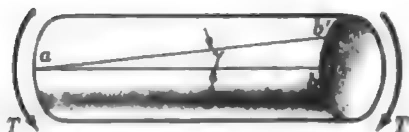


图 5-3

如果在未加载的圆轴上沿母线作一标记直线 $a-b$，那么在扭转力偶矩 T 作用之后，线 $a-b$ 将运动至 $a-b'$ 处，如图 5-3 所示。在圆轴表面上用弧度度量的、母线起始及终止位置之间的角度 γ，定义为圆轴表面上的剪应变。同样的定义也适用于圆轴内部的各点。

5.6 剪切模量

剪应力与剪应变的比值叫做剪切模量，与第 4 章相同，由下式计算：

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \tag{5.3}$$

我们再一次指出，G 的单位与剪应力相同，因为剪应变是无量纲量。

5.7 扭转角

如果长度为 L 的圆轴，在其两端受到常量力偶 T 的扭转，则其一端对另一端的扭转角 θ 为

$$\theta = \frac{TL}{GJ} \tag{5.4}$$

其中 J 是截面的极惯性矩，见图 5-4。这个方程式是在题 5.3 中导出的，其应用可见题 5.5，题 5.7，题 5.8，题 5.11，题 5.12 和题 5.13。这个表达式仅对于纯弹性扭转时才是正确的。

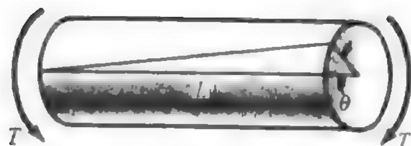


图 5-4

5.8 计算机解法

对于变径的圆截面轴，扭转角 θ 可用下述方法计算，即将圆轴沿其长度分割为若干个子段，对于每一个子段，均可将其直径取为一个常数。这种计算过程非常适合于应用计算机，相应的 FORTRAN 计算程序由题 5.14 给出(也可见题 5.15)。

5.9 动力传动

以定常角速度 ω(r/s)旋转的圆轴，由于承受的扭转力偶矩是 T，因此传动的功率是 $P=T\omega$。此外，如果将转速表示为每秒内的转数 f，则传动的功率是 $P=2\pi fT$（见题5.9，题5.10和题5.11）。

5.10 圆轴的塑性扭转

如果作用在实心圆轴上的扭矩不断增加，扭矩的数值总会达到使圆轴最外侧纤维的应力等于材料的屈服点。这是圆轴能承受的最大的可能弹性扭矩，用 T_e 表示。扭矩的进一步增长将使里面材料纤维达到屈服点，随之屈服过程由外部向内部发展。极限状态发生在所有纤维的剪应力都达到屈服点时，此时的扭矩为完全塑性扭矩，用 T_p 表示。如果我们不再考虑超过剪切屈服点的应力，则 T_p 就是该轴所能承担的最大可能扭矩。对于受扭的实心圆轴可参阅题5.21，且有 $T_p=4T_e/3$。

5.11 例 题

题5.1 导出空心截面圆轴以及实心圆轴的极惯性矩表达式。

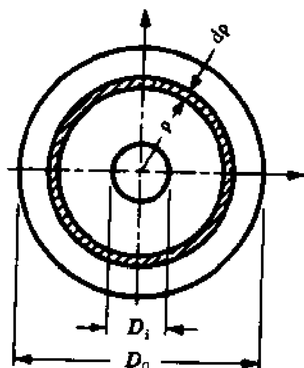


图 5-5

解 ☞ 令 D_0、D_i 分别表示空心圆轴的外、内径，由于轴对称性，选择极坐标最为方便，如图5-5：

根据定义，极惯性矩应由下述积分计算，

$$J=\int_A \rho^2 da$$

式中积分限 A 表示上述积分是在整个横截面上进行的。

为了计算上述积分，选择半径为 ρ、径向宽度为 $d\rho$ 的窄圆环作为积分面积元素，如图示。这个圆环面积 $dA=2\pi\rho(d\rho)$，于是

$$J=\int_{D_i/2}^{D_0/2}\rho^2(2\pi\rho)d\rho=\frac{\pi}{32}(D_0^4-D_i^4)$$

极惯性矩的单位是：in^4 或 m^4。对于实心圆轴的特殊情况，上式变为 $J=\pi D^4/32$，式中 D 为圆轴的直径。

题5.2 试导出圆截面轴的扭矩和轴内任意点处的剪应力之间的关系。

解 ☞ 如图5-6(a)所示，圆轴承受两个扭转力偶 T 作用，处于平衡。为了确定该轴内的剪应力分布规律，仍用一个垂直于轴线的平面切割该轴。

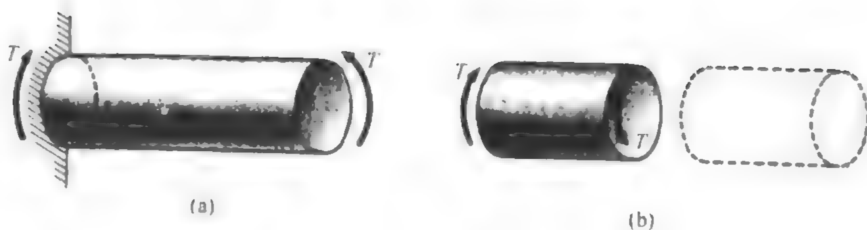


图 5-6

上述切平面左侧轴段的分离体图如图5-6(b)所示。因为整个圆轴是平衡的，因而它的任何部分也都应是平衡的，显然在切出来的截面内也应有扭转力偶 T 的作用，它表示右轴段的作用。因

为右轴段已被除去,因此应将其对左轴段作用的效果加在该轴段上,这个效果即为扭矩 T。当然这个扭矩 T 也是截面内分布剪应力合成的结果。为了导出剪应力在截面内的分布规律,需作某些假设。

基本假设之一是:垂直于轴线的平截面加载之后仍为垂直于轴线的平面。这个假设对于圆轴是正确的,但它不适用于非圆截面轴。

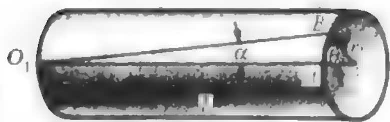


图 5-7

圆轴表面上的一条母线 O_1A,如图 5-7 所示,在扭转发生之后,变化至位形 O_1B 的位置,两种位形之间的夹角用 α 表示。根据定义,圆轴表面的剪应变 γ 是

$$\gamma = \tan\alpha \approx \alpha$$

此处 α 是用弧度度量的。由图形的几何关系,有

$$\alpha = \frac{AB}{L} = \frac{r\theta}{L}$$

由此可以有

$$\gamma = \frac{r\theta}{L}$$

注意到轴段的直径形变后仍保持直线,因此距离轴心 ρ 处的剪应变可以写作为 $\gamma_\rho = \rho\theta/L$,亦即:纵向纤维的剪应变与其距中心的距离成线形关系。

如果假设只研究材料的线性范围,则剪应力与剪应变成比例,亦即纵向纤维的剪应力也与其到中心的距离成线性关系。显然,剪应力的分布相对于圆轴的轴线是轴对称的,如图 5-8 所示。

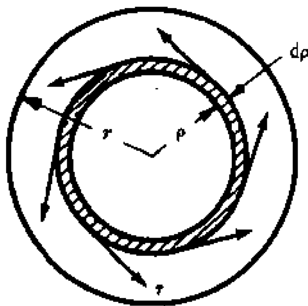


图 5-8

为维持静力平衡,整个圆截面上分布剪应力的微力矩之和等于扭矩,亦即图 5-6(b)所示的 T,即

$$T = \int_0^r \tau\rho \mathrm{d}a$$

其中 da 表示图 5-8 中的阴影环形单元体的面积。注意到剪应力与到轴线的距离成正比,即

$$\frac{\tau_\rho}{\rho} = \frac{\tau_r}{r} = \text{常数}$$

式中剪应力字母下标表示单元体与轴线的距离。于是我们可写出

$$T = \int_0^r \frac{\tau_\rho}{\rho}(\rho)^2 \mathrm{d}a = \frac{\tau_\rho}{\rho}\int_0^r \rho^2 \mathrm{d}a$$

注意到(τ_ρ/ρ)为常数,可将之移到积分号以外。因为 $\int_0^r \rho^2 \mathrm{d}\rho$ 是截面的极惯性矩,已在题 5.1 中导出实心和空心圆轴极惯性矩的公式。因此待求的关系是

$$T = \frac{\tau_\rho J}{\rho} \quad 或 \quad \tau_\rho = \frac{T\rho}{J}$$

最后,要强调的是,只有轴内任何一点处的应力均不超过材料的比例极限时,上述公式才是正确的。

题 5.3 试导出圆轴扭转角和扭矩之间的函数关系。假设整个圆轴始终处于材料的弹性范围之内。

解 ☞ 令 L 表示圆轴的长度,J 表示截面的极惯性矩,T 为扭转力偶矩(沿轴的长度为常数),G 为剪切模量。在长度 L 内的扭转角用 θ 表示,如图 5-9。

由题 5.2,可知在 $\rho = r$ 处最外层纤维的应力和应变为

$$\tau_r = \frac{Tr}{J}, \quad \gamma_r = \frac{r\theta}{L}$$

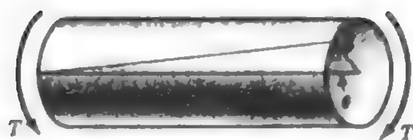


图 5-9

根据定义，剪切模量可由下式给出：

$$G=\frac{\tau}{\gamma}=\frac{Tr/J}{r\theta/L}=\frac{TL}{J\theta}$$

由此解出

$$\theta=\frac{TL}{GJ}$$

注意，θ 是用弧度(rad)表示的，亦即它是无量纲量。

有时，单位长度的扭转角是很有用的，它经常用 ϕ 表示，$\phi=\theta/L=T/GJ$。

题 5.4 已知由钢($G=12\times10^6$ lbf/in^2)制成的、直径为 7/4 in 的圆轴，长度为 4 ft。若扭矩为 10000 lbf·in，试求最大的剪应力和扭转角各是多少？

解 ☞ 由题 5.1 截面的极惯性矩为

$$J=\frac{\pi}{32}(D_0)^4=\frac{\pi}{32}\left(\frac{7}{4}\right)^4=0.92(\text{in}^4)$$

在题 5.2 中给出距圆轴中心 ρ 处的扭转剪应力为 $\tau_\rho=T\rho/J$，因而在外层 $\rho=7/4$* in 处最大的剪应力为

$$\tau_{\max}=\frac{10000(7/4)}{0.92}=19000(\text{lbf/in}^2)$$

因此，剪应力由轴截面中心的零线性变化至最外层的 19000 lbf/in^2，如图 5-10 所示，扭转角 θ 为

$$\theta=\frac{TL}{GJ}=\frac{10000(48)}{12\times10^6(0.92)}=0.0435\text{rad}$$

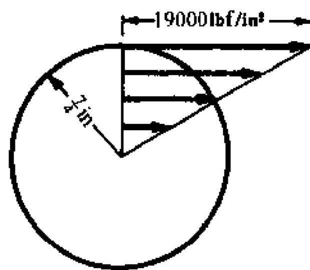


图 5-10

题 5.5 长度为 3 m 的空心圆轴传递的扭距为 25 kN·m，若规定全长扭转角不得超过2.5°，且许可剪应力为 90 MPa，试求该轴的内径和外径。(材料的 $G=85$GPa)

解 ☞ 令 d_0 和 d_i 分别表示该轴的外、内径。由(5.4)式可有扭转角 $\theta=TL/GJ$，式中 θ 用弧度表示。于是在 3 m 的长度内，有

$$2.5^\circ\left(\frac{\text{rad}}{57.3^\circ}\right)=\frac{(25000\text{N}\cdot\text{m})(3\text{m})}{(85\times10^9\text{N/m}^2)(\pi/32)(d_0^4-d_i^4)}$$

解出

$$d_0^4-d_i^4=(206\times10^{-6})\text{m}^4$$

最大的剪应力发生在最外层纤维 $\rho=d_0/2$ 处，由式(5.2)，有

$$90\times10^6\text{N/m}^2=\frac{(25000\text{N}\cdot\text{m})(d_0/2)}{(\pi/32)(d_0^4-d_i^4)}$$

或

$$d_0^4-d_i^4=(1414d_0)(10^{-6})\text{m}^4$$

由以上两式的右侧可知

$$206\times10^{-6}=1414d_0(10^{-6})$$

可解出 $d_0=0.145$ m，将此数值代入上述两个方程中的任一个，可得到 $d_i=0.125$ m。

题 5.6 考虑一个受扭转的薄壁管，若材料的许可剪应力为 τ_w，试导出许可扭距的近似表达式和强度-重量比的近似表达式。设此薄壁管不会发生屈曲，且始终工作在弹性范围之内。

解 ☞ 外径为 D_0、内径为 D_i 的空心圆轴的极惯性矩为 $J=(\pi/32)(D_0^4-D_i^4)$。如果 R 表示此管的外径，那么 $D_0=2R$。其次，t 表示钢管的壁厚，则 $D_i=2R-2t$。

极惯性矩 J 可写成另一种形式。

$$J=\frac{\pi}{32}[(2R)^4-(2R-2t)^4]=\frac{\pi}{2}[R^4-(R-t)^4]$$

$$=\frac{\pi}{2}(4R^3t-6R^2t^2+4Rt^3-t^4)$$

* 原书此题外层纤维 ρ、$\tau_{\max}$及图 5-10 均有错。——译者注

$$=\frac{\pi}{2}R^4\left[4\left(\frac{t}{R}\right)-6\left(\frac{t}{R}\right)^2+4\left(\frac{t}{R}\right)^3-\left(\frac{t}{R}\right)^4\right]$$

因为考虑的是薄壁管，可略去式中(t/R)二次方及其以上的高阶项，极惯性矩的近似式为 $J=2\pi R^3 t$。

通常的扭矩公式是 $T=\tau_w J/R$，对于薄壁管许可扭矩的公式为 $T=2\pi R^2 t\tau_w$。

此钢管的重量是 $W=\gamma LA$，其中 γ 是材料的比重，L、A 分别是钢管的长度和截面积。截面积应等于

$$A=\pi[R^2-(R-t)^2]=\pi(2Rt-t^2)=\pi R^2\left[\frac{2t}{R}-\left(\frac{t}{R}\right)^2\right]$$

再次略去(t/R)的平方项，$A=2\pi Rt$。

强度-重量比定义为 T/W，即

$$\frac{T}{W}=\frac{2\pi R^2 t\tau_w}{2\pi RtL\gamma}=\frac{R\tau_w}{L\gamma}$$

在圆轴的设计中，上述比值是需要考虑的重要指标。

题 5.7 实心圆轴由一端到另一端呈缓慢均匀变化的锥形。小端的半径为 a，大端的半径为 b，且 $b=1.2a$。如果用平均半径计算此轴的扭转角，试考查其误差。

解 ☞ 我们建立一个坐标系，用变量 x 表示与圆轴小直径端的距离，如图 5-11。在 x 处截面的半径是

$$r=a+\frac{(b-a)x}{L}$$

其中 L 是圆轴的长度。

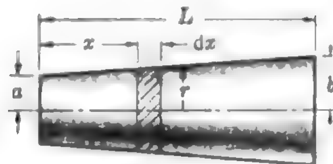


图 5-11

注意到锥角是很小的，考虑长度为 dx 的阴影单元体的扭转角 $d\theta$ 将是有效的，这可将扭转角的公式 $\theta=TL/GJ$ 应用于单元体，该单元体的长度是 dx，半径是 $r=a+[(b-a)x/L]$。对这样的单元体，极惯性矩是

$$J=\frac{\pi}{32}D^4=\frac{\pi}{2}r^4=\frac{\pi}{2}\left[a+\frac{(b-a)x}{L}\right]^4$$

于是，扭转角

$$d\theta=\frac{T\,dx}{G\frac{\pi}{2}\left[a+\frac{(b-a)x}{L}\right]^4}$$

将上式积分，可得到长度 L 内的扭转角，即

$$\theta=\frac{2T}{G\pi}\int_0^L\frac{dx}{\left[a+\frac{(b-a)x}{L}\right]^4}=\frac{2T}{G\pi}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{L}{b-a}\right)\left[\frac{1}{\left[a+\frac{(b-a)x}{L}\right]^3}\right]_0^L$$

$$=\frac{2TL}{3G\pi(b-a)}\left(-\frac{1}{b^3}+\frac{1}{a^3}\right)$$

如果 $b=1.2a$，上式变为 $\theta=1.40433TL/(G\pi a^4)$。对于半径为 $1.1a$ 的实心圆轴，有

$$\theta_1=\frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(1.1a)^4}=\frac{1.36602TL}{G\pi a^4}$$

利用 θ 和 θ_1 的数值，可以得到

$$\text{百分比误差}=\frac{0.03831}{1.40433}\times100\%=2.73\%$$

题 5.8 如图 5-12(a)所示，两个实心的圆轴用节圆直径分别为 2 in 和 10 in 的齿轮啮合连接，假设两个圆轴均用轴承适当支承，以使其避免承受弯曲。已知左轴 AB 是由钢制成的 $G=12\times10^6$ lbf/in²，右轴 CD 是由黄铜制成的，$G=5\times10^6$ lbf/in²，两轴均工作在弹性范围。今有扭转力偶矩 2500 lbf·in 作用在 D 端，试求 D 端（CD 轴的右端）相对于 A 端（AB 轴的左端）的扭转角。

解 ☞ 右轴 CD 的分离体图（图 5-12(b)）指出了必有一个力 F 作用在小齿轮 C 上，由平衡条件可知，$F=2500$ lbf。

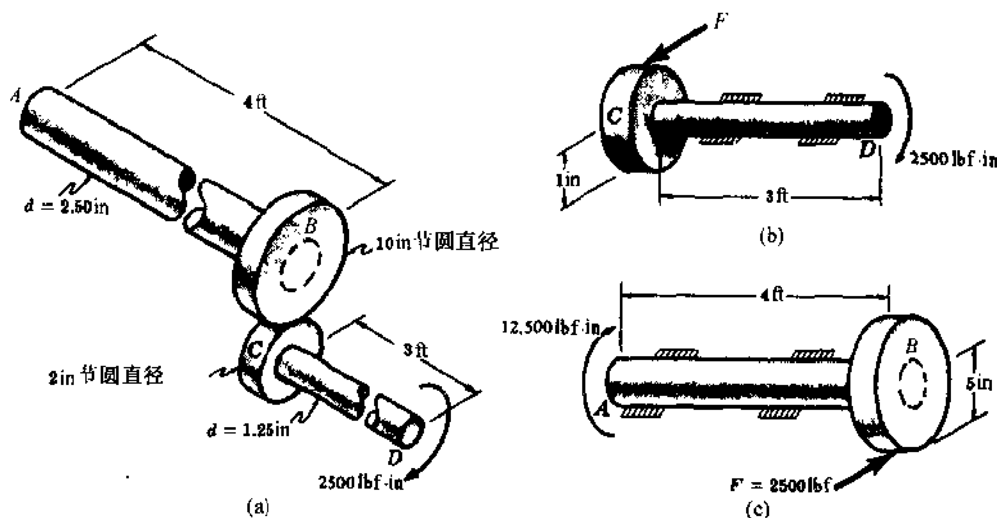


图 5-12

右轴 CD 的扭转角为

$$\theta_1 = \frac{TL}{GJ} = \frac{2500(36)}{(5\times10^6)(\pi/32)(1.25)^4} = 0.0750\text{rad}$$

左轴 AB 的分离体图，如图 5-12(c)所示，力 F 与作用在小齿轮 C 上的力等值、反向。这个力作用在距离左轴 AB 中心线 5 in 处，因此它加在 AB 轴上的扭转力偶矩为 5(2500) = 12500 lbf·in，为此 B 端相对于 A 端的扭转角 θ_2 为

$$\theta_2 = \frac{(12500)(48)}{(12\times10^6)(\pi/32)(2.5)^4)} = 0.0130\text{rad}$$

要特别指出，扭转角 θ_2 将引起 CD 轴的刚体转动，齿轮 C 和齿轮 B 的转数比与两轮节圆直径成反比，即 5:1。因此由 θ_2 引起 CD 轴的刚体转动为 5(0.0130) = 0.0650 rad，应将此刚体转动叠加在先前的 D 端相对于 C 端的转动角 θ_1 之上。因此 D 端相对于 A 端的合成扭转角为

$$\theta = 5(0.0130) + 0.0750 = 0.14\text{rad}$$

题 5.9　转速为 1.5 r/s 的实心圆轴需传递的功率为 200 kW，如果许可剪应力是 42 MPa，试设计轴径。

解　☞ 在 SI 系统中，功率是用 N·m/s 表示的，根据定义 1 N·m/s = 1W。功率又可由 $P = T\omega$ 给出，其中 T 是扭矩，ω 是轴的角速度，用 rad/s 表示。功率的另一种计算式为 $P = 2\pi fT$，其中 f 是每秒转数，或称为"Hz"。于是

$$200000\text{N}\cdot\text{m/s} = 2\pi\ \ (1.5\text{转/s})T$$

$$T = 21230\text{N}\cdot\text{m}$$

由题 5.2，可知外层纤维的最大剪应力为 $\tau = 16T/(\pi d^3)$，即

$$42\times10^6\text{N/m}^2 = \frac{16(21230\text{N}\cdot\text{m})}{\pi d^3}$$

解出

$$d = 138\text{ mm}$$

题 5.10　实心圆轴的转速是 200 r/min，传递的功率为 70 hp，材料的许可剪应力是 7000 lbf/in²，试求传动轴的直径。

解　☞ 在 USCS 系统中，功率是用"lbf·in/s"来表示的。根据定义"6600 lbf·in/s"是 1 hp，功率又可用 $P = T\omega$ 计算，式中 T 为扭矩，ω 为轴的角速度（单位是"rad/s)；或 $P = 2\pi fT$，其中 f 是每秒转数，通常又称为"Hz"。于是

$$70(6600\text{lbf}\cdot\text{in/s}^2) = 2\pi\left(\frac{200\text{r}}{1\text{min}}\cdot\frac{1\text{min}}{60\text{s}}\right)T$$

解出

$$T = 22070 \text{ lbf} \cdot \text{in}$$

由式(5.2),可有轴的外部纤维处的峰值剪应力为

$$\tau = \frac{T(d/2)}{J} = \frac{T(d/2)}{\pi d^4/32} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

代入数据,有

$$7000\text{lbf/in}^2 = \frac{(16)(22070\text{lbf} \cdot \text{in})^*}{\pi d^3}$$

解出 $d = 2.52$ in

题 5.11 长度为 10 ft,直径为 2 in 的实心圆轴,在其中间位置由绕过皮带轮的皮带传入的功率是 65 hp,此功率将被用作驱动两台机械,其中一台在轴的左端,需用功率 25 hp,另一台在右端,需用功率 40 hp。此轴的转速为 200 r/min,材料是钢 $G = 12 \times 10^6$ lbf/in^2。试求最大的剪应力以及此轴两端的相对扭转角。

解 ☞ 在轴的左半段,扭矩 T_1 与功率 25 hp 相对应,有

$$T_1 = \frac{63000 \times \text{hp}}{n} = \frac{63000(25)}{200} = 7880(\text{lbf} \cdot \text{in})$$

类似地,在轴的右半段扭矩 T_2 与功率 40 hp 相对应,有

$$T_2 = \frac{63000(40)}{200} = 12600(\text{lbf} \cdot \text{in})$$

因而最大剪应力发生在右半段轴的最外侧纤维内,按一般的计算公式

$$\tau_\rho = \frac{T\rho}{J}, \text{或 } \tau = \frac{12600(1)}{(\pi/32)(2)^4} = 8000(\text{lbf/in}^2)$$

左端和右端相对于中间截面的扭转角分别是

$$\theta_1 = \frac{7880(60)}{12 \times 10^6(\pi/32)(2)^4} = 0.025(\text{rad})$$

$$\theta_2 = \frac{12600(60)}{12 \times 10^6(\pi/32)(2)^4} = 0.0401(\text{rad})$$

因为 θ_1、θ_2 是同方向的转角,因而轴两端的相对扭转角为

$$\theta_1 = \theta_2 - \theta_1 = 0.0151\text{rad}$$

题 5.12 实心的圆轴一端固定,另端自由,承受沿其长度均匀分布的外力偶作用,外力偶矩的集度为 t[见图 5-13(a]。该轴的抗扭刚度为 GJ,试求此轴自由端的扭转角。

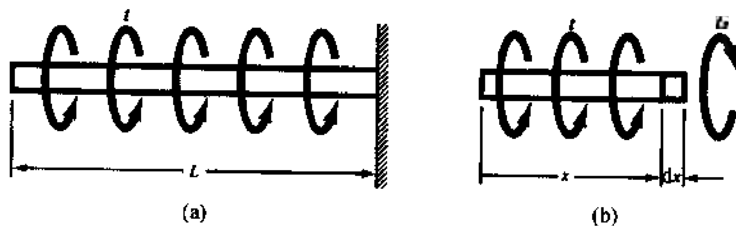


图 5-13

解 ☞ 单位长度的扭转外力偶矩用 t 表示,引入一个原点在左端的坐标 x。位于左端和截面 x 之间的轴段分离体图如图 5-13(b)所示。在此图上还画出了长度为 dx 的单元体,我们希望首先确定圆轴段 dx 的扭转角;为保持分离体绕轴线的平衡,在单元体的右端面上的扭矩为 tx,如图示。扭矩 tx 使长度为 dx 的单元体发生扭转角(由题 5.3),为

$$d\theta = \frac{(tx)dx}{GJ}$$

圆轴左端相对于右端的扭转角,即自由端的扭转角,可由上述单元体扭转角的积分得到,

* 原书此处有错。——译者注

$$\theta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{(tx)\mathrm{d}x}{GJ} = \frac{tL^2}{2GJ}$$

题 5.13　实心圆轴一端固定，另一端自由，承受沿其长度呈抛物线变化的分布扭转外力偶作用，如图 5-14(a)所示，在固定端处的外力偶集度为 t_0。该轴的扭转刚度为 GJ，试求自由端的扭转角。

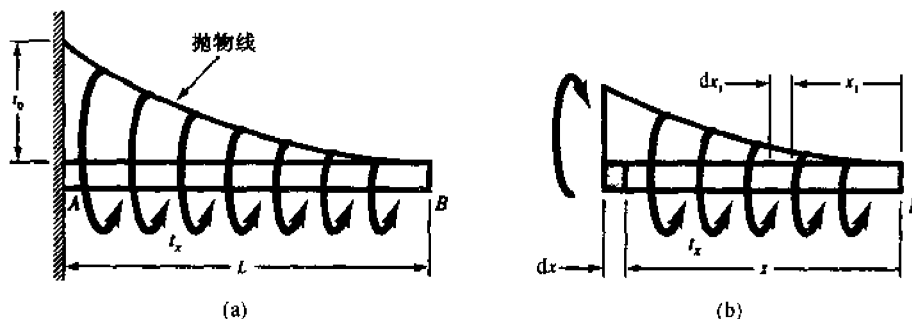


图 5-14

解　☞ 引入原点在 B、正方向指向左方的坐标 x，抛物线方程的一般形式为

$$t_x = ax^2 + bx + c$$

根据给定的载荷，有(a)在 $x=0$ 处，有 $t_x=0$，(b)在 $x=L$ 处，有 $t_x=t_0$，(c)在 $x=0$ 处，有 $\mathrm{d}t_x/\mathrm{d}x=0$。由此可解出：$a=t_0/L^2$，$b=c=0$。因而扭转外力偶矩的分布集度为

$$t_x = \frac{t_0}{L^2}x^2$$

处于右端点 B 和 x 截面之间轴段的分离体图如图 5-14(b)所示。长度为 $\mathrm{d}x$ 的单元体也画在该图上，我们试图去确定此单元体的扭转角。作用在单元体 $\mathrm{d}x$ 上的扭矩可由该圆轴绕其轴线的转动平衡方程得到，且等于到 $\mathrm{d}x$ 右端区段内分布外力偶矩之和，即

$$\int_{x_1=0}^{x_1=x} t_x \mathrm{d}x_1 = \int_{x_1=0}^{x_1=x} \frac{t_0}{L^2}(x_1)^2 \mathrm{d}x_1 = \frac{t_0 x^3}{3L^2}$$

由题 5.3，可知单元体 $\mathrm{d}x$ 的扭转角为 $\mathrm{d}\theta = t_x\mathrm{d}x/GJ$，因此 A 与 B 之间的扭转角可由下述积分计算，即

$$\theta = \int_{x=0}^{x=L} \mathrm{d}\theta = \int_{x=0}^{x=L} \frac{t_x \mathrm{d}x}{GJ} = \int_{x=0}^{x=L} \frac{t_0 x^2}{GJ}\mathrm{d}x = \frac{t_0 L^3}{3GJ}$$

题 5.14　变直径的弹性圆截面轴在其两端承受扭转外力偶作用，如图 5-15 所示。轴径的变化规律既可以用解析式给出，也可以沿轴线长度测量若干个点处的轴径得到。试用 FORTRAN 语言写出计算一端相对于另端扭转角的程序。

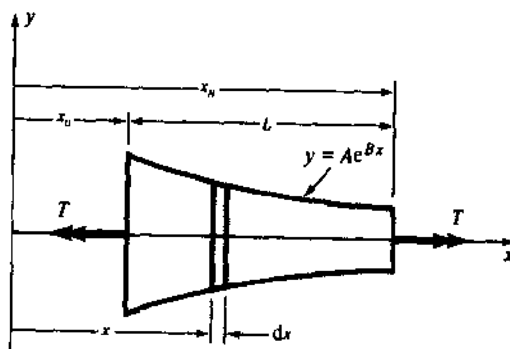


图 5-15

解 ☞ 我们将轴的全长 L 分割为无穷小长度 dx 的单元,对每个单元可以认为其截面为常数,因而可以利用方程 $\theta = TL/(GJ)$ 计算每个单元体的扭转角(见题 5.3),对于长度为 dx 的单元体,此式中的 L 应换为 dx,且 J 是单元体截面的极惯性矩,计算过程可由下述 FORTRAN 程序描述。这个程序可应用于任意的变截面圆轴,其中半径由下述公式描述:$y = Ae^{Bx}$。

```
00010*************************************************************************
00020                    PROGRAM TORSN2(INPUT,OUTPUT)
00030*************************************************************************
00040*
00050*          AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00060*          DATE  : FEBRUARY 5,1989
00070*
00080*   BRIEF DESCRIPTION:
00090*      THIS PROGRAM DETERMINES THE TOTAL ANGLE OF TWIST OF A CIRCULAR
00100*   ROD DUE TO TORSIONAL LOADING. CONSIDER THE ROD TO BE OF SOLID
00110*   CIRCULAR CROSS SECTION WITH A VARIABLE DIAMETER,  LOADED
00120*   BY A UNIFORM TORQUE.
00130*      THE VARYING  DIAMETER (OF THE ROD) MAY  BE DESCRIBED
00140*   EITHER ANALYTICALLY AS  Y = A*E  ^(B*X) ,  WHERE X IS THE
00150*   GEOMETRIC AXIS OF THE ROD, OR NUMERICALLY USING THE MAGNITUDE OF
00160*   Y AT EACH END OF  N SEGMENTS, MEANING N+1 VALUES.
00170*
00180*   INPUT:
00190*      THE USER IS PROMPTED FOR THE TOTAL SHAFT LENGTH, THE SHEAR
00200*   MODULUS, AND THE APPLIED TORQUE. THE USER IS THEN ASKED IF THE
00210*   ROD IS BOUNDED BY A KNOWN FUNCTION...IF THE FUNCTION IS KNOWN, THE
00220*   CONSTANTS AND THE ENDPOINTS OF THE ROD ON THE X-AXIS ARE INPUTTED;
00230*   ALTERNATELY, THE NUMBER OF SEGMENTS AND MEASURED  DIAMETERS
00240*   MUST BE ENTERED.
00250*
00260*   OUTPUT:
00270*      THE TOTAL ANGLE OF TWIST OF THE ROD IS DETERMINED AND PRINTED.
00280*
00290*   VARIABLES:
00300*      L,G         ---   LENGTH,SHEAR MODULUS OF ROD
00310*      A,B         ---   CONSTANTS OF Y=A*E  ^(B*X) GOVERNING ROD BOUNDAR
00320*      X0,XN       ---   ENDPOINTS OF SHAFT ON X-AXIS
00330*      T           ---   CENTRALLY APPLIED TORQUE
00340*      AA(100)     ---   INDIVIDUAL SEGMENT  DIAMETERS
00350*      INER        ---   POLAR MOMENT OF INERTIA OF EACH SMALL INCREMENT
00360*      ANS         ---   DETERMINE IF USER HAS A KNOWN FUNCTION
00370*     TWIST        ---   UNIFORM ANGLE OF TWIST
00380*      LEN         ---   LENGTH OF INCREMENTAL ELEMENT
00390*
00400*****************************************************************************
00410*****************************************************************************
00420*                        MAIN PROGRAM
00430*****************************************************************************
00440*****************************************************************************
00450*
00460*   VARIABLE DECLARATION
00470*
00480    REAL I,T,L,G,A,B,X0,XN,TWIST,AA(100),INER,LEN
00490    INTEGER ANS,NUM,J
00500*
00510*        USER INPUT PROMPTS
00520*
00530    PRINT*,'ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE ROD (IN M OR INCHES):'
00540    READ*,L
00550    PRINT*,'ENTER THE SHEAR MODULUS (IN PASCALS OR PSI) :'
00560    READ*,G
00570    PRINT*,'ENTER THE UNIFORM TORQUE (IN N-M OR LB-IN) :'
00580    READ*,T
00590    PRINT*,'DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE ROD?'
00600    PRINT*,'ENTER  1--YES  ;   2--NO'
00610    READ*,ANS
00620*
00630*        IF ANS EQUALS ONE, THE USER KNOWS FUNCTION. PROMPT
00640*        FOR CONSTANTS AND ENDPOINTS.
00650*
00660    INER  = 0
00670    IF (ANS.EQ.1) THEN
00680       PRINT*,'F(X) = A*E ^(B*X) '
00690       PRINT*,'ENTER A,B:'
00700       READ*,A,B
```

```
00710         PRINT*,'ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE ROD:'
00720         PRINT*,'(IN M OR INCHES):'
00730         READ*,X0,XN
00740*
00750      L=XN-X0
00760      LEN=L/50
00770      DO 20 I = X0,XN,LEN
00780         Y1=A*(2.71828**(B*I))
00790         Y2=A*(2.71828**( B*(I+LEN)))
00800         Y=(Y1+Y2)/2
00810         INER =(2./(3.14159*(Y**4)))+INER
00820 20   CONTINUE
00830*
00840*          IF ANS EQUALS TWO, THE USER DOES NOT KNOW FUNCTION.
00850*          PROMPT FOR NUMBER OF SEGMENTS AND MEASURED DIAMETERS.
00860*
00870      ELSE
00880         PRINT*,'ENTER THE NUMBER OF SECTIONS TO BE CALCULATED:'
00890         READ*,NUM
00900         PRINT*,'ENTER THE DIAMETERS OF THE ENDS FOR SECTIONS 1 TO N:'
00910         PRINT*,'(IN M OR INCHES):'
00920*
00930*          INPUT MEASURED  DIAMETERS
00940*
00950         DO 30 J=1,NUM+1
00960            READ*,AA(J)
00970 30      CONTINUE
00980*
00990         LEN = L/NUM
01000         DO 40 J = 1,NUM+1
01010            Y=(AA(J)+AA(J+1))/4
01020            INER =(2./(3.14159*(Y**4)))+INER
01030 40      CONTINUE
01040      ENDIF
01050*
01060      TWIST = (T*LEN*INER)/G
01070      TWIST = TWIST*180/3.14159
01080      PRINT 50,TWIST
01090*
01100 50   FORMAT(2X,'THE ANGLE OF TWIST IS:',F9.3,' DEGREES.')
01110*
01120      STOP
01130      END
```

题 5.15　如图 5-16 所示变截面实心圆轴，其轴线与 x 轴重合，半径的方程为 $y = 3e^{-0.05x}$，该轴长度由 $x=0$ 至 $x=25$ in。材料的剪切模量 $G = 12\times10^6$ lbf/in^2。此轴在其两端承受扭转力偶矩 23000 lbf·in 作用。试利用题 5.14 的 FORTRAN 程序计算两端的相对扭转角。

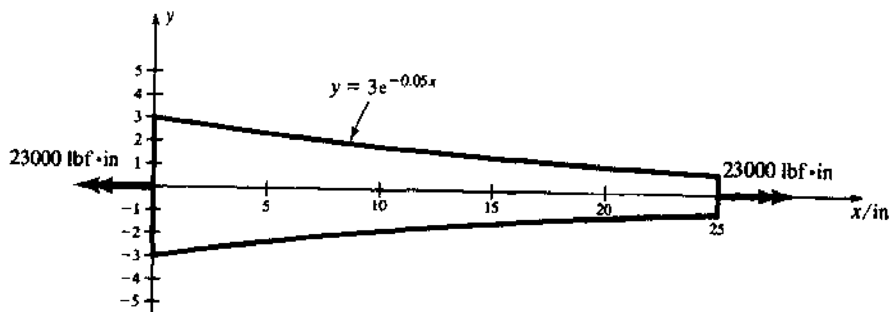


图 5-16

解　☞ 将上述的有关数据输入该程序，运行如下程序：

```
 ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE ROD (IN M OR INCHES):
? 25
 ENTER THE SHEAR MODULUS (IN PASCALS OR PSI) :
? 12E+6
 ENTER THE UNIFORM TORQUE (IN N-M OR LB-IN) :
```

```
? 23000
 DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE ROD?
 ENTER  1--YES  ;   2--NO
? 1
 F(X) = A*E^(B*X)
 ENTER A,B:
? 3,-0.05
 ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE ROD:
 (IN M OR INCHES):
? 0,25
  THE ANGLE OF TWIST IS:     .703 DEGREES.
```

题 5.16 如图 5-17 所示的两端固定圆轴，在轴的左半端 AB 受到集度为 t_1（常数）的分布扭转力偶作用；在右半段 BC 上受到相同集度但转向相反的分布扭转力偶作用。如果已知 $t_1 = 30$ N·m/m, $L = 0.7$ m，许可剪应力为 32 MPa，试确定所需要的轴径。

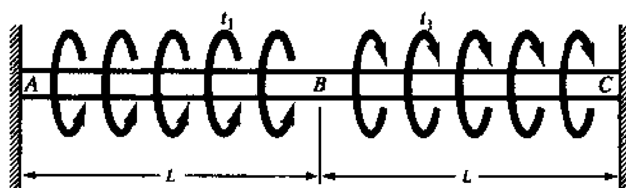


图 5-17

解 ☞ 我们用如下两个问题解答的叠加来求解这个问题：问题Ⅰ、Ⅱ分别如图 5-18(a)、图 5-18(b)所示。

暂时解除 A 端的约束，并计算由 M_A 及图 5-18(a)、(b)所示分布载荷共同作用时，A 端的扭转角。由题 5.3 和题 5.12 可知，此时 A 端扭转角为

$$\theta_A = \frac{t_1(2L)^2}{2GJ} - \frac{M_A(2L)}{GJ} - \frac{(2t_1)L^2}{2GJ}$$

因为 A 端是完全固定的，亦即 $\theta_A = 0$，可解出 $M_A = t_1 L/2$。

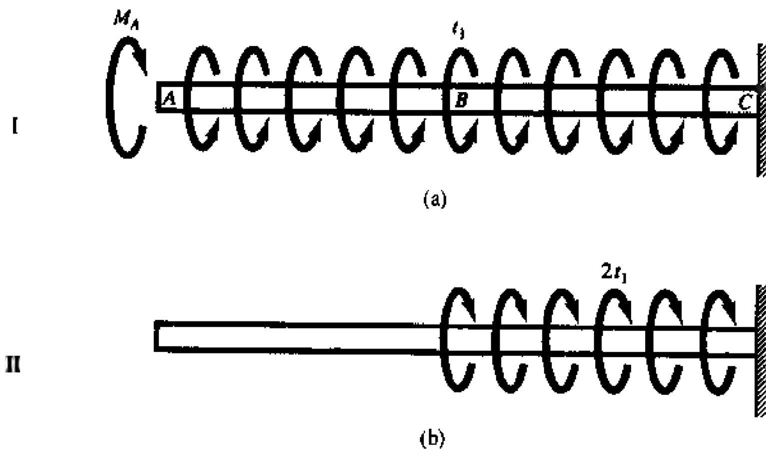


图 5-18

于是，轴 ABC 的分离体如图 5-19 所示。根据此图关于 x 轴的扭转力偶之和

$$\sum M_x = M_A - M_C + t_1 L - t_1 L = 0$$

由此可解出

$$M_C = t_1 L/2$$

于是，扭矩沿轴线变化的图形如图 5-20 所示。

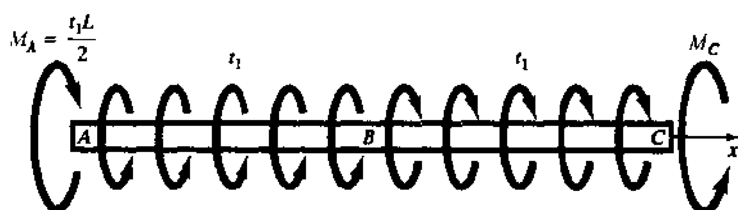


图 5-19

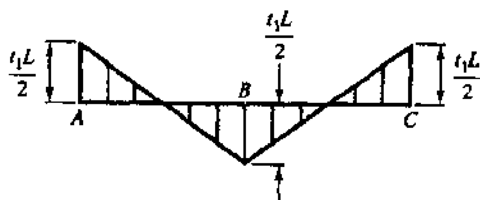


图 5-20

换用矢量方式表示扭矩，轴 ABC 的左半段和右半段分离体图如图 5-21 所示。AB 段的分离体图表明，应必须有如图的扭矩 $t_1L/2$ 作用在 B 处。根据牛顿定理，必然会有等值反向的扭矩作用在 BC 段的左端，亦即在中点 B 处，有非零扭矩，如图 5-21。这将说明：轴在 B 处的转角为零。

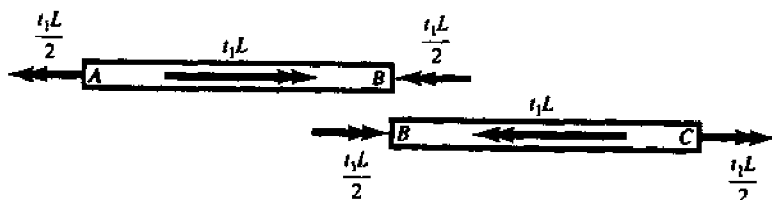


图 5-21

由图 5-20 可以看出，峰值扭矩是 $t_1L/2$。因而最大的剪应力将发生在 A、C 和中点 B 处的最外侧纤维内，由(5.2)式可知峰值应力是

$$\tau_{\max}=\frac{T(d/2)}{\pi d^4/32}=\frac{16(t_1L/2)}{\pi d^3}$$

$$32\times10^6\text{N/m}^2=\frac{16(30\text{N}\cdot\text{m/m})(0.7\text{m}/2)}{\pi d^3}$$

解出

$$d=17.4\text{ mm}$$

题 5.17 直径为 80 mm 的等截面圆轴，左端固定，在其中点 B 处受力偶矩 6000 N·m 的扭转作用，右端 C 处受到弹性支承的约束，(见图 5-22)。C 处的弹性支承由两根铅直钢杆 MN 和 PQ 组成，此两杆直径约为 16 mm，各长 1.5 m，与轴 ABC 连接在水平直径的两侧。如图 5-22(a)所示。若所有各杆的 $E=200$ GPa，$G=80$ GPa。试求轴 ABC 中的峰值剪应力和杆 MN 中的拉应力。

解 ☞ 暂时将 MN 和 PQ 杆对轴 ABC 的约束除去。那么由题 5.3 可知，B 端相对于 A 端的转角为

$$\theta=\frac{TL}{GJ}=\frac{(6000\text{N}\cdot\text{m})(0.75\text{m})}{G(\pi/32)(0.08\text{m})^4}$$

由于在 B 和 C 之间没有另外的力偶作用，C 端的扭转角 θ_c 也等于 θ。

由图 5-22(b)，可知轴 ABC 的水平直径 NQ 也应旋转同样的角度 θ，最终的位置如虚线所示。这一旋转是由于每个铅直杆被拉伸形变 Δ 造成的，拉伸形变 Δ 应与各杆的内力 P 相合。对于小

旋转角 θ，有 $\Delta=(0.040\ \text{m})\theta_c$，由于铅直杆与轴 ABC 相连，因而轴力 P 形成一个力偶 $P(0.08\ \text{m})=T_c$ 作用在轴 ABC 的 C 端。力偶 T_c 的转向和载荷 6000 N·m 力偶的转向相反，如图 5-22(a)；这是因为铅直弹性杆将约束 C 端的转角。

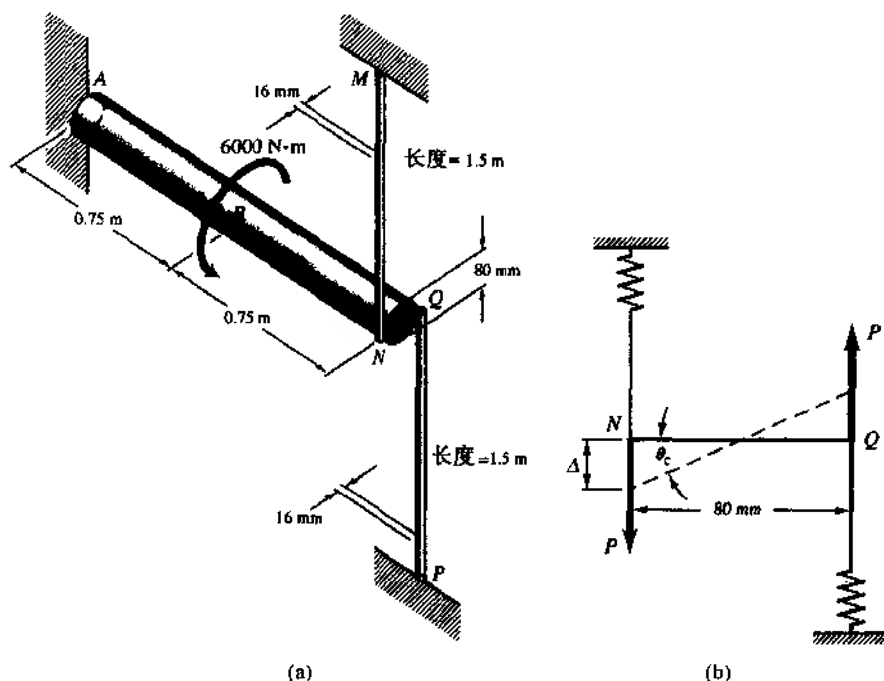


图 5-22

由题 1.1 可知，每个铅直杆的伸长为

$$\Delta=\frac{PL}{AE}=\frac{P(1.5\text{m})}{(\pi/4)(0.016\text{m})^2E}=\frac{(T_C/0.08\text{m})(1.5\text{m})}{(\pi/4)(0.016\text{m})^2E}$$

对轴 ABC 的 C 端转角应考虑如下两个方面的影响，(a)扭转力偶矩 6000 N·m和端部载荷 T_c 共同作用的影响，(b)铅直杆轴力 P 致使两杆伸长引起的转角。于是两种因素对于 C 端转动应相同，有

$$\frac{(6000\text{N}\cdot\text{m})(0.75\text{m})}{G(\pi/32)(0.08\text{m})^4}-\frac{T_C(1.5\text{m})}{G(\pi/32)(0.08\text{m})^4}=\frac{(T_C/0.08\text{m})(1.5\text{m})}{(\pi/4)(0.016\text{m})^2(0.04\text{m})E}$$

解出 $T_C=1327\text{N}\cdot\text{m}$，$P=T_C/0.08=16587\ \text{N}$。扭矩沿轴 ABC 的变化如图 5-23 所示。在 A 与 B 之间所有截面的最外侧纤维均将会产生峰值扭转剪应力，由题 5.2 有

$$\tau_{\max}=\frac{16(4673\text{N}\cdot\text{m})}{\pi(0.08\text{m})^3}=46.5\text{MPa}$$

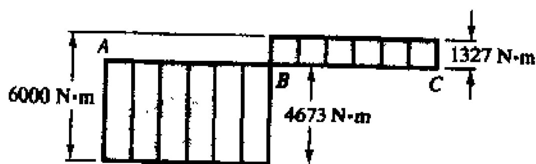


图 5-23

铅直杆中的拉伸应力是

$$\sigma=\frac{P}{A}=\frac{16587\text{N}}{\pi(0.008\text{m})^2}=82.5\text{MPa}$$

题 5.18 如图 5-24(a)所示两端固定的圆轴，受图示力偶 T_1 和 T_2 扭转作用，试求两固定端处的约束力偶。

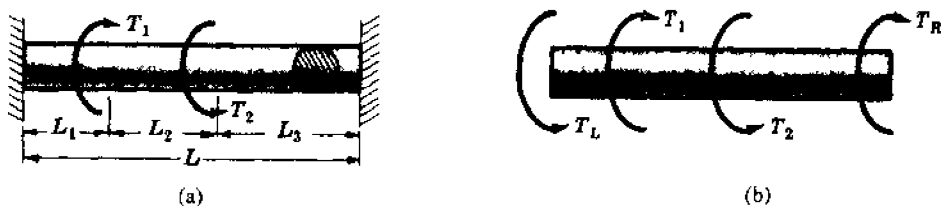


图 5-24

解 假设两固定端处的约束力偶T_L和T_R如图 5-24 (b)所示。由静力学,有

$$T_L - T_1 + T_2 - T_R = 0 \tag{1}$$

这只是一个平衡方程,式中包含两个未知力偶。因此这是一个超静定问题,必须用以系统形变为基础的方程补充上述方程。

沿轴线扭矩的变化图可以用图 5-25 来表示。长度为 L_1 的左轴段分离体图如图 5-26 (a)所示。沿此轴的轴线由左向右分析,在长度为L_2的中间轴段,扭矩将等于截面左侧扭转外力偶矩的代数和,亦即$T_1 - T_L$。此轴段的分离体图如图 5-26(b)所示。最后,长度为 L_3 的右轴段的分离体图如图 5-26(c)所示。

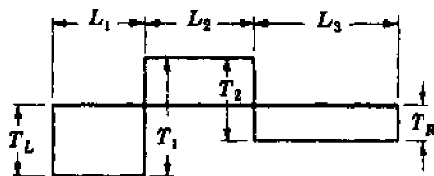


图 5-25

令 θ_1 和 θ_2 分别表示 T_1 和 T_2 作用截面的转角,考虑长度为 L_1 和 L_3 的两段轴扭转,有

$$\theta_1 = \frac{T_L L_1}{GJ} \tag{2}$$

$$\theta_2 = \frac{T_R L_3}{GJ} \tag{3}$$

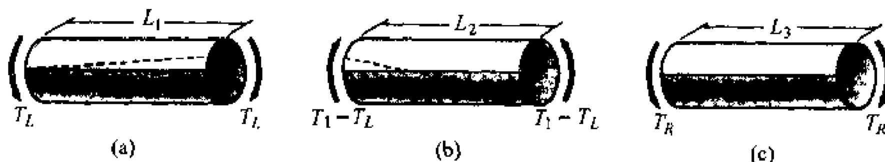


图 5-26

此轴表面母线的初始位置如图 5-26 中的实线,形变以后的位置如图中虚线所示。研究长度为 L_2 的中间轴段,可知它的右端相对于左端的扭转角是$(\theta_1 + \theta_2)$,注意到引起此形变的扭矩是$T_1 - T_L$,于是

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{(T_1 - T_L)L_2}{GJ} \tag{4}$$

联立求解式(1)~(4),可以得到

$$T_L = T_1 \frac{L_2 + L_3}{L} - T_2 \frac{L_3}{L}$$

$$T_R = -T_1 \frac{L_1}{L} + T_2 \frac{L_1 + L_2}{L}$$

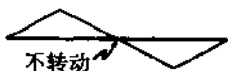


图 5-27

研究此轴表面上母线的行为是很有意思的,开始它在整个长度上当然都是直线,但是在施加了 T_1 和 T_2 之后,它变成图 5-27 所示的折线。

题 5.19 考虑一个组合轴,它是由直径 2 in 的实心铝合金($G=4\times10^6$ lbf/in^2)圆轴外包内径 2 in 的钢($G=12\times10^6$ lbf/in^2)圆筒制成的,钢圆筒的外径为 2.5 in,两种材料在结合处是完全结合在一起的。若此组合轴承担扭转力偶 14000 lbf·in 作用仍处于弹性阶段。试求钢筒最外层及铝合金外层的剪应力。

解 ☞ 令 T_1、T_2 分别是铝合金及钢材所承担的扭矩,由关于轴线的平衡方程式,有

$$T_1 + T_2 = T = 14000$$

其中 T 是外加的扭转力偶矩,这是本题中惟一有效的平衡方程。由于方程中含有两个未知量,因而本结构是超静定的,还需由轴的形变去得到补充方程。

对此很容易发现:由于两种材料是完全连接在一起的,因此它们应有相同的扭转角。利用公式 $\theta = TL/GJ$。在轴的全长范围内,有

$$\frac{T_1 L}{4\times10^6(\pi/32)(2)^4} = \frac{T_2 L}{12\times10^6(\pi/32)[(2.5)^4-(2)^4]} \quad 或 \quad T_1 = 0.231T_2$$

将此方程与静力学平衡方程联立求解,可解出

$$T_1 = 2600 \text{ lbf}\cdot\text{in}\ (铝轴承担), \qquad T_2 = 11400 \text{ lbf}\cdot\text{in}\ (钢筒承担)$$

在铝合金及钢材的外侧纤维,剪应力分别是

$$\tau_2 = \frac{11400(1.25)}{(\pi/32)[(2.5)^4-(2)^4]} = 6300 \text{ lbf/in}^2,$$

$$\tau_1 = \frac{2600(1)}{(\pi/32)(2)^4} = 1650 \text{lbf/in}^2$$

题 5.20 阶梯圆轴如图 5-28 所示。AB 轴段是 Al2014-T6 合金,$G=28$ GPa,此轴段为实心圆截面,直径为 45 mm;轴段 BC 是钢,$G=84$ GPa。,此轴段是空心圆轴,外径 60 mm、内径 30 mm。在 B 处施扭转力偶矩 4000 N·m。试求两种材料中的峰值剪应力及 B 处的扭转角(A、C 端是固定端)。

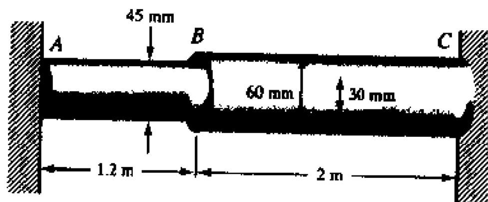


图 5-28

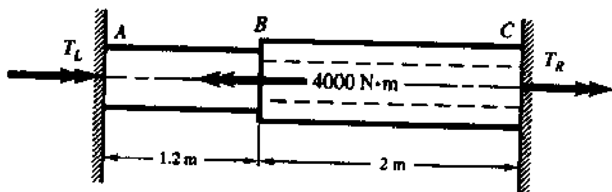


图 5-29

解 ☞ 系统的分离体图如图 5-29 所示。施加的载荷 4000 N·m 及两端未知的反力偶矩均用双箭头矢量表示。惟一的静力学平衡方程是

$$\sum M_x = T_L + T_R - 4000\text{N}\cdot\text{m} = 0$$

因为式中 T_L 和 T_R 均为未知量,尚缺一个(基于形变的)补充方程。如果意识到分别以 A 端和 C 端参照计算 B 截面的转角应是相等的,可以建立的补充方程为

$$\frac{T_L(1.2\text{m})}{(28\times10^9\text{N/m}^2)J_{Al}} = \frac{T_R(2.0\text{m})}{(84\times10^9\text{N/m}^2)J_{st}} \qquad (1)$$

AB 段的极性矩为

$$J_{al}=\frac{\pi(0.045\text{m})^4}{32}=0.40\times10^{-6}\text{m}^4$$

BC 段的极惯性矩为

$$J_{st}=\frac{\pi}{32}[(0.060\text{m})^4-(0.030\text{m})^4]=1.19\times10^{-6}\text{m}^4$$

于是，由方程(1)得到

$$T_L=0.187T_R$$

将此式代入平衡方程*，可解出

$$T_L=630\text{N}\cdot\text{m},\qquad T_R=3370\text{N}\cdot\text{m}$$

AB 轴段外层纤维的剪应力为

$$\tau_{AB}=\frac{T\rho}{J}=\frac{(630\text{N}\cdot\text{m})(0.0225\text{m})}{0.40\times10^{-6}\text{m}^4}=35.2\text{MPa}$$

BC 轴段外层纤维的剪应力

$$\tau_{BC}=\frac{T\rho}{J}=\frac{(3370\text{N}\cdot\text{m})(0.030\text{m})}{1.19\times10^{-6}\text{m}^4}=85.0\text{MPa}$$

利用 AB 轴段的数据，计算 B 截面的扭转角

$$\theta_B=\frac{TL}{GJ}=\frac{(630\text{N/m})(1.2\text{m})}{(28\times10^6\text{N/m})(0.40\times10^{-6}\text{m}^4)}=0.675\times10^{-3}\text{rad}\quad\text{或}\quad0.039°$$

题 5.21 考虑承受扭转的实心圆截面轴。材料是理想弹塑性的，剪应力的应力-应变曲线如图 5-30(a)所示。在扭矩作用下截面已部分屈服，试求弹性区半径和扭矩的关系，以及截面完全屈服时的扭矩。

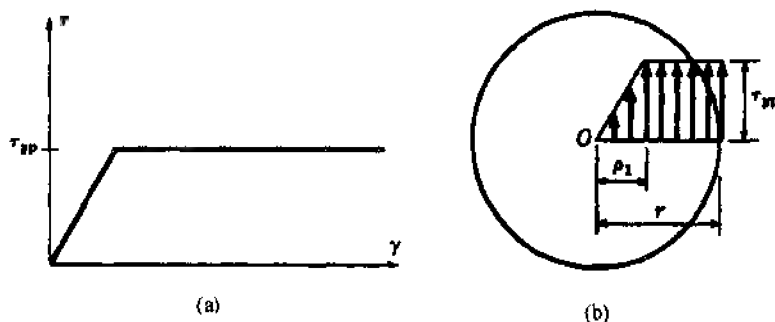


图 5-30

解 ☞ 由于扭矩作用，尽管圆轴截面的外部区域已经发生屈服，仍可假设：轴的横截面仍保持平面且垂直于轴线，并且形变前的直径在形变后仍保持直线，仍为圆截面的直径。因此纵向纤维的剪应变，仍与其距轴线的距离成正比。

假设距图轴中心 ρ_1 处开始屈服，因而截面内应力的分布如图 5-30(b)所示，剪应力与纤维至圆轴中心距离成正比直至 ρ_1 处，半径 ρ_1 以外的环形区域应力为常数，且等于屈服点应力。

由图 5-30(b)，可有

$$\frac{\tau}{\rho}=\frac{\tau_{yp}}{\rho_1}\quad\text{或}\quad\tau=\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)\tau_{yp}\quad(\rho<\rho_1)$$

而 $\rho>\rho_1$，$\tau=\tau_{yp}=$常数。于是扭矩为

$$T=\int_0^r\tau\rho\,\mathrm{d}a\tag{1}$$

式中 $\mathrm{d}a$ 用来表示一个环形单元体微面积，如题 5.2 中的图 5-8。利用上述内部弹性区和外部塑性区的剪应力公式，可有

$$T=\int_0^{\rho_1}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)\tau_{yp}\rho\,\mathrm{d}a+\int_{\rho_1}^r\tau_{yp}\rho\,\mathrm{d}a=\frac{\tau_{yp}}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\rho^2\mathrm{d}a+\tau_{yp}\int_{\rho_1}^r\rho\,\mathrm{d}a$$

* 此处原著有错。——译者注

$$=\frac{\tau_{yp}}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\rho^2 2\pi\rho d\rho+\tau_{yp}\int_{\rho_1}^{r}\rho 2\pi\rho d\rho=\tau_{yp}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\rho_1^3+\frac{2\pi}{3}\tau_{yp}r^3$$

解出

$$\rho_1=\left[4r^3-\frac{6T}{\pi\tau_{yp}}\right]^{\frac{1}{3}} \tag{2}$$

此即为弹性区的半径 ρ_1 和扭矩 T 的关系。对于完全屈服的情况,亦即截面内所有点处的应力均有 $\tau=\tau_{yp}$,令 $\rho_1=0$ 即可得到完全塑性扭矩 T_p,

$$T_p=\frac{2}{3}\pi r^3\tau_{yp}=\frac{4}{3}\frac{J}{r}\tau_{yp} \tag{3}$$

但是由题 5.2 可知,如果只是截面外缘的纤维屈服,其余内部的纤维均处于弹性时,相应的最大可能弹性扭矩 T_e 为

$$T_e=\frac{\tau_{yp}}{2}\pi r^3 \tag{4}$$

将(3)式和(4)式比较,可以得到 $T_p=4T_e/3$,亦即完全塑性扭矩超过最大可能弹性扭矩的33.3%。

题 5.22 如图 5-31 所示空心圆截面轴,试求截面完全屈服时的扭矩。

解 ☞ 如图 5-31 所示,用 R_i 和 R_o 分别表示此轴的内、外半径,材料的屈服点应力是 τ_{yp},我们再次使用题 5.21 的(1)式,并且用屈服点应力替换积分项,有

$$T=\int_{R_i}^{R_o}\tau_{yp}\rho da=\tau_{yp}\int_{R_i}^{R_o}\rho(2\pi\rho d\rho)=\frac{2\pi}{3}\tau_{yp}(R_o^3-R_i^3)$$

在此要指出,如果在题 5.21 的(3)式中将实心的 J 替换为空心的(J_o-J_i)(其中 J_s 可分别相应于外、内边界),是不能得到正确的全屈服扭矩的,为得到正确的全屈服扭矩公式必须使用基本公式,并将之积分,如同上面我们所作的那样。

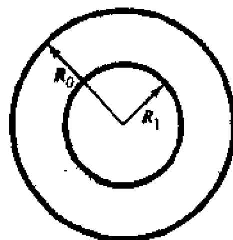


图 5-31

5.12 习 题

题 5.23 如果已知直径为 1.25 in 的实心圆轴承受 2500 lbf·in 扭矩,在长度 5 ft 处扭转角为 3.12°,试求材料的剪切模量。(答案:$G=11.5\times10^6$ lbf/in²)

题 5.24 直径 4 in 的实心圆轴承受 228000 lbf·in 的扭矩,材料的 $G=12\times10^6$lbf/in²,试求最大的剪应力及单位长度的扭转角。(答案:18100 lbf/in²,0.000755 rad/in)

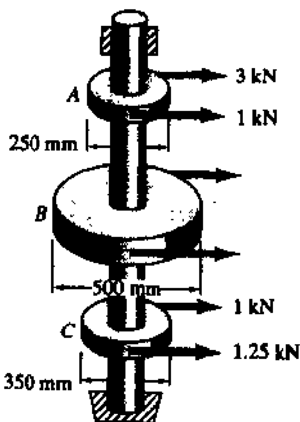


图 5-32

题 5.25 轮船螺旋桨轴的直径是 350 mm,材料的许可剪应力是 50 MPa,剪切模量 $G=85$ GPa,在 15 倍直径长度内的许可扭转角为 1°,试求此轴能传递的最大扭矩。(答:416 kN·m)

题 5.26 仍如题 5.25 中的圆轴,但改为空心的,内径为 175 mm,外径、许可剪应力与许可扭转角不变。试问能传递的最大扭矩降低百分之几,轴的重量降低百分之几。(答案:6%,25%)

题 5.27 将直径 4 in、长 24 in 的实心铜轴与直径 4.5 in、长 32 in 的钢轴连接在一起,组成一根长度为 56 in 的组合轴。铜 $G=6\times10^6$ lbf/in² 钢 $G=12\times10^6$ lbf/in²。将 120000 lbf·in 的扭转力偶加在此组合轴的两端,试求每种材料中的最大剪应力和全轴的扭转角。(答案:铜中:9520 lbf/in²,钢中:6700 lbf/in²;$\theta=0.027$ rad.)

题 5.28 如图 5-32 所示,铅直轴及与之连接的皮带轮均可忽略其自身的重量。该轴以匀角速度旋转,皮带的张力如图示。设许可剪应力为 50 MPa,试求实心圆轴的直径。(因为轴承距皮带轮很近,可不考虑轴的弯曲。)(答案:29 mm)

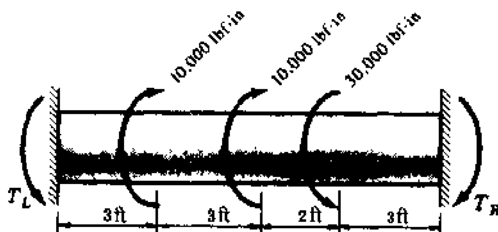


图 5-33

题 5.29 如图 5-33 所示两端固定的等截面实心圆轴，承受三个扭转力偶的作用，横截面直径为常数，试求两个固定端处的约束反力偶矩。(答案：$T_L = 3600$ lbf·in, $T_R = 13600$ lbf·in)

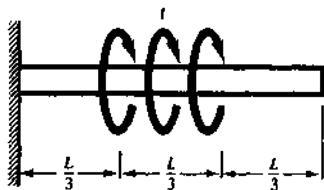


图 5-34

题 5.30 空心圆轴的外径为 4 in，内径为 3 in，材料的屈服剪应力为 22000 lbf/in²，试求该轴完全屈服时传递的扭矩。(答案：214000 lbf·in)

题 5.31 如图 5-34 所示，实心圆轴左端固定、右端自由，在其中间 1/3 长度上作用有集度 t 为的均布扭转力偶。试求此轴自由端的扭转角。(答案：$2tL^2/(9GJ)$)

题 5.32 欲用转速为 3.5 r/s 的实心圆轴传递 90 kW 的功率，材料的许可剪应力是 45 MPa，试求所需要的轴径。(答案：77.4 mm)

题 5.33 空心圆轴的外径等于内径的 3 倍，且以 120 r/min 的转速传递 110 hp 的功率，如果材料的许可剪应力是 6500 lbf/in²，试求此轴所需要的外径。(答案：3.58 in)

题 5.34 实心圆轴的轴线与 x 轴重合，其轴径可用公式 $y = 0.07e^{-0.045x}$ 描述，此轴由 $x = 0$ 延伸长到 $x = 3$ m 处；材料的剪切模量是 83 GPa。如果在其两端承受力偶矩 42100 N·m 的扭转，试用题 5.14 中的 FORTRAN 程序计算此轴的扭转角。(答案：2.518°)

题 5.35 实心圆截面轴的轴线与 x 轴重合，其轴径轮廓可用方程

$$y = 8e^{-0.01x}$$

描述。该轴由 $x = 0$ 处延至 $x = 180$ in 处，材料的剪切模量为 12×10^6 lbf/in²。该轴承受的扭矩为 65000 lbf·in。试用题 5.14 中的 FORTRAN 程序计算此轴两端的相对扭转角。(答案：1.861°)

题 5.36 如图 5-35 所示，实心圆截面轴两端固定，并承受集度为 t 的均布扭转力偶作用。试求此轴两固定端处的约束反力偶。(答案：$M_A = 2tL/9$, $M_C = 4tL/9$)

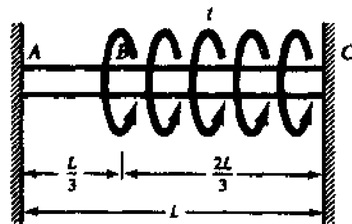


图 5-35

题 5.37 锥形变截面圆轴，长度为 300 mm，小端直径 50 mm，大端直径 100 mm，如图 5-36 所示。此轴两端承受 1000 N·m 的扭转力偶作用，材料的剪切模量 $G = 80$ GPa。试求两端面的相对扭转角及峰值剪应力。(答案：0.48°, 40.7 MPa)

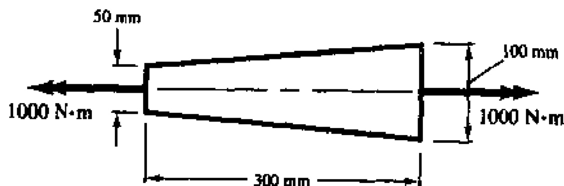


图 5-36

题 5.38 如图 5-37 所示圆截面阶梯轴，左半段(长 150 mm)的轴径为 50 mm，右半段(长 150 mm)的轴径 100 mm，材料的剪切模量 $G = 80$ GPa。试求两端面的相对扭转角及峰值剪应力。(答案：1.09°, 40.7

MPa)

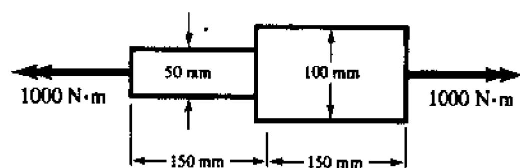


图 5-37

第6章　剪力和弯矩

6.1　梁的定义

一个杆件承受位于包含其轴线的纵向平面内的力和力偶的作用，该杆被称为梁，承受的作用力应垂直于杆件纵向轴线。

6.2　悬臂梁

如果梁只在一端支承，并且由于此种支承而使梁的轴线不能在支承点处转动，这种梁称为悬臂梁，如图6-1所示。梁的左端可以自由挠曲，右端是完全固定的。右端通常可称为固定端。右端处支承壁对梁的约束反力包括铅直力和作用在加载平面内的力偶。

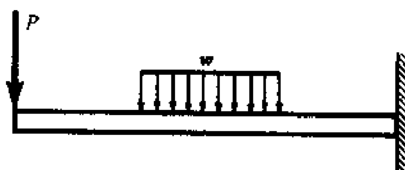


图6-1

6.3　简支梁

在其两端自由支承的梁，称为简支梁，此处所谓的"自由支承"，系指端部对梁的支承只提供约束反力而不能提供任何约束反力偶。因面当梁在载荷作用下发生挠曲时，支撑处不会限制端部的转动。两个简支梁的简图如图6-2所示。

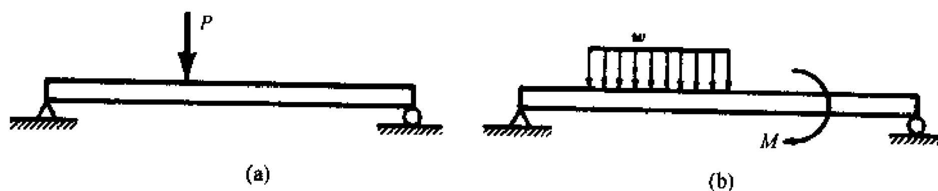


图6-2

可以发现，简支梁至少有一个支承是能够发生水平位移的，因此在梁内不会产生轴向力。如果没有任何一端对于水平位移是自由的，那么在梁受载荷作用而形变时，就会产生某些轴向力，本书不涉及这些问题。

图6-2(a)所示的梁称为承受一个集中力的简支梁，图6-2(b)中的梁承受均布载荷和力偶。

6.4 外伸梁

一个梁自由支承在两点处，并且有一端或两端延伸到这些支承之外，这样的梁称为外伸梁。图 6-3 给出外伸梁的两个例子。

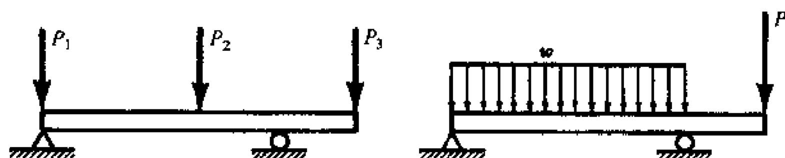


图 6-3

6.5 静定梁

以上被考虑的所有的梁，如悬臂梁、简支梁和外伸梁等，其约束反力都可以利用静力学平衡方程计算得到，这些约束反力的数值和梁的形变无关，这样的梁称为静定梁。

6.6 超静定梁

如果作用在梁上的约束反力的数目超过静力平衡方程的数目，那么必须用基于梁形变的方程去补充静力平衡方程。在这种情况下，梁称为是超静定的。图 6-4 是超静定梁的几个例子。

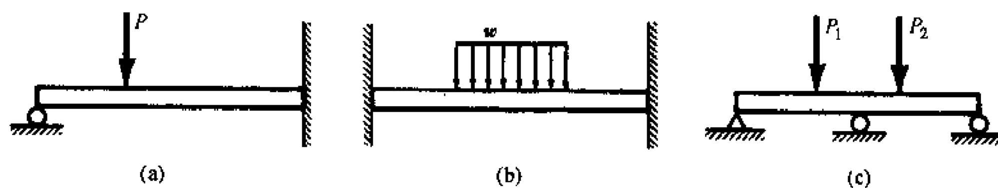


图 6-4

6.7 载荷的类型

通常施加在梁上的载荷包括：集中力(施加在一个点上)；均布载荷，其数值沿梁的长度用若干“lbf/ft”或若干“N/m”来表示；或均匀变化载荷，这最后一种载荷如图 6-5 所示。

梁也可能承受力偶的作用，力偶的数值通常用“lbf·ft”或 N·m 表示。

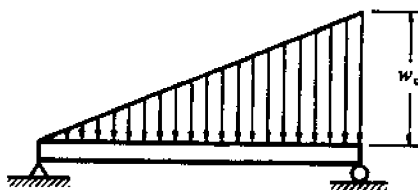


图 6-5

6.8　梁的内力和内力矩

当梁受到载荷,如力和力偶作用时,内部要产生应力,通常既有法应力也有剪应力。为了求得梁的任意截面上这些应力的数值,必须知道作用在该截面内的合力和合力矩。这些合力和合力矩可用静力学平衡方程得到。

实例 1　假设有若干个集中力作用在一个简支梁上,如图 6-6(a)所示。

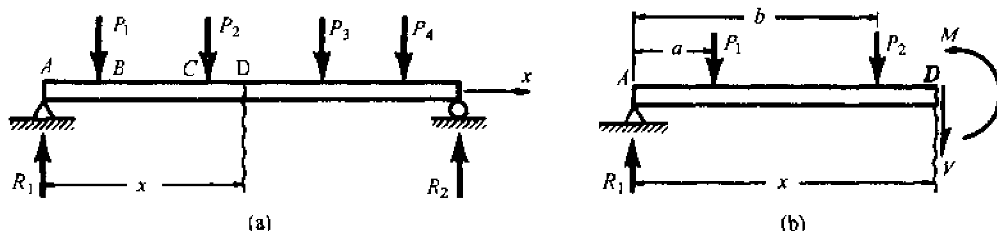


图 6-6

如要求研究距梁的左端 x 处的 D 截面上的应力,为此将梁在 D 处切开,并将切面右侧部分除去。此时应将除去部分的影响施加在被保留的 D 截面的左侧部分上,这个影响包括铅直剪力和力偶,可分别用矢量 V 和 M 表示。此梁的左侧部分的分离体图如图 6-6(b)所示。

力 V 和力偶 M 使得梁的左侧部分在与力 R_1、P_1 和 P_2 共同作用下保持平衡,如果力 V 和力偶 M 具有图上所指示的指向,它们将取作正值。

6.9　抗力矩*

图 6-6(b)中的力偶 M 称为截面 D 处的抗力矩。抗力矩 M 的数值可以用静力学方程求得,亦即,所有的力关于过 D 点并垂直于书纸平面的轴之矩总和为零,即

$$\sum M_0 = M - R_1x + P_1(x-a) + P_2(x-b) = 0$$

或

$$M = R_1x - P_1(x-a) - P_2(x-b)$$

因此可知,抗力矩 M 是 A 点反力及载荷 P_1 和 P_2 对 D 点之矩。同时抗力矩 M 也是分布在铅直截面 D 上的应力的合力偶。这些应力的方向是水平的,在部分区域内是拉伸的,而在另部分区域内是压缩的。这些应力的特征将在第 8 章中详细讨论。

6.10　抗剪力*

图 6-6(b)中的铅直力 V 称为截面 D 处的抗剪力。对于铅直方向的平衡方程,有

$$\sum F_v = R_1 - P_1 - P_2 - V = 0,\quad 或\ V = R_1 - P_1 - P_2$$

力 V 实际上是分布在铅直截面 D 上的剪应力的合力,这些应力的特征将在第 8 章中研究。

6.11　弯　矩**

截面 D 一侧的外力关于通过 D 的轴之矩的代数和称为 D 处的弯矩,对于以上所考虑的

* 目前国内教材中尚无抗力矩和抗剪力的称谓。原文中为 resisting moment,resisting shear,将之译为抗力矩和抗剪力,供和国内专家探讨,实际上相当于国内的弯矩和剪力。——译者注

** 弯矩的定义也和国内不一致,应引起读者注意。——译者注

载荷，弯矩可用$[R_1x - P_1(x-a) - P_2(x-b)]$来表示。这个量将在题 6.1～题 6.12 中研究。由此可知，弯矩和抗力矩方向相反、数值相等。通常也将之表示为 M。在计算中通常是使用弯矩，而不使用抗力矩，因为前者能直接表示为外部的载荷。

6.12 剪　　力*

截面 D 一侧，譬如左侧的全部铅直力的代数和称为该截面处的剪力。对于以上所考虑的载荷，剪力可表示为$(R_1 - P_1 - P_2)$。剪力和抗剪力方向相反、数值相等，通常用 V 表示。在计算中通常是使用剪力而不是抗剪力。这个量将在题 6.1～题 6.12 中研究。

6.13 符号规则

通常习惯使用的关于剪力和弯矩的符号规则如图 6-7 所示。使梁发生弯曲、并且凹面向上的力产生正弯矩；使梁发生剪切、并使左段相对于右段向上的力产生正剪力。

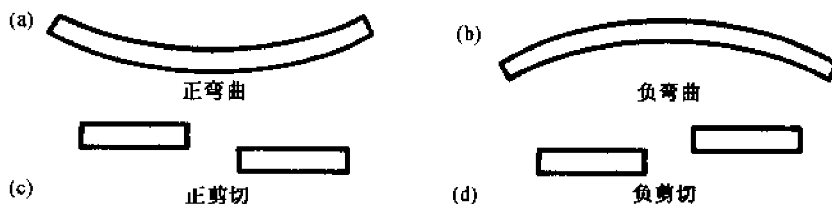


图 6-7

确定任意截面内弯矩代数符号更简单的方法是：向上的外力产生正弯矩，向下的外力产生负弯矩。

6.14 剪力和弯矩方程

通常，为方便计，沿梁选取一个坐标系，坐标的原点选作梁的端点。为了知道沿梁所有截面处的剪力和弯矩，需写出两个方程，其中一个表明剪力与始于梁一端的 x 的关系，称为剪力方程，另一个表明弯矩和 x 的关系，称为弯矩方程。

6.15 剪力和弯矩图

用剪力 V 方程和弯矩 M 方程画出的图形分别称为剪力和弯矩图。在这些图形中，水平横坐标表示沿梁截面的位置，铅直纵坐标分别表示剪力和弯矩的数值。因而，这些图形能用图线的方式，清楚地表示出沿梁轴线各截而上剪力和弯矩的变化规律，由这些图形可以很容易地确定剪力和弯矩的最大值。

6.16 载荷集度、剪力和弯矩之间的关系

承受变集度分布载荷 $w(x)$ 作用的简支梁如图 6-8 所示。建立一个原点在左端 A 处的坐标系，梁中的各截而用变量 x 表示。

对于任意的 x，载荷 $w(x)$ 和剪力 V 之间的关系是

---

* 剪力的定义也和国内不一致，应引起读者注意。——译者注

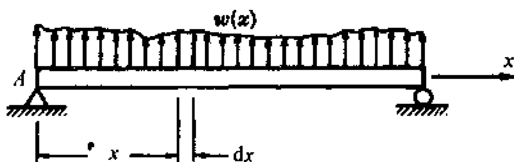


图 6-8

$$w = \frac{dV}{dx}$$

剪力和弯矩 M 之间的关系是

$$V = \frac{dM}{dx}$$

这些关系将在题 6.1 中导出，它们的应用可见题 6.3～题 6.7。

6.17　奇异函数

为了便于处理含有集中力和集中力偶的问题，引入如下函数

$$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n$$

对于 $n > 0$ 的情况，如果 $x < a$，括号中的函数值等于零；如果 $x > a$，函数值一般等于 $(x - a)^n$。这是一个奇异的、或半区间的函数。因而，如果函数的自变量是正的，大括号就蜕变为普通的圆括号。奇异函数的应用见题 6.8～题 6.13。

6.18　计算机应用

确定承受若干个集中力、集中力偶和分布载荷作用的梁内的剪力和弯矩最宜于使用计算机，在题 6.13 中给出一个适用于 PC 机的简单程序，该程序的应用见题 6.14～题 6.15。

6.19　例　　题

题 6.1　导出梁中任一点处载荷集度、剪力和弯矩之间的关系。

解　考虑承受以一般形式任意变化横向载荷的梁，如图 6-9(a)。尽管图中画出的是简支梁，但下面的讨论适用于各种类型的梁。由梁中切割出长度为 dx 的图示单元体，画出它的分离体图。剪力 V 作用在单元体的左侧截面上，越过距离 dx 之后，一般剪力会略有增加，变成 $V + dV$。弯矩 M 也作用在单元的左侧截面上，在其右侧截面上弯矩变化为 $M + dM$。因为 dx 足够小，施加的载荷可取作均布载荷作用在梁的顶部，集度等于 w。该单元体的分离体图如图 6-9(b)所示。关于 O 点的力矩平衡方程，有

$$\sum M_O = M - (M + dM) + V dx + w dx(dx/2) = 0$$

$$dM = V dx + \frac{1}{2} w (dx)^2$$

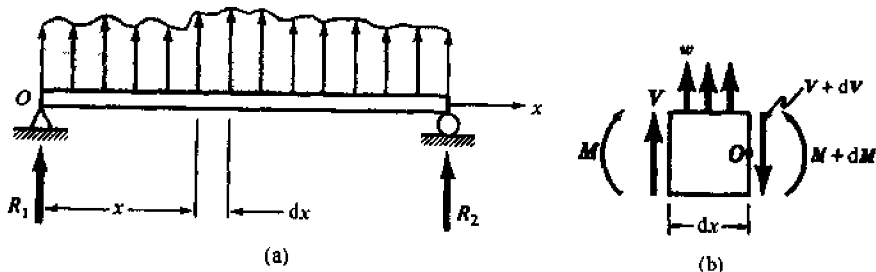


图 6-9

因为最后一项中含有两个微分项的乘积，和仅含有一个微分项的另外一项相比，可将其略去，于是

$$dM = V dx, \quad 或 \quad V = \frac{dM}{dx}$$

亦即剪力等于弯矩对于 x 的变化率。

在画较为复杂载荷的剪力和弯矩图时，这个方程具有一定的价值，例如，当剪力在梁的某个截面内是正值时，显然在该点处弯矩图的斜率也应是正的。此外还表明，相应于集中力作用处，剪力图要发生突然的变化，同时还伴有弯矩图斜率的突然改变。

进一步研究还发现，在那些剪力等于零的点，弯矩图的斜率也等于零。在这些点处，弯矩图的切线是水平的，弯矩可能会有极大值或极小值，这也可以由令函数一阶导数等于零得到函数极大、极小值的通常方法中导出。在图 6-10 中，如果曲线表示一段弯矩图，那么临界值就产生在 A 和 B 点。

为了确定曲线在某点处(如 A 和 B 点)凹面的朝向，应该求 M 对 x 的二阶导数，亦即 d^2M/dx^2。如果二阶导数是正的，那么弯矩图的凹面朝上，如在 A 点处，弯矩有极小值；如果二阶导数是负的，弯矩图的凹面朝下，如在 B 点处，弯矩有极大值。

图 6-10

然而，我们要特别指出利用一阶导数得到极值的计算方法，无法得到在弯矩图上尖点处的可能极大值，这种情况如 C 点处所示。如果有这样的点存在，就必须计算该点处弯矩数值，并和可能是临界值的其他值进行比较。

最后，对于单元体的铅直平衡方程，有

$$w dx + V - (V + dV) = 0, \quad 或 \quad w = \frac{dV}{dx}$$

这一关系式对于作剪力图是很有价值的。

题 6.2　承受均布载荷 wN/m 作用的悬臂梁，如图 6-11(a)所示。试写出剪力和弯矩方程，并作剪力和弯矩图。

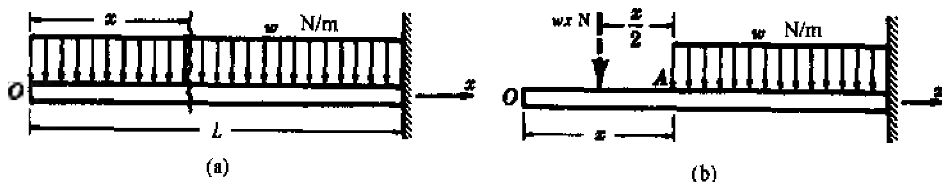


图 6-11

解 ☞ 此题可不必求解支承处的约束反力。选梁的轴线为坐标系的 x 轴，坐标的原点选在梁的左端点，为了确定与自由端相距 x 的任意截面的剪力和弯矩，将此截面左侧的分布载荷用它的合力代替，如图 6-11(b)中的虚线矢量所示，此合力的数值等于 wx，作用在 D 和 x 截面的中点处。要注意，截面右侧的载荷不包含在合力之内，这个合力使左侧梁段相对于右侧梁段剪切向下。根据符号规则，这形成负剪切。

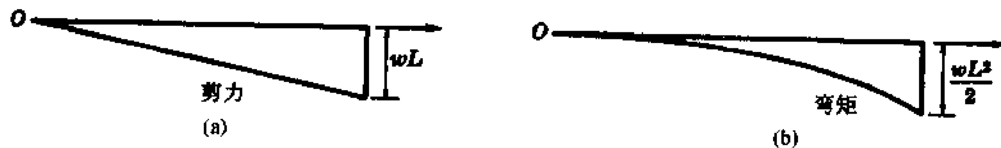


图 6-12

截面 x 处的剪力定义为截面左侧力的合力，这种情况下，这个合力是 wxN，方向向下。于是

$$V = -wx\text{N}$$

此方程说明，在 $x=0$ 处，剪力 $V=0$；在 $x=L$ 处，剪力 $V=wL$。因为 V 是 x 的一次函数，剪力图

将是连接剪力端点值的一条直线，如图 6-12(a)所示。任意点处倾斜线的纵坐标表示该点处剪力的数值。

同一截面 x 内的弯矩定义为截面左侧的力对过 A 点、垂直于书纸平面的轴的合力矩。这个合力矩可用合力，即 wxN 关于过 A 的同一轴线之矩来计算，即

$$M = -wx(x/2)\ \mathrm{N \cdot m}$$

其中的负号是必须的，因为向下的载荷将产生负弯矩。根据这个方程，左端处的弯矩等于零，在 $x = L$ 的固定端处，弯矩等于 $-wL^2/2$。弯矩沿杆轴的变化是抛物线，如图 6-12(b)所示。任意点处的纵坐标表示该点处的弯矩数值。

要指出的是，如本题所考虑的、向下的均布载荷产生凹面向下的弯矩图。用取 M 对 x 二阶导数的方法也能够得到这些。在本题的情况下，该导数是 $-w$，因为二阶导数是负的，计算法则告诉我们曲线的凹面必然是向下的。

题 6.3　如图 6-13(a)所示长度为 10 ft 的简支梁，承受 120 lbf/ft 的铅直均布载荷。试画剪力和弯矩的图形。

解　☞ 作用在梁上的总的载荷是 1200 lbf。由对称性可知每端的反力是 600 lbf。现考虑与左端相距为 x 的截面，该截面内的剪力等于截面左侧所有外力的代数和，这些力包括 600 lbf 的约束反力及 x ft 长度上的分布载荷 120 lbf/ft。我们将截面左侧的分布载荷用它的合力 $120x$ lbf 代替，该合力方向是向下的，如图 6-13(b)中虚线矢量，截面 x 右侧的载荷没有包括在这个合力之中。x 处的剪力是

$$V = 600 - 120\,x\,(\mathrm{lbf})$$

因为在梁上没有集中力作用，所以上式对梁上所有点处都是正确的。显然，剪力将从 $x = 0$ 处的 $V = 600$ lbf 变化至 $x = 10$ ft 处的 $V = 600 - 1200 = -600$ lbf。剪力的变化规律可用连接这两个端点值的直线来表示。剪力图如图 6-14(a)所示，在梁的中点处剪力等于零。

x 截面处的弯矩等于 600 lbf 的约束反力和 $120x$ lbf 分布载荷关于过 A、并垂直于书纸平面的轴之矩的代数和。向上的力产生正弯矩，有

$$M - 600x - 120x(x/2)\mathrm{lbf \cdot ft}$$

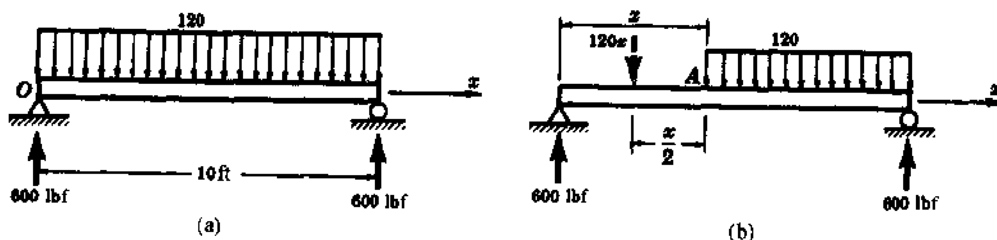


图 6-13

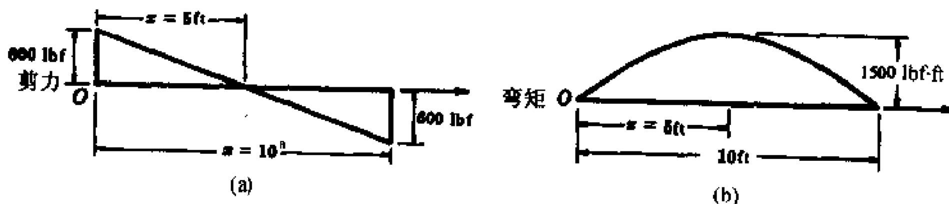


图 6-14

这个方程对于整个梁都是正确的。要指出的是，因为载荷是均布的，用虚线矢量表示的合力作用在与 A 相距 $x/2$ 处，亦即要求计算弯矩的 x 截面左侧的均布载荷的中间位置。由上述方程，显然可知弯矩可用沿梁长的抛物线表示。因为该梁是简支的，在其两端处弯矩等于零。此外，由于载荷的对称性，在梁的中点处，即 $x = 5$ ft 处，弯矩取最大值。此点处的弯矩是

$$M_{x=5} = 600(5) - 60(5)^2 = 1500\ (\mathrm{lbf \cdot ft})$$

弯矩沿梁长的抛物线变化规律可以用图 6-14(b)所示的弯矩图纵坐标表示。

题 6.4 如图 6-15 所示的梁 AD，支承在 B、C 处的尖臂上，在其两端承受图示力偶的作用。试画出剪力和弯矩图。

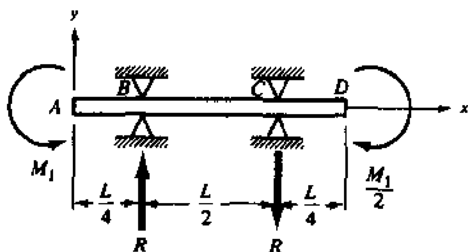


图 6-15

解 ☞ 此两端载荷的合力仍是一个力偶

$$M_1 - M_1/2 = M_1/2$$

这个力偶必须由另外一个数值相等、转向相反的力偶与之平衡，它将由 B、C 处的铅直约束反力 R 来提供。由于平衡的要求，反力偶应等于 $M_1/2$，于是

$$RL/2 = M_1/2, R = M_1/L$$

对于图示的坐标系，与左端 A 距离为 x 的任意点处剪力等于左侧所有铅直力的代数和，于是，对于此梁的三个区段，有

$$V = 0, \quad 0 < x < L/4$$
$$V = M_1/L, \quad L/4 < x < 3L/4$$
$$V = 0, \quad 3L/4 < x < L$$

同理，x 点处的弯矩等于 x 左侧全部的力偶和力之矩的代数和，因而也需要三个方程

$$M = -M_1, \quad 0 < x < L/4$$
$$M = -M_1 + M_1(x - L/4)/L, \quad L/4 < x < 3/4L$$
$$M = -M_1 + M_1/L \cdot L/2 = -M_1/2, \quad 3L/4 < x < L$$

上述方程的图形如图 6-16(a) 和 6-16(b) 所示。

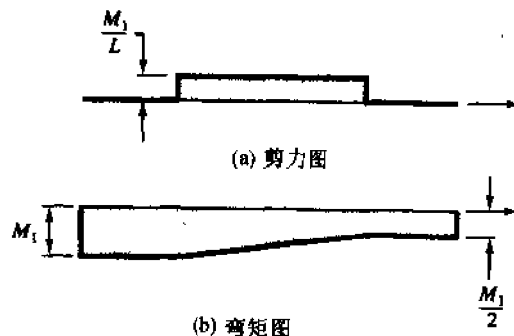


图 6-16

题 6.5 如图 6-17(a)所示的简支梁，承受均匀变化的铅直载荷，左端处载荷集度为零，右端处的载荷集度为 600 lbf/ft，画剪力、弯矩图。

解 ☞ 为了求解全部分布载荷的约束反力 R_1 和 R_2，将载荷用其合力代替，并作用在三角形的形心处。因为分布载荷由左端零变化至右端的 600 lbf·ft，作用在全长 12 ft 上的平均集度为 300 lbf·ft。因此合力是 3600 lbf，施加在距左支座 8 ft 处。用来计算支座反力的分离体图如图 6-17(b)所示。应用此梁的平衡方程，得到 $R_1 = 1200$ lbf，$R_2 = 2400$ lbf。

然而，这合力不能用来画剪力和弯矩图，我们必须用分布载荷去计算与左支座相距 x 的截面处的剪力和弯矩，如图 6-17(c)。可以由相似三角形 OAB 和三角形 OCD 计算得到 x 截面处载荷集度 w，即

$$\frac{w}{x}=\frac{600}{12},\quad 或\quad w=\left(\frac{x}{12}\right)600\ (\text{lbf/ft})$$

因为左端的载荷集度为零，因此在长度 x 上的平均载荷集度为 $((x/12)600/2\ \text{lbf/ft})$，作用在 x 长度上的总载荷等于平均载荷集度和长度 x 相乘，亦即 $((x/12)600x/2\ \text{lbf/ft})$；这个力作用在三角形 OAB 的形心处，即距 O 点 $2x/3$ 处。在图 6-17(c)中，此区段分布载荷的合力用虚线矢量表示，x 截面右侧的分布载荷没有包括在这个合力之内。

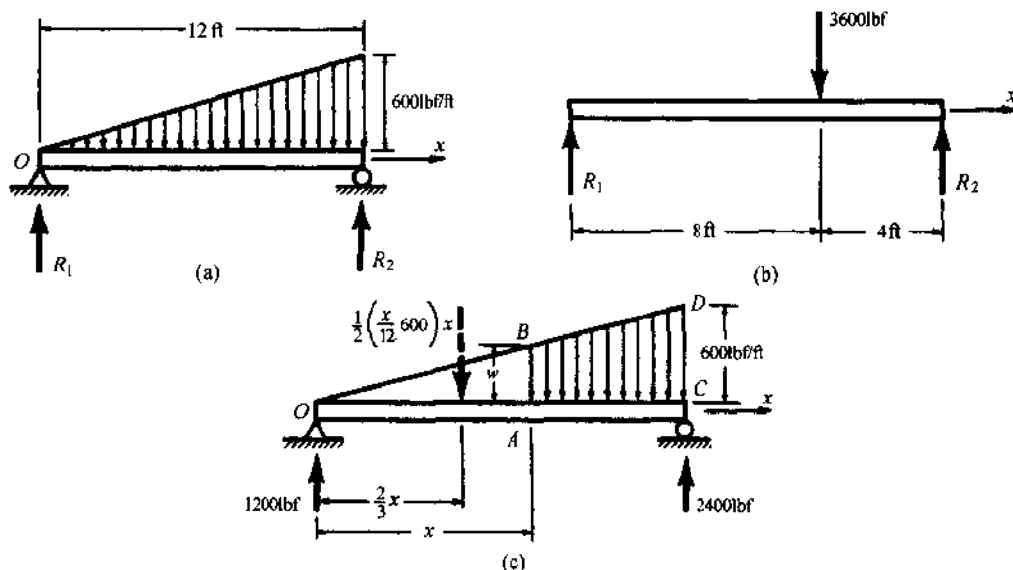


图 6-17

我们很容易地得到 A 处的剪力和弯矩，

$$V=1200-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{12}600\right)x=1200-25x^2$$

$$M=1200x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{12}600\right)x\left(\frac{x}{3}\right)=1200x-\frac{25}{3}x^3$$

这些方程在梁的全长上都是适用的。剪力图形是抛物线，在 $x=0$ 处 $V=1200$ lbf；在 $x=12$ ft 处 $V=2600$ lbf；弯矩是三次多项式，在两端处弯矩为零，在 $V=0$ 处弯矩有极大值，这是因为 $V=\mathrm{d}M/\mathrm{d}x$，因此零剪力点必然是弯矩图切线为水平线的点。令 $V=0$ 可解出零剪力点，

$$0=1200-25x^2\ 或\ x=6.94\text{ft}$$

将 $x=6.94$ 代入弯矩方程，该点处的弯矩为

$$M_{x=6.94}=1200(6.94)-\frac{25}{3}(6.94)^3=5520(\text{lbf}\cdot\text{ft})$$

画出剪力和弯矩图如图 6-18。

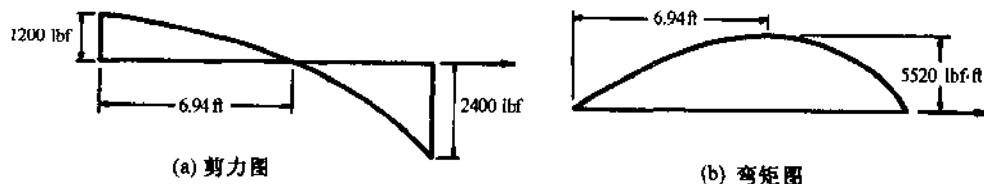


图 6-18

题 6.6　如图 6-19 所示的悬臂梁，在 BC 段上承受集度为 600 N/m 的均布载荷，在自由端 C 处作用有 4800 N·m 的集中力偶。试画出剪力和弯矩图。

解　☞ 为了防止产生角位移，固定端 A 处的约束反力应该既有铅直反力也有反力偶，为计算这些反力，写出静力平衡方程。

$$\sum F_v=R_A-(600\text{N/m})(2\text{m})=0\tag{1}$$

$$\sum M_A = M_A - 4800\text{N}\cdot\text{m} - (1200\text{N})(3\text{m}) = 0 \tag{2}$$

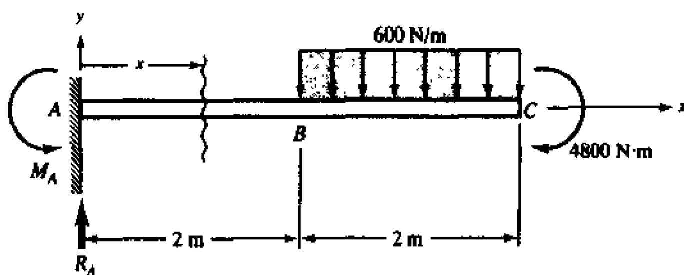


图 6-19

解出

$$R_A = 1200\text{N}, M_A = 8400\text{N}\cdot\text{m}$$

对于图示坐标系，A 点右侧 x 处的剪力等于 x 左侧所有力的代数和，这需如下两个方程：

$$V = 1200\text{N}, \quad 0 < x < 2\text{m} \tag{3}$$

$$V = 1200\text{N} - 600(x-2)\text{N}, \quad 2 < x < 4\text{m} \tag{4}$$

同样地，点 x 处的弯矩等于 x 左侧的力和力偶关于 x 点力矩的代数和，这需如下两个方程：

$$M = -8400\ \text{N}\cdot\text{m} + 1200x, \quad 0 < x < 2\text{m} \tag{5}$$

$$M = -8400\ \text{N}\cdot\text{m} + 1200x - (600\text{N/m})\left[(x-2)\frac{(x-2)}{2}\text{m}\cdot\text{m}\right], \quad 2 < x < 4\text{m} \tag{6}$$

(3)～(6)式的图形分别由图 6-20(a)及 6-20(b)所示。弯矩图 BC 段的凸、凹性质需取该段内弯矩图的二阶导数进行研究：

$$\frac{\text{d}^2M}{\text{d}x^2} = -600$$

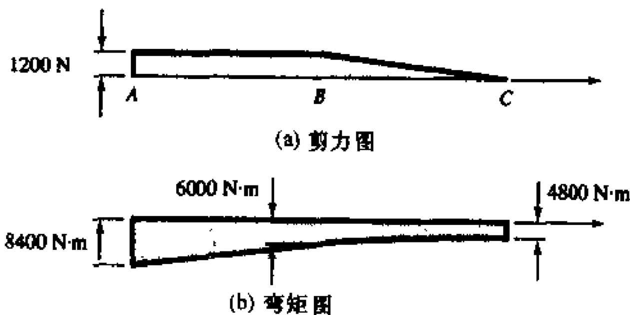


图 6-20

因为 BC 段对 x 的二阶导数是负的，所以 BC 段内弯矩图的凹面是朝下的。由(5)式可以看出弯矩在 AB 段是 x 的线性函数，因此在 AB 段内，弯矩图是一条斜直线，该段左端弯矩为 -8400 N·m，右端弯矩为 -6000 N·m。

题 6.7　如图 6-21 在 A、C 处铰支的外伸梁，承受集度为 300 N/m 的均布载荷及力偶 2700 N·m作用。试写出剪力、弯矩方程并画出相应的图形。

解　☞ 首先用平衡方程求支座反力

$$\sum M_A = 2700\text{N}\cdot\text{m} + R_C(6\text{m}) - (300\text{N/m})(6\text{m})(6\text{m}) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R_A + R_C - (300\text{N/m})(6\text{m}) = 0 \tag{2}$$

解出

$$R_A = 450\text{N}, R_C = 1350\text{N}$$

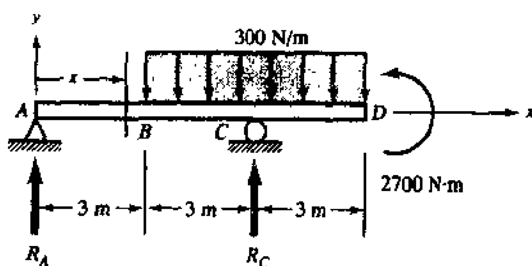
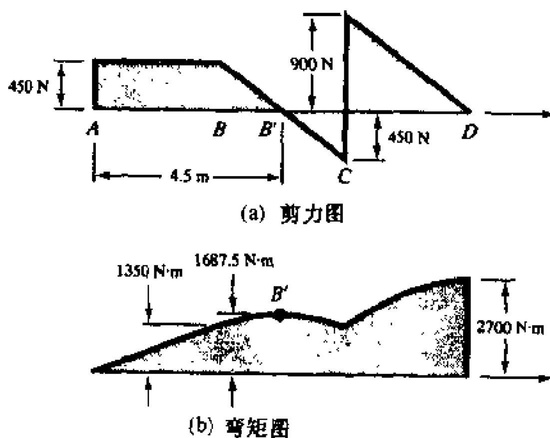


图 6-21



(a) 剪力图

(b) 弯矩图

图 6-22

对示图示的坐标，与 A 相距 x 处截面内剪力由以下三个方程描述

$$V = 450\text{N}, \qquad 0 < x < 3\text{m} \tag{3}$$

$$V = [450 - 300(x-3)]\text{N}, \qquad 3\text{m} < x < 6\text{m} \tag{4}$$

$$V = [450 - 300(x-3) + 1350]\text{N}, \qquad 6\text{m} < x < 9\text{m} \tag{5}$$

同样地，此梁中三个区间的弯矩由下述三式给出：

$$M = 450x\ \text{N}\cdot\text{m}, \qquad 0 < x < 3\text{m} \tag{6}$$

$$M = \left[450x - 300(x-3)\frac{(x-3)}{2}\right]\text{N}\cdot\text{m} \qquad 3\text{m} < x < 6\text{m} \tag{7}$$

$$M = \left[450x - 300\cdot\frac{(x-3)^2}{2} + 1350(x-6)\right]\text{N}\cdot\text{m}, \qquad 6\text{m} < x < 9\text{m} \tag{8}$$

这些方程的图形如图 6-22 所示。在区间 BC 和 CD 内，必须研究(7)式和(8)式弯矩的二阶导数，由于在每个区间二阶导数都是负的，因此弯矩图的凹面均为向下的。

6.19.1 奇异函数

如果载荷在梁上是连续变化的，上述问题中所讨论的方法是有效的。但是如果有集中力或集中力偶存在，就必须对集中力和集中力偶之间的每个区间写出相应的剪力和弯矩方程，尽管这没有原则的困难，但通常会很麻烦，且不方便。正如我们在后面章节中看到的，这些结果对于研究梁的形变是不方便使用的。

用引入所谓奇异函数或半区间函数的方法，至少可以使表达方式紧凑些。这种方法在 1919 年首先由玛考莱(Macauley)应用于梁的分析，因而此种方法人们又称之为玛考莱法，尽管早在 19 世纪 A·科莱斯克(A. Clebsch)曾经使用过此类函数。根据定义，我们引入尖括号 $\langle x-a\rangle$ 并且规定：当 $(x-a)<0$，亦即 $x<a$ 时，$\langle x-a\rangle=0$；如果 $(x-a)>0$，亦即 $x>a$ 时，$\langle x-a\rangle$ 就成为 $(x-a)$。也就是说，只有当自变量大于零时，半区间函数才被定义为具有非零的函数值。当自变量是正值时，尖括号的意义与普通的圆括号相同。奇异函数

$$f_n(x) = \langle x - a\rangle^n$$

服从如下的积分律

$$\int_{-\infty}^{x} \langle y - a\rangle^n \mathrm{d}y = \frac{\langle x - a\rangle^{n+1}}{n+1}, \quad n \geqslant 0$$

对于在题 6.4 和题 6.7 中讨论过的载荷类型，用奇异函数写出剪力和弯矩表达式是很方便的。譬如对于题 6.4 中的剪力，显然单个集中力的影响不可能出现在加力点左侧区间的剪力方程中，但是当考虑加力点右侧时，该集中力会突然出现在剪力方程中。

应用奇异函数，使有可能在全梁范围内对剪力和弯矩方程写出一个统一表达式，而不管载荷是如何复杂。使用奇异函数最重要的一点是便于应用计算机。

题 6.8　使用奇异函数，写出图 6-23 所示简支梁的剪力方程和弯矩方程。

解　☞ 由静力学很容易解得支座反力

$$R_1 = 3000 \text{ lbf}, \qquad R_2 = 1000 \text{ lbf}$$

对于原点在 O 点的图示坐标，可以写出

$$V = 3000\langle x\rangle^0 - 4000\langle x - 1\rangle^0 (\text{lbf}) \tag{1}$$

上式表明：如果 $x<1$ ft，那么 $V = 3000$ lbf；如果 $x>1$ ft，那么 $V = 3000 - 4000 = -1000$ lbf。

类似地

$$M = 3000\langle x\rangle^1 - 4000\langle x - 1\rangle^1 \quad (\text{lbf}\cdot\text{ft}) \tag{2}$$

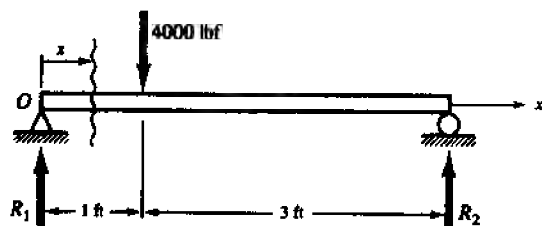


图 6-23

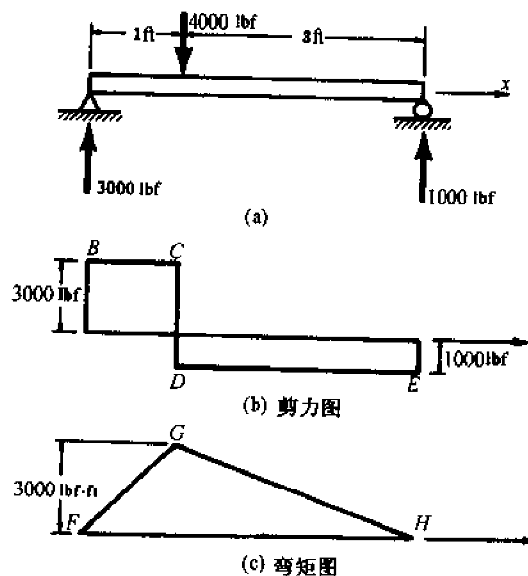


图 6-24

此式表明：如果 $x<1$ ft，那么 $M = 3000x$ (lbf·ft)；如果 $x>1$ ft，那么 $M = 3000x - 4000(x-1)$ (lbf·ft)

只要我们记得奇异函数的定义，那么就可知关系式(1)和(2)对于所有的 x 都是适用的，使用这

些方程即可画出如图 6-24 所示的剪力和弯矩图。

题 6.9 如图 6-25(a)所示，受集中力偶 200 lbf·ft 作用的悬臂梁。试利用奇异函数写出任意位置的剪力和弯矩方程，并画出剪力和弯矩图。

解 ☞ 分离体图如图 6-25(b)所示，图中 V_1 和 M_1 表示支承壁处的约束反力和反力偶。由静力学可知：$V_1=0$，$M_1=200$ lbf·ft。引入图示的坐标系，在此题的情况下，到处应有

$$V = 0 \tag{1}$$

在写出弯矩表达式时，从左向右来考虑，显然直到 A 点右侧都不会有弯矩。在 A 点处施加的 200 lbf·ft 力偶导致 AB 区间发生弯曲，凹面是向下的，按照我们的符号规则是负弯曲。因而在梁中任意点处的弯矩是

$$M = -200\langle x-6\rangle^0 \quad (\text{lbf}\cdot\text{ft}) \tag{2}$$

(1)式和(2)式的图形如图 6-26 所示

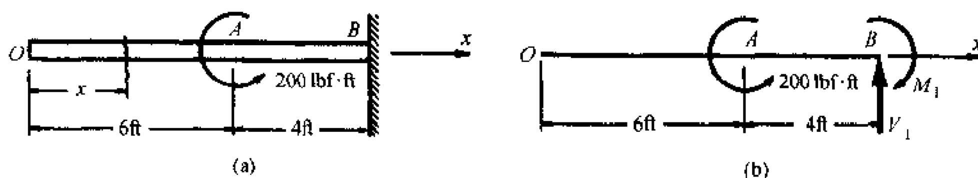


图 6-25

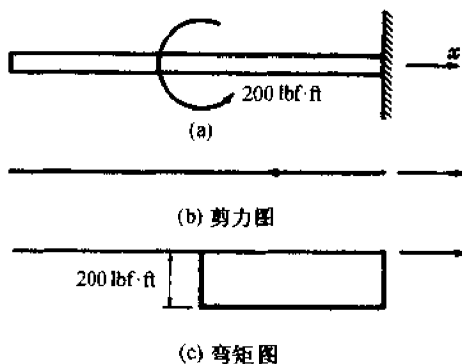


图 6-26

题 6.10 悬臂梁在其自由端受集中力作用，同时在其右半段上受均布载荷的作用，如图 6-27(a)。利用奇异函数写出梁中任意点处的剪力和弯矩方程，并画出剪力和弯矩图形。

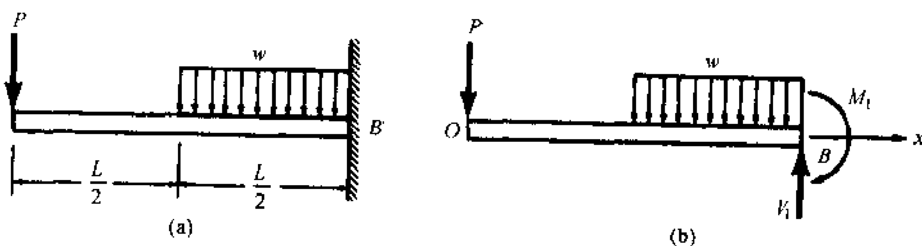


图 6-27

解 ☞ 分离体图如图 6-27(b)所示，由静力学平衡方程可知支承臂处的反力是

$$V_1 = P + \frac{wL}{2}, \qquad M_1 = PL + \frac{wL^2}{8}$$

对于此例的悬梁臂，如果只要求写出剪力和弯矩方程，可以不必求出上述约束反力。

相应于图示原点在 O 处的坐标系，根据剪力的符号规则，给定的集中力和分布载荷都将产生

负剪力，因此可写出

$$V = -P\langle x\rangle^0 - w\langle x - L/2\rangle^1 \tag{1}$$

如果记得奇异函数的定义，则上式就会给出任意截面处的剪力。

同样地，在任意截面上的弯矩是

$$M = -P\langle x\rangle^1 - \frac{w}{2}\langle x - L/2\rangle^2 \tag{2}$$

受载荷作用的梁以及剪力弯矩图如图 6-28 所示。

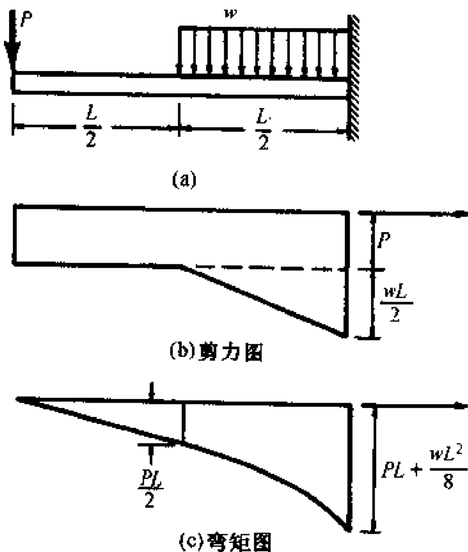


图 6-28

题 6.11　如图 6-29(a)，简支梁承受 1 kN·m 力偶作用。试用奇异函数写出任意点处的剪力、弯矩方程，并画出剪力、弯矩图。

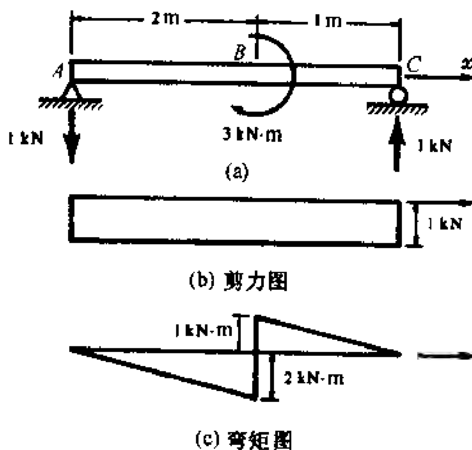


图 6-29

解　☞ 此梁只受到一个力偶作用，为使之平衡，惟一的可能是支座 A、C 处的约束反力 R 形成另外一个力偶，这些反力如图 6-29(a)所示。平衡方程

$$\sum M_A = 3R - 3 = 0$$

解出

$$R = 1\ \text{kN}$$

亦即图示的两个约束反力构成平衡的必要条件。

对此问题的研究说明，A 与 B 之间的剪力是负的(按图 6-7 所示的符号规则)，并且弯矩也是

负的。现在考虑梁上在 B 点右侧的各点，3 kN·m 的力偶产生凹面向上的弯曲，由图 6-7 可知是正弯曲，写出 V 和 M 表达式为

$$V = -(1)\langle x\rangle^{0}\quad \text{kN}$$

$$M = -(1)\langle x\rangle^{1} + 3\langle x-2\rangle^{0}\quad \text{kN}\cdot\text{m}$$

剪力和弯矩图如图 6-29(b)(c)所示。由这些图形发现，当一个力偶作用在梁上时，弯矩图在力偶作用点处要发生突变或间断。

题 6.12　外伸梁 AE 在 AB 和 DE 区间承受均布载荷作用，同时在中点 C 处承担一个力偶作用，如图 6-30。试用奇异函数写出梁的剪力、弯矩方程，并作剪力、弯矩图。

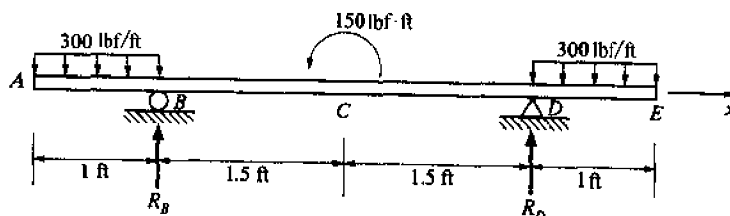


图 6-30

解　☞ 首先计算支座反力，由静力学平衡方程，有

$$\sum M_B = (300\text{lbf/ft})(1\text{ft})(0.5\text{ft}) + 150\text{lbf}\cdot\text{ft} + R_D(3\text{ft}) - (300\text{lbf/ft})(1\text{ft})(3.5\text{ft}) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = -300\text{lbf} + R_B + R_D - 300\text{lbf} = 0 \tag{2}$$

解出

$$R_D = 250\text{lbf},\qquad R_B = 350\text{lbf} \tag{3}$$

由图示的坐标系及奇异函数的定义，可写出

$$V = -\overset{①}{300}\langle x\rangle^{1} + 300\langle x \overset{②}{-} 1\rangle^{1} + 350\langle x \overset{③}{-} 1\rangle^{0} + 250\langle x \overset{④}{-} 4\rangle^{0} - 300\langle x \overset{⑤}{-} 4\rangle^{1} \tag{4}$$

$$M = -300\langle \overset{⑥}{x}\rangle^{1}\frac{\langle x\rangle^{1}}{2} + 300\langle x \overset{⑦}{-} 1\rangle^{1}\frac{\langle x-1\rangle^{1}}{2} + 350\langle x \overset{⑧}{-} 1\rangle^{1} - 150\langle x - \overset{⑨}{2}.5\rangle^{0} + \overset{⑩}{250}\langle x-4\rangle^{1} - 300\langle x \overset{⑪}{-} 4\rangle^{1}\frac{\langle x-4\rangle^{1}}{2} \tag{5}$$

(4)和(5)式中均包含有用“○”内数字标记的各项。对于剪力 V 可解释各项如下：

Ⅰ. 作用在图 6-30 中的 AB* 区间（AB 内任意 x 值）的剪力等于 x 左侧所有向下作用力的代数和，亦即①项 $300x$，这样的力将导致产生图 6-7(d)所示的位移，因此必须在 $300\langle x\rangle$ 之前添加负号。

Ⅱ. 续前，(4)式中的第①项，对于从 $x=0$ 到 $x=5$ ft 区间内的所有 x 都是适用的，这是因为，如果尖括号〈〉中的项是负的，那么奇异函数定义为零，但是并没有限定第①项中 x 的上限。然而对于 B 点右侧的各点必须消去向下的分布载荷 300 lbf/ft 的影响，这可以在 B 点右侧（$x>1$ ft）各点添加向上（正）的分布载荷来实现，这就是第②项。但是这个向上的分布载荷同样也会消除 DE 区间的向下分布载荷，我们将补救这个缺陷。

Ⅲ. 对于 B 的右侧，向上的反力 R_B 具有向上 350 lbf 的剪力突变效应。因为它将导致产生如图 6-7(c)的位移，应取正号，因此在第③项前使用正号。

Ⅳ. 施加在梁上的 150 lbf·ft 力偶没有任何方向的剪力效应，因而它没有出现在(4)式中。

Ⅴ. 对于 D 的右侧，向上的反力 R_D 具有向上 250 lbf 的剪力突变效应，因为它将导致产生图 6-7(c)的位移，应取正号，因此在第④项前使用正号。

Ⅵ. 注意到在（Ⅱ）中，分布在 DE 区间的真实向下的均布载荷已被消去，因此必须引入第⑤项，补上这一项可以使外载荷成为正确的。

(4)式用奇异函数正确地给出了梁内由 A 到 E 的剪力，其剪力图如图 6-31(a)所示。

---

* 此处原文有错。——译者注

用类似的方法，可以写出从 A 到 E 的弯矩方程，所不同的是必须考虑在 C 处施加的 150 lbf·ft 的力偶。力矩方程由(5)式给出，其由 A 到 E 的弯矩图如图 6-31(b)所示。

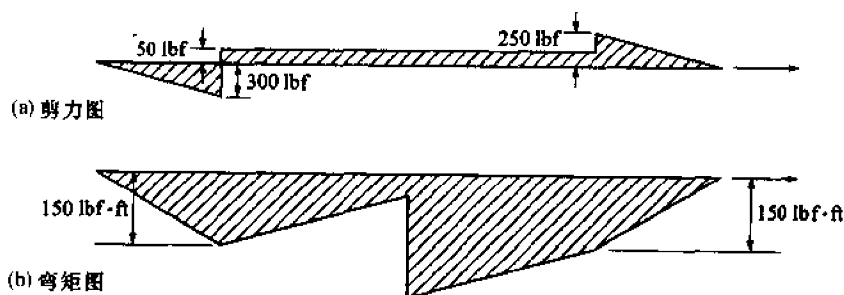


图 6-31

题 6.13 简支梁 AD 在 BC 区段上承受均布载荷，同时在 C 处承受集中力作用，如图 6-32 所示。利用奇异函数写出梁中任意点的剪力、弯矩方程并画剪力、弯矩图。

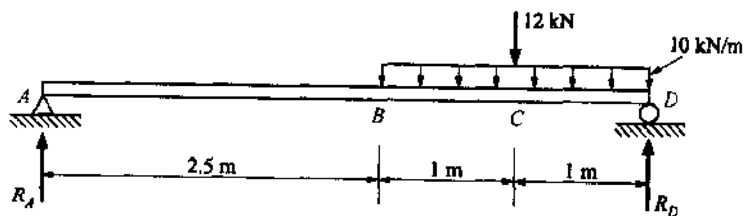


图 6-32

解 ☞ 首先由静力学平衡方程求出 A 和 D 处的约束反力

$$\sum M_A = 4.5R_D - (12\text{kN})(3.5\text{m}) - (20\text{kN})(3.5\text{m}) = 0$$

$$R_D = 24.89\text{kN}$$

$$\sum F_y = R_A + 24.89\text{kN} - 12\text{kN} - 20\text{kN} = 0$$

$$R_A = 7.11\text{kN}$$

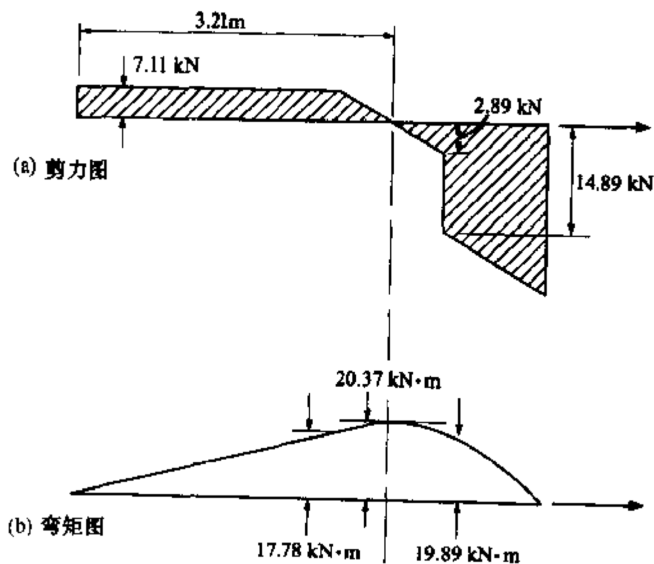


图 6-33

引入图 6-30 所示的坐标系，如同题 6.12 所作的那样，可以写出

$$V = 7.11 - 10\langle x - 2.5\rangle^1 - 12\langle x - 3.5\rangle^0$$

$$M = 7.11\langle x\rangle^1 - 10\langle x - 2.5\rangle^1 \frac{\langle x - 2.5\rangle^1}{2} - 12\langle x - 3.5\rangle^1$$

由这些方程即可画出剪力图和弯矩图分别如图 6-33(a)和(b)所示。

6.19.2 计算机应用

题 6.14 考虑一个在任意两点简支的直梁，由集中力，集中力偶和如下的分布力组成载荷系统，分布力在梁的某个区段上(a)或均匀分布(b)或线性增加(或减少)。试用 BASIC 语言写出计算梁中具有标志意义的剪力和弯矩数值的计算机程序。

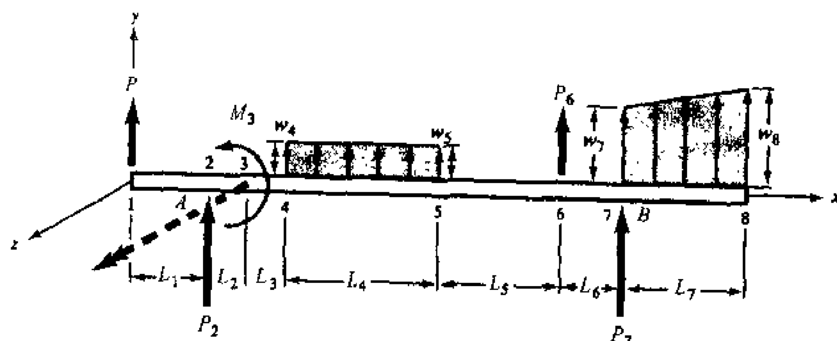


图 6-34

解 我们用图 6-34 中的术语来表示载荷系统。首先必须用静力学方程求出 A 点和 B 点的约束反力，然后引入数字 1、2、3、… 去标注集中力(含约束反力)、集中力作用点和分布力的左右端点的位置，图 6-34 中画出的均为这些载荷的正方向。图中的力偶 M_3 取作正的，这是因为它的双箭头矢量(图中用虚线矢量表示)平行于 z 轴，并指向 z 轴的正向。利用奇异函数写出如下的 BASIC 计算程序，如果需要更多的关于各点之间的剪力、弯矩数值的信息，可在任意需要的位置增加更多的点。

```
00100 REM      THIS PROGRAM IS DEVELOPED TO EVALUATE THE SHEAR FORCES
00110 REM      AND BENDING MOMENTS.
00120 DIM      S(20), P(21), E(21), D(20,2), T(21,2), B(21,2)
00130 REM
00140 REM      S IS SEGMENT LENGTH
00150 REM      P IS POINT LOAD
00160 REM      E IS EXTERNAL MOMENT
00170 REM      D IS DISTRIBUTED LOAD
00180 REM      T IS SHEAR FORCE
00190 REM      B IS BENDING MOMENT
00200 REM
00210 PRINT    " PROGRAM FOR SHEAR FORCES AND BENDING MOMENTS "
00220 PRINT    " ------------------------------------------------ "
00230 PRINT
00240 PRINT    " PLEASE ENTER THE NUMBER OF SEGMENTS: "
00245 INPUT      N
00250 PRINT
00260 PRINT    " PLEASE ENTER THE LENGTH OF EACH SEGMENT FROM LEFT TO RIGHT.
00270 FOR      I=1 TO N
00280 INPUT    S(I)
00290 NEXT     I
00300 PRINT
00310 PRINT    " PLEASE ENTER THE NUMBER OF POINT LOADS: "
00315 INPUT      N1
00320 PRINT
00330 FOR      I=1 TO N1
00340 PRINT    " LOCATIONS AND LOADS: "
00345 INPUT      I1, P(I1)
00350 NEXT     I
00360 PRINT
00370 PRINT    " ENTER THE NUMBER OF EXTERNAL MOMENTS: "
```

```
00375 INPUT       N2
00380 PRINT
00390 FOR        I=1 TO N2
00400 PRINT      " ENTER THE LOCATIONS AND MOMENTS: "
00405 INPUT        L, E(L)
00410 NEXT       I
00420 PRINT
00430 PRINT      " ENTER THE NO. OF DISTRIBUTED LOADED SEGMENTS: "
00435 INPUT       N3
00440 PRINT
00450 FOR        I=1 TO N3
00460 PRINT      " ENTER THE SEGMENT NO., LOADLEFT, LOADRIGHT "
00465 INPUT        N4, D(N4,1), D(N4,2)
00470 NEXT       I
00480 PRINT
00490 LET        T(1,2)=P(1)
00500 LET        B(1,2)=-E(1)
00510 FOR        I=1 TO N
00520 LET        T(I+1,1)=T(I,2)+(D(I,1)+D(I,2))*S(I)/2
00530 LET        T(I+1,2)=T(I+1,1)+P(I+1)
00540 LET        T2=((2*D(I,1)+D(I,2))*S(I)^2)/6
00550 LET        B(I+1,1)=B(I,2)+T(I,2)*S(I)+T2
00560 LET        B(I+1,2)=B(I+1,1)-E(I+1)
00570 NEXT       I
00580 PRINT
00590 PRINT "LOCATION","SHEARLEFT","SHEARRIGHT","MOMENTLEFT","MOMENTRIGHT"
00600 FOR        I=1 TO N+1
00610 PRINT I,T(I,1),T(I,2),B(I,1),B(I,2)
00620 NEXT       I
00630 END
```

选自《应用力学(静力学)的 Basic 问题程序》, William Weaver, Jr., McGraw-Hill, New York, 1972.

题 6.15 如图 6-35 所示的简支梁。试用题 6.14 中的 BASIC 程序计算有标志意义的剪力和弯矩。

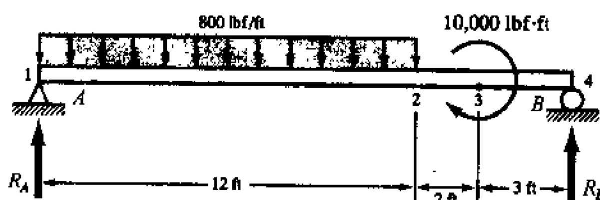


图 6-35

解 ☞ 首先需要计算支座反力。由静力学

$$\sum M_A = -(9600\text{lbf})(6\text{ft}) - 10000\text{lbf}\cdot\text{ft} + R_B(17\text{ft}) = 0$$

$$\sum F_y = R_A + R_B - 9600\text{lbf} = 0$$

解出

$$R_A = 5624\text{lbf},\quad R_B = 3976\text{lbf}$$

需要输入程序的是：

区间的数目：3

每段区间的长度：12, 2, 3

集中载荷的数目(反力)：2

集中载荷的位置和数值：1, 5624

4, 3976

外加力偶的数目：1

外加力偶的位置和数值：3, －1000

有分布载荷的区间数目：1

区间序号、左端载荷、右端载荷(集度)：1, －800, －800

计算机输出如下：

```
 PLEASE ENTER THE NUMBER OF SEGMENTS:
? 3

 PLEASE ENTER THE LENGTH OF EACH SEGMENT FROM LEFT TO RIGHT.
? 12
? 2
? 3

 PLEASE ENTER THE NUMBER OF POINT LOADS:
? 2

 LOCATIONS AND LOADS:
? 1,5624
 LOCATIONS AND LOADS:
? 4,3976

 ENTER THE NUMBER OF EXTERNAL MOMENTS:
? 1

 ENTER THE LOCATIONS AND MOMENTS:
? 3,-10000

 ENTER THE NO. OF DISTRIBUTED LOADED SEGMENTS:
? 1

 ENTER THE SEGMENT NO., LOADLEFT, LOADRIGHT
? 1,-800,-800

LOCATION      SHEARLEFT      SHEARRIGHT      MOMENTLEFT      MOMENTRIGHT
 1             0              5624            0               0
 2            -3976          -3976            9888            9888
 3            -3976          -3976            1936            11936
 4            -3976           0               8               8
```

题 6.16　如图 6-36 所示简支梁在部分区间承受分布载荷 2 kN/m。试利用题 6.14 中的 BASIC 程序计算有标志意义各点(含梁的中点)处的剪力和弯矩。

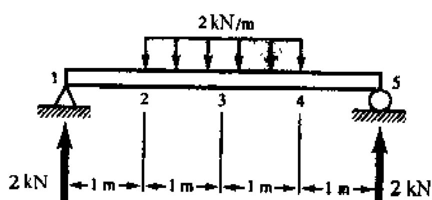


图 6-36

解　☞ 首先利用平衡方程计算端部约束反力,显然两端的反力均为 2 kN。

为了应用给定的程序,必须沿梁的长度选若干具有标志意义的点,这些点通常可选为载荷的加力点。但是本题还要求计算分布载荷中点的剪力和弯矩,因而引入这一附加的点,如图 6-36 所示。

计算机程序输入和输出的内容如下:

```
 PLEASE ENTER THE NUMBER OF SEGMENTS:
? 4

 PLEASE ENTER THE LENGTH OF EACH SEGMENT FROM LEFT TO RIGHT.
? 1
? 1
? 1
? 1

 PLEASE ENTER THE NUMBER OF POINT LOADS:
? 2

 LOCATIONS AND LOADS:
? 1,2000
 LOCATIONS AND LOADS:
? 5,2000

 ENTER THE NUMBER OF EXTERNAL MOMENTS:
? 0

 ENTER THE NO. OF DISTRIBUTED LOADED SEGMENTS:
? 2

 ENTER THE SEGMENT NO., LOADLEFT, LOADRIGHT
```

```
? 2,-2000,-2000
 ENTER THE SEGMENT NO., LOADLEFT, LOADRIGHT
? 3,-2000,-2000

LOCATION        SHEARLEFT       SHEARRIGHT      MOMENTLEFT      MOMENTRIGHT
 1               0               2000            0               0
 2               2000            2000            2000            2000
 3               0               0               3000            3000
 4               -2000           -2000           2000            2000
 5               -2000           0               0               0
SRU       0.129 UNTS.
RUN  COMPLETE
```

6.20 习　题

对于图 6-37、图 6-38 所示的悬臂梁，写出梁内任意点处的剪力和弯矩方程，并画剪力和弯矩图。

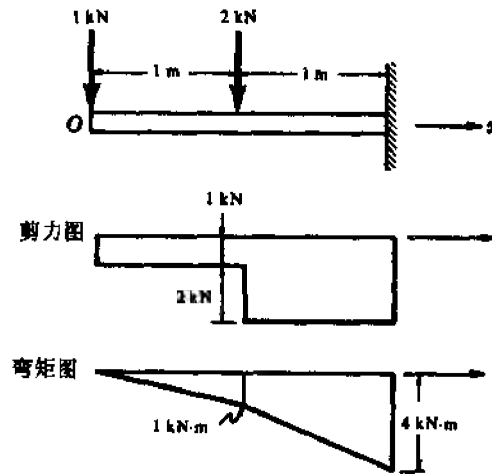


图 6-37

题 6.17

答案：

剪力

$$V = -1\ \text{kN},\quad 0 < x < 1\text{m}$$
$$V = -3\text{kN},\quad 1 < x < 2\text{m}$$

弯矩

$$M = -x\text{kN}\cdot\text{m},\quad 0 < x < 1\text{m}$$
$$M = -x - 2(x-1)\text{kN}\cdot\text{m},\quad 1 < x < 2\text{m}$$

题 6.18

答案：

剪力

$$V = 2.1\ \text{kN},\quad 0 < x < 2\text{m}$$
$$V = 2.1 - 2.4 = -0.3\text{kN},\quad 2 < x < 3\text{m}$$
$$V = 2.1 - 2.4 + 1.5 = 1.2\text{kN},\quad 3 < x < 4\text{m}$$

弯矩

$$M = 2.1x\text{kN}\cdot\text{m},\quad 0 < x < 2\text{m}$$
$$M = 2.1x - 2.4(x-2)\text{kN}\cdot\text{m},\quad 2 < x < 3\text{m}$$
$$M = 2.1x - 2.4(x-2) + 1.5(x-3)\text{kN}\cdot\text{m},\quad 3 < x < 4\text{m}$$

对于题 6.19～题 6.25 中简支梁及其载荷，写出梁内任一点处的剪力和弯矩方程，并画出剪力和弯矩图。

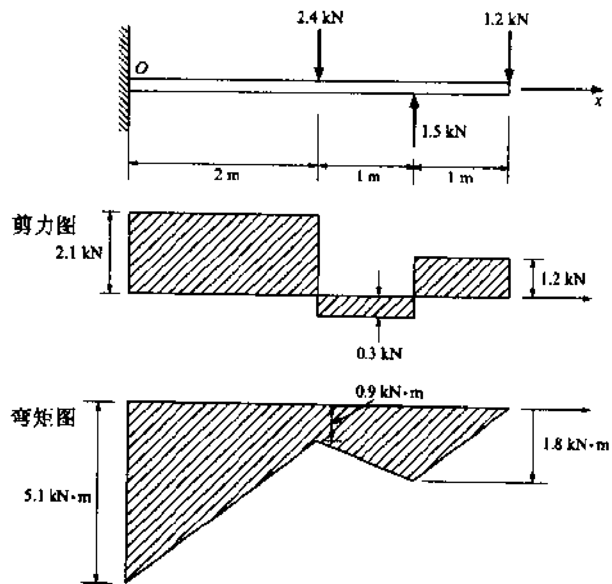


图 6-38

题 6.19

答案：

剪力

$$V = 500 - 100x(\text{lbf}), \quad 0 < x < 4\ \text{ft}$$
$$V = 100 - 200(x - 4)(\text{lbf}), \quad 4 < x < 8\ \text{ft}$$

弯矩

$$M = 500x - 50x^2(\text{lbf} \cdot \text{ft}), 0 < x < 4\text{ft}$$
$$M = 500x - 400(x - 2),$$
$$- 100(x - 4)^2(\text{lbf} \cdot \text{ft}), \quad 4 < x < 8\text{ft}$$

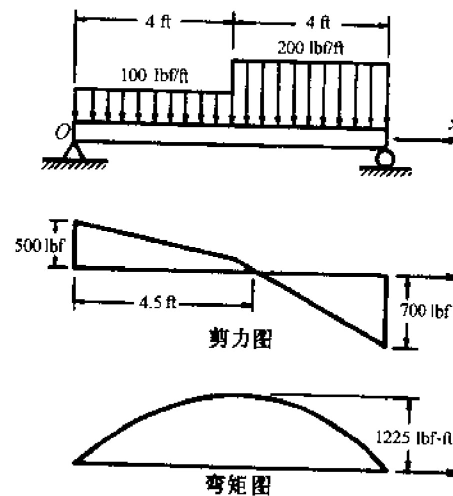


图 6-39

题 6.20

答案：

剪力

$$V = 20\text{kN}, \quad 0 < x < 0.5\text{m}$$
$$V = 20 - 1.5(x - 0.5)\text{kN}, \quad 0.5\text{m} < x < 2.5\text{m}$$
$$V = -10\text{kN}, \quad 2.5\text{m} < x < 4.5\text{m}$$

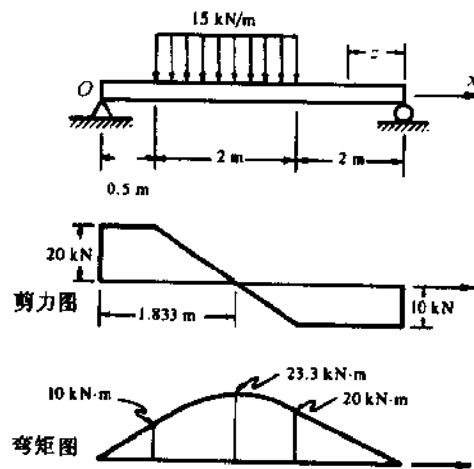


图 6-40

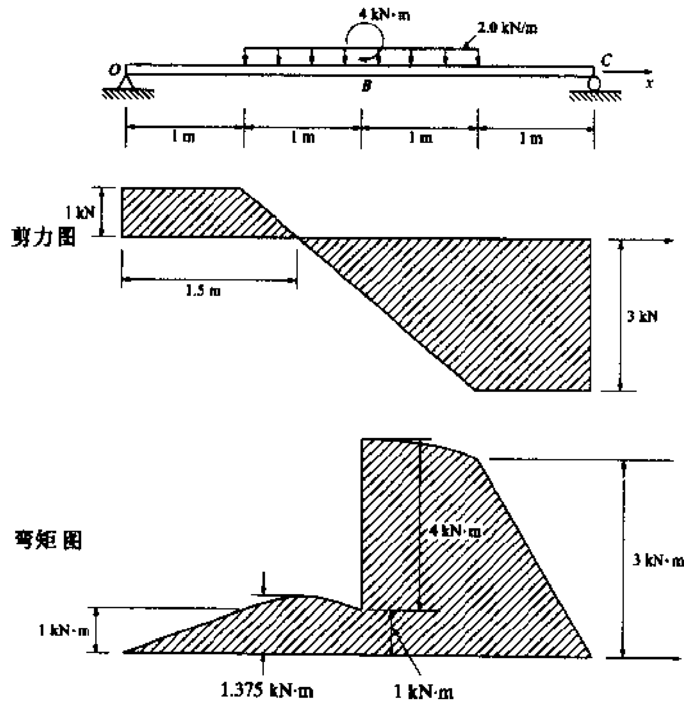


图 6-41

弯矩

$$M = 20x\text{kN}\cdot\text{m}, \qquad 0 < x < 0.5\text{m}$$
$$M = 20x - 7.5(x-0.5)^2\text{kN}\cdot\text{m}, \qquad 0.5\text{m} < x < 2.5\text{m}$$
$$M = 10z\text{kN}\cdot\text{m}, \qquad 0 < z < 2\text{m}$$

题 6.21

答案：剪力

$$V = 1\text{kN}, \qquad 0 < x < 1\text{m}$$
$$V = 1 - 2(x-1)\text{kN}, \qquad 1\text{m} < x < 3\text{m}$$
$$V = 3\text{kN}, \qquad 3\text{m} < x < 4\text{m}$$

弯矩

$$M = 1xk\ \mathrm{N\cdot m},\qquad 0 < x < 1\mathrm{m}$$
$$M = 1x - (x-1)(x-1)/2,\qquad 1\mathrm{m} < x < 2\mathrm{m}$$
$$M = 1x - 2(x-1)\left(\frac{x-1}{2}\right) - 4,\qquad 2\mathrm{m} < x < 3\mathrm{m}$$
$$M = 1x - 2(x-1)\left(\frac{x-1}{2}\right) + 4,\qquad 3\mathrm{m} < x < 4\mathrm{m}$$

题 6.22

答案：

剪力

$$V = 5620 - 800x(\mathrm{lbf}),\qquad 0 < x < 12\mathrm{ft}$$
$$V = -3980(\mathrm{lbf}),\qquad 12 < x < 17\mathrm{ft}$$

弯矩

$$M = 5620x - 400x^2(\mathrm{lbf\cdot ft}),\qquad 0 < x < 12\mathrm{ft}$$
$$M = 5620x - 9600(x-6)(\mathrm{lbf\cdot ft}),\qquad 12\mathrm{ft} < x < 14\mathrm{ft}$$
$$M = 3980z\qquad 0 < z < 3\mathrm{ft}$$

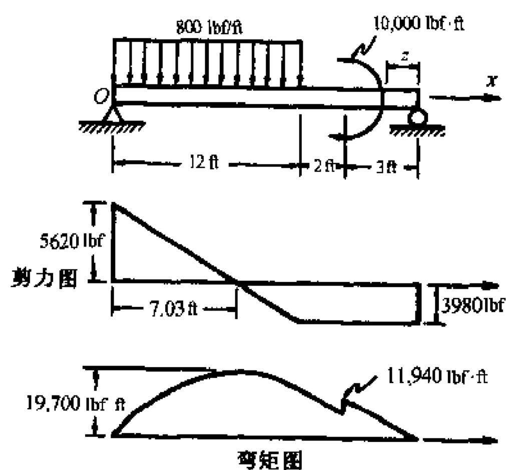


图 6-42

题 6.23

答案：

剪力

$$V = 60\mathrm{kN}\qquad 0 < x < 1\mathrm{m}$$
$$V = 60 - 70 - 20(x-1)\mathrm{kN}\qquad 1\mathrm{m} < x < 3\mathrm{m}$$

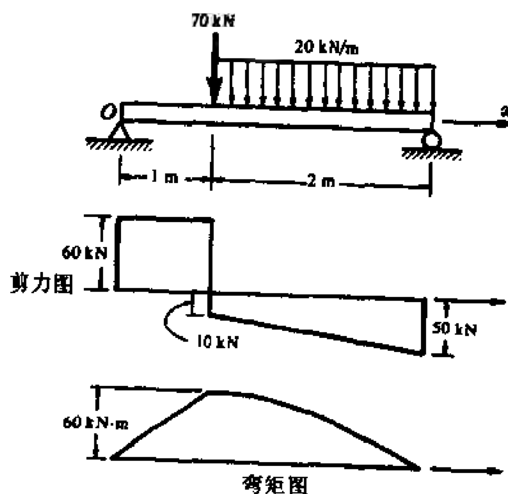


图 6-43

弯矩

$$M = 60x\text{kN}\cdot\text{m} \qquad 0 < x < 1\text{m}$$

$$M = 60x - 70(x-3) - 10(x-1)^2\text{kN}\cdot\text{m} \qquad 1\text{m} < x < 3\text{m}$$

题 6.24

答案：

剪力

$$V = 0 \qquad 0 < x < 2\text{ft}$$

$$V = 187.5(\text{lbf}) \qquad 2 < x < 16\text{ft}$$

$$V = -3312.5(\text{lbf}) \qquad 16 < x < 18\text{ft}$$

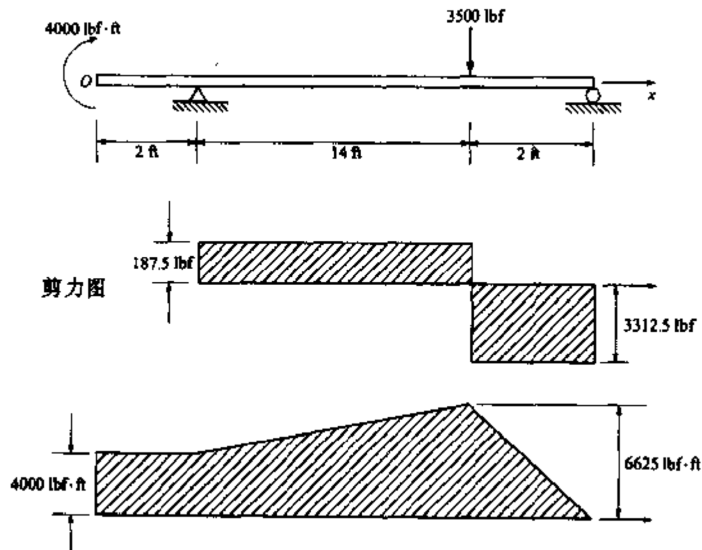


图 6-44

弯矩

$$M = 4000(\text{lbf}\cdot\text{ft}) \qquad 0 < x < 2\text{ft}$$

$$M = 4000 + 187.5(x-2)(\text{lbf}\cdot\text{ft}) \qquad 2\text{ft} < x < 16\text{ft}$$

$$M = 4000 + 187.5(x-2) - 3500(x-16)(\text{lbf}\cdot\text{ft}) \qquad 16\text{ft} < x < 18\text{ft}$$

题 6.25

答案：

剪力

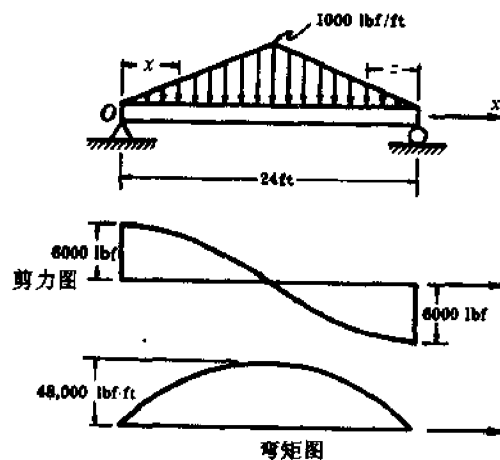


图 6-45

$$V = 6000 - \frac{x^2}{24}(1000)(\text{lbf}) \quad 0 < x < 12\text{ft}$$

$$V = -6000 + \frac{z^2}{24}(1000)(\text{lbf}) \quad 0 < z < 12\text{ft}$$

弯矩

$$M = 6000x - \frac{x^2}{72}(1000)(\text{lbf} \cdot \text{ft}) \quad 0 < x < 12\text{ft}$$

$$M = 6000z - \frac{z^2}{72}(1000)(\text{lbf} \cdot \text{ft}) \quad 0 < z < 12\text{ft}$$

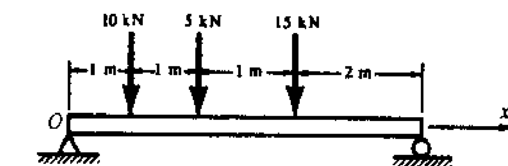
对于题 6.26～题 6.29，利用奇异函数写出梁内任意点处的剪力和弯矩方程，并作相应的图形。

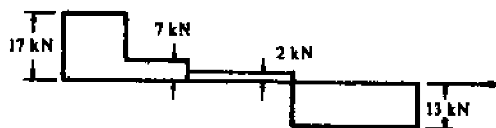
题 6.26

答案：

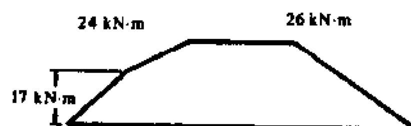
剪力

$$V(x) = 17\langle x\rangle^0 - 10\langle x-1\rangle^0 - 5\langle x-2\rangle^0 - 15\langle x-3\rangle^0 \text{ kN}$$





剪力图



弯矩图

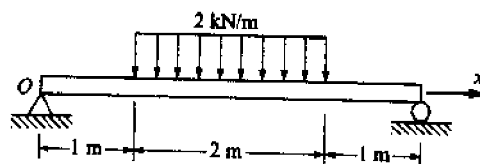
图 6-46

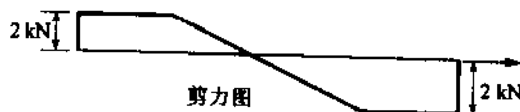
弯矩

$$M(x) = 17\langle x\rangle^1 - 10\langle x-1\rangle^1 - 5\langle x-2\rangle^1 - 15\langle x-3\rangle^1 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

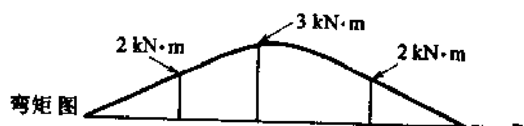
题 6.27

答案：





剪力图



弯矩图

图 6-47

剪力

$$V(x) = 2\langle x\rangle^0 - 2\langle x-1\rangle^1 + 2\langle x-3\rangle^1 + 2\langle x-4\rangle^0 \mathrm{kN}$$

弯矩

$$M(x) = 2\langle x\rangle^1 - 1\langle x-1\rangle^2 + 1\langle x-3\rangle^2 + 2\langle x-4\rangle^1 \mathrm{kN\cdot m}$$

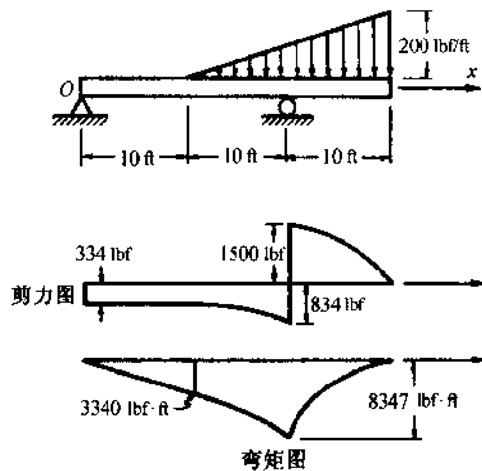


图 6-48

题 6.28

答案:

剪力

$$V(x) = -334\langle x\rangle^0 - 5\langle x-10\rangle^2 + 2334\langle x-20\rangle^0 \quad (\mathrm{lbf})$$

弯矩

$$M(x) = -334\langle x\rangle^1 - \frac{5}{3}\langle x-10\rangle^3 + 2334\langle x-20\rangle^1 (\mathrm{lbf\cdot ft})$$

题 6.29

答案:

剪力(b)

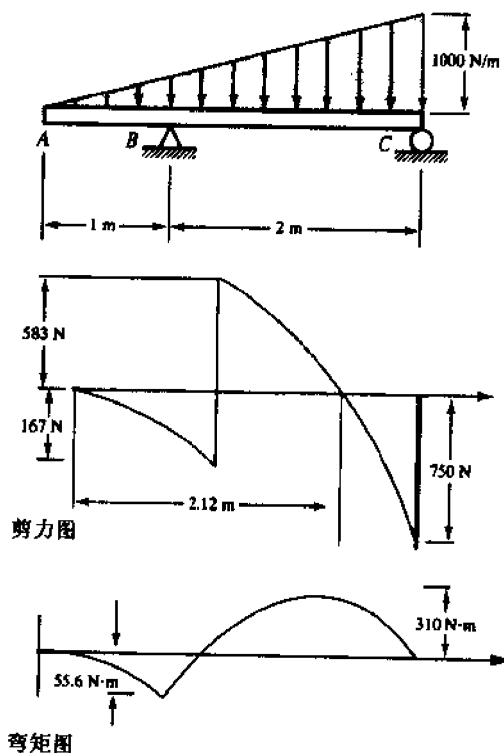


图 6-49

$$V = -166.7\langle x\rangle^2 + 750\langle x-1\rangle^0$$

弯矩(c)

$$M = -55.6\langle x\rangle^3 + 750\langle x-1\rangle^1$$

题 6.30　一简支梁承受均布载荷及力偶的作用，如图 6-50 所示。试利用题 6.14 中的 BASIC 程序求梁中具有标志意义点处的剪力和弯矩，并画出这些结果的近似图形。

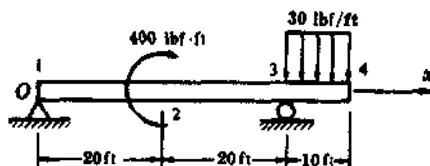


图 6-50

(答案：

位置	左剪力	右剪力	左弯矩	右弯矩
1	0	−47.5	0	0
2	−47.5	−47.5	−950	−550
3	−47.5	300	−1500	−1500
4	0	0	0	0

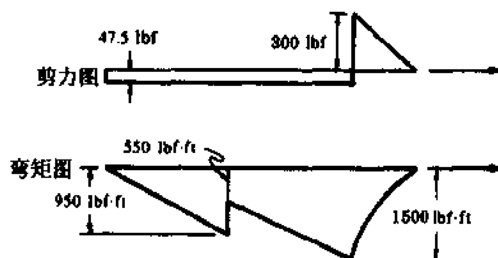


图 6-51

题 6.31　一简支梁承受均布载荷及力偶的作用，如图 6-52 所示。试利用题 6.14 中的 BASIC 程序求梁中具有标志意义的点处的剪力和弯矩。

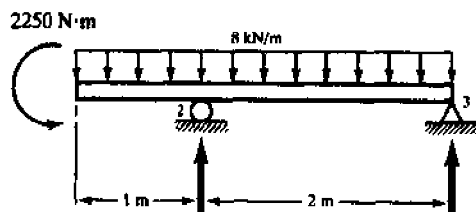


图 6-52

(答案：

位置	左剪力	右剪力	左弯矩	右弯矩
1	0	0	0	−2250
2	−8000	11125	−6250	−6250
3	−4875	0	0	0

第 7 章　平面面积的形心、惯性矩和惯性积

7.1　单元体面积的一次矩

单元体面积 $\mathrm{d}a$ 关于平面内任一轴的一次矩,定义为单元体的面积乘以单元体与该轴垂直距离的积。例如,在图 7-1 中,单元体面积 $\mathrm{d}a$ 关于 x 轴的一次矩定义为

$$\mathrm{d}Q_x = y\mathrm{d}a$$

关于 y 轴的一次矩为

$$\mathrm{d}Q_y = x\mathrm{d}a$$

应用见题 7.2 和题 7.12。

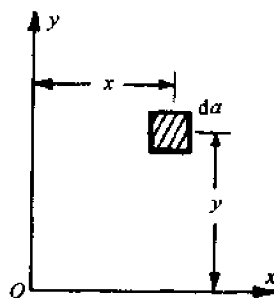


图 7-1

7.2　有限面积的一次矩

有限面积关于平面内任一轴的一次矩等于有限面积内包含的所有单元体面积对该轴一次矩之和,求和常用积分来计算。如有限面积的一次矩用 Q_x 表示,则

$$Q_x = \int \mathrm{d}Q_x$$

此式的应用见题 7.1 和题 7.3

7.3　平面的形心

平面的形心由下述方程定义

$$\bar{x} = \frac{\int x\mathrm{d}a}{A} = \frac{Q_y}{A}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y\mathrm{d}a}{A} = \frac{Q_x}{A}$$

式中 A 为平面的面积。

对于由 N 个子平面组成的组合平面,上式中的积分将由求和代替,有

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{7.1}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} \tag{7.2}$$

式中 A_i、$\bar{x}_i$ 和 $\bar{y}_i$ 为第 i 子平面的面积及形心坐标。

以上各式的应用见题7.2、题7.3和题7.12。

平面的形心是这样一个点，假想地将平面面积集中在此点处，对于任何轴的一次矩都保持不变。例如一块金属的薄平板，如果支承在它的形心之下，那么它将会在水平平面内保持平衡。

有少数平面的形心位置是很清楚的，在对称图形如圆形或矩形中，它的形心和图形的几何中心是重合的。

通常用带有"－"的坐标表示形心坐标，亦即 $\bar{x}$ 表示形心的 x 坐标。

7.4　单元体面积的二次矩或惯性矩

单元体面积 da 关于平面内任一轴的二次矩或惯性矩，定义为单元体的面积乘以单元体与该轴垂直距离的平方。在图7-1中，单元体关于 x 轴的惯性矩为

$$dI_x = y^2 da$$

关于 y 轴的惯性矩为

$$dI_y = x^2 da$$

7.5　有限面积的二次矩或惯性矩

有限面积关于平面内任一轴的二次矩或惯性矩等于有限面积内所包含的全部单元体对该轴惯性矩之和。这同样也经常用积分来计算。如果有限面积关于 x 轴的惯性矩记作 I_x，则有

$$I_x = \int dI_x = \int y^2 da \tag{7.3}$$

同理

$$I_y = \int dI_y = \int x^2 da \tag{7.4}$$

对于由 N 个子平面 A_i 组成的组合平面，上两式的积分可用和式代替，即

$$I_x = \sum_{i=1}^{N} (I_x)_i, \qquad I_y = \sum_{i=1}^{N} (I_y)_i$$

以上各式的应用见题7.4和题7.6～题7.10。

7.6　单　　位

惯性矩的单位是长度的4次方，即$(\text{in})^4$ 或 m^4。

7.7　有限面积惯性矩的平行轴定理

有限面积的惯性矩平行轴定理叙述为：面积关于任一轴的惯性矩等于对过形心平行轴的惯性矩再加上面积乘以两轴垂直距离的平方。对于图7-2，轴 x_G 和 y_G 过平面面积的形心，轴 x 和轴 y 是与形心轴 x_G、y_G 相距 y_1 和 x_1 的平行轴。令 A 表示平面图形的面积，I_{xG}和 I_{yG}表示关于形心轴的惯性矩，I_x、I_y 表示关于 x 轴和 y 轴的惯性矩。那么应有

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2 \tag{7.5}$$

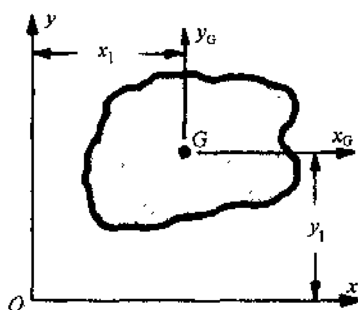


图 7-2

$$I_y = I_{yG} + A(x_1)^2 \tag{7.6}$$

将在题 7.5 中导出此关系式，其应用见题 7.6、题 7.8、题 7.11 和题 7.12。

7.8 回 转 半 径

如果面积 A 关于 x 轴的惯性矩记作 I_x，那么回转半径 r_x 定义为

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \tag{7.7}$$

同理，关于 y 轴的回转半径 r_y 定义为

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \tag{7.8}$$

因为惯性矩 I 的单位是长度的四次方，面积 A 的单位是长度的平方，因而回转半径具有长度的量纲，亦即“in”或“m”。回转半径经常被用作比较，但它并无确切的物理意义。见题 7.10 和题 7.11。

7.9 单元体面积的惯性积

单元体面积 da 关于平面内 x、y 轴的惯性积由下式计算

$$\mathrm{d}I_{xy} = xy\mathrm{d}a$$

其中 x、y 是图 7-1 中单元体面积的坐标。

7.10 有限面积的惯性积

有限面积关于平面内 x、y 轴的惯性积等于有限面积内所包含的全部单元体关于该两轴惯性积之和，即

$$I_{xy} = \int xy\mathrm{d}a \tag{7.9}$$

由此，显然可知惯性积可能是正的，也可能是负的，或者是零。对于由 N 个子面积 Ai 组成的组合截面，若各子面积关于 x、y 轴的惯性积均为已知时，(7.9)式中的积分可用求和代替。

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{N}(I_{xy})_i \tag{7.10}$$

应用可见题 7.13 和题 7.15。

7.11　有限面积惯性积的平行轴定理

有限面积惯性积的平行轴定理叙述为：面积关于 x、y 轴的惯性积等于该面积对平行的形心轴惯性积再加上面积与其形心到 x、y 轴距离之积。如图 7-2 所示，x_G、y_G 轴通过面积的形心，x、y 轴是与形心轴 x_G、y_G 平行、相距 y_1 和 x_1 的轴。令 A 表示图形的面积，$I_{x_Gy_G}$ 是关于形心轴的惯性积，则

$$I_{xy} = I_{x_Gy_G} + Ax_1y_1 \tag{7.11}$$

将在题 7.14 中导出这个关系，其应用见题 7.15 和题 7.16。

7.12　主惯性矩

在平面面积的任意点处，都会存在一对相互垂直的轴，平面面积关于此两轴的惯性矩是过该点各轴惯性矩的极大值和极小值。惯性矩的极大值和极小值叫做主惯性矩，可由下式计算：

$$(I_{x1})_{\max} = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \tag{7.12}$$

$$(I_{x1})_{\min} = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2} \tag{7.13}$$

这些表达式将在题 7.17 中导出，其应用见题 7.18。

7.13　主　　轴

过所选择点的一对相互垂直的轴线，平面面积关于该两轴的惯性矩分别为极大和极小值，称此对轴线为主轴。其应用见题 7.16。

如果某一对轴为主轴，则关于该轴线的惯性积等于零。由惯性积定义的积分可以看出，如果 x 轴或 y 轴中有一个、或两个均为对称轴，那么关于 x、y 轴的惯性积为零。因而可知，对称轴一定是主轴。

7.14　静力学资料

本章中所需要的大多数与静力学有关的平截面性质列表于图 7-3 中。这些平截面图形包括：(a)矩形，(b)三角形，(c)圆形，(d)半圆形，(e)1/4 圆形，(f)扇形。

截面形状	面　积	形心位置
矩形 b h (a)	bh	几何中心
三角形 G h $\bar{y}$ b (b)	$\frac{1}{2}bh$	$\bar{y} = \frac{h}{3}$

图 7-3

截面形状	面　积	形心位置
圆形 (c)	πR^2 或 $\frac{\pi}{4}D^2$	几何中心
半圆形 (d)	$\frac{1}{2}\pi R^2$ 或 $\frac{\pi}{8}D^2$	$\bar{y}=\frac{4R}{3\pi}$
1/4圆形 (e)	$\frac{\pi R^2}{4}$	$\bar{y}=\frac{4R}{3\pi}$
扇形 (f)	θR^2	$\bar{x}=\frac{2R\sin\theta}{3\theta}$

图 7-3(续)

7.15 例　　题

题 7.1　图 7-4 中的阴影截面的边界曲线方程为 $y_1=\sqrt[3]{x}$、$y_2=x^3$，端点在(1.1)处。试求其形心的 y 坐标。

解　选择如图 7-4 中所示的、由曲线 y_1 和 y_2 限定的水平单元体(此单元体内的各点均具有相同的 y 坐标)，该单元体的高度(宽度)是 dy。由形心位置的定义，有

$$\bar{y}=\frac{\int y\mathrm{d}a}{A}$$

式中

$$\mathrm{d}a=(x_2-x_1)\mathrm{d}y$$

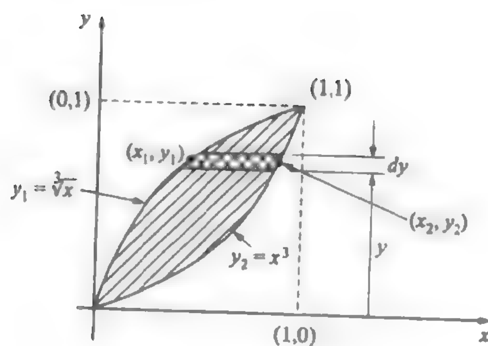


图 7-4

对本例，应有

$$\bar{y}=\frac{\int_0^1 (x_2-x_1)(y)(dy)}{\int_0^1 (x_2-x_1)dy}=\frac{\int_0^1 (y^{1/3}-y^3)(y)(dy)}{\int_0^1 (y^{1/3}-y^3)(dy)}=\frac{16}{70}=0.229$$

本题中的积分是很简单的，对于更复杂的一些问题，积分运算可由计算机完成。借助于能顺利完成上述积分运算的专利程序，许多运算都是有效的。

题7.2　如图7-5所示，圆形截面中圆心角为2θ的扇形被挖去，试求图中阴影截面形心的$\bar{y}$坐标。

解　☞ 由本章的表格提要(图7-3)，已知圆心角为2θ的扇形的面积为θR^2，形心坐标为$2R\sin\theta/3\theta$(参阅图7-6)。在该提要中也讲到圆截面的形心就是它的几何中心。

根据定义，图7-4中阴影面积形心的$\bar{y}$坐标可由下式给出：

$$\bar{y}=\frac{\int y\mathrm{d}a}{A}\quad 或\quad \frac{\sum y\mathrm{d}a}{A}$$

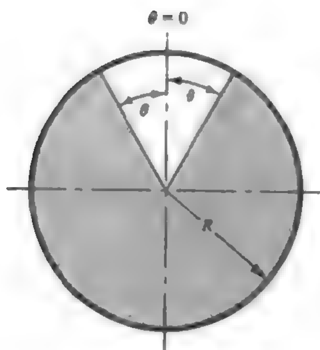


图7-5

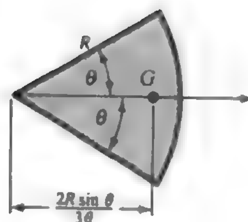


图7-6

此题中的阴影截面由三部分组成①下半圆截面②上半圆截面③被除去的扇形截面。因而各单独的阴影截面可表示为图7-7。

根据这三个部分，利用公式(7.1)，可有

$$\bar{y}=\frac{\frac{\pi}{2}R^{2①}\left(-\frac{4R}{3\pi}\right)+\frac{\pi}{2}R^{2②}\left(\frac{4R}{3\pi}\right)-\theta R^{2③}\left(\frac{2R}{3\theta}\sin\theta\right)}{\pi R^2-\theta R^2}=-\frac{2R\sin\theta}{3(\pi-\theta)}$$

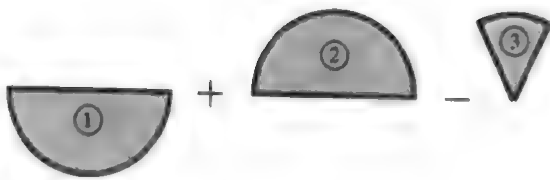


图7-7

题7.3　600 mm×1000 mm矩形的金属薄片沿斜线AC和DF折叠两个上角，如图7-8所示。在圆点线所围的区域内，金属片成为双倍厚度。试求折叠后金属薄片质心的$\bar{y}$坐标。

解　☞ 根据定义，均匀厚度薄片的质心$\bar{y}$坐标为

$$\bar{y}=\frac{\int y\mathrm{d}a}{A}\quad 或\quad \frac{\sum y_iA_i}{A}$$

对于此例，上述表达式中的分子是截面关于x轴的一次矩。在数字运算中，注意到$\triangle ABC$、$\triangle DEF$被除去，但又布置在$\triangle ACG$和$\triangle DFH$处，使其成为双倍的厚度。因此应有

$$\bar{y} = \left\{(600)(1000)(500) - 2\left[\frac{1}{2}(250)(250)(1000 - 250/3)\right] + 2\left[\frac{1}{2}(250)(250)(750 + 250/3)\right]\right\} = (600)(1000)$$

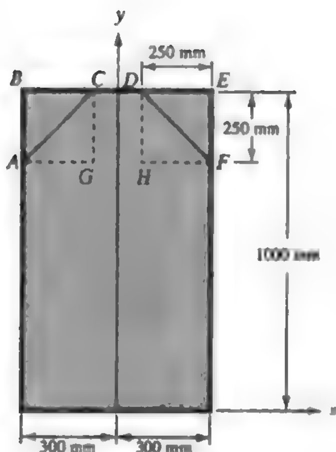


图 7-8

题 7.4　试求矩形截面关于过其形心且平行于底边的水平轴的惯性矩。

解　引入图 7-9 所示的坐标系，过形心、且平行于底边的水平轴为 x_G，关于 x_G 轴的惯性矩为

$$I_{xG} = \int y^2 \mathrm{d}a$$

为方便起见，选择坐标 y 为常数的单元体，图中的阴影单元体就具有这样的特点。

$$I_{xG} = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b\mathrm{d}y = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12}bh^3$$

这个量具有长度 4 次方的量纲，或是 $(\mathrm{in})^4$、或是 m^4。

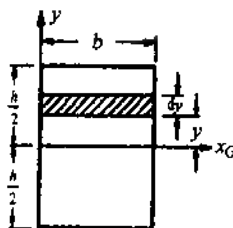


图 7-9

题 7.5　推导平面图形惯性矩的平行轴定理。

解　考虑图 7-10 所示的平面图形。假设已知其形心 G 的位置，x_G、y_G 是过形心的坐标轴，x、y 轴分别与形心轴 x_G、y_G 平行，且相距 y_1 和 x_1。

对于面积为 $\mathrm{d}a$ 的单元体，关于 x 轴的惯性矩为 $\mathrm{d}I_x = (y_1 + y')^2\mathrm{d}a$。全部面积 A 关于 x 轴的惯性矩为

$$I_x = \int \mathrm{d}I_x = \int (y_1 + y')^2 \mathrm{d}a = \int (y_1)^2 \mathrm{d}a + 2\int y_1 y' \mathrm{d}a + \int (y')^2 \mathrm{d}a$$

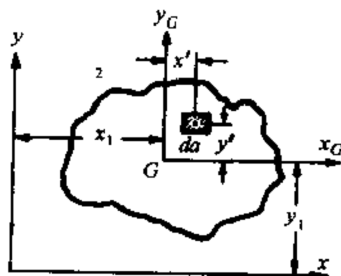


图 7-10

上式右侧的第一个积分项，因为 y_1 是常数，$\int (y_1)^2 \mathrm{d}a = y_1^2\int \mathrm{d}a = y_1^2 A$；在第二项中，注意到 y' 是相对于形心轴而言的，应有

$$2y_1\int y' \mathrm{d}a = 2y_1(0) = 0;$$

第三项应等于 I_{xG}，即平面图形关于水平形心轴的惯性矩。于是

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2$$

对另一轴，采用同样的方法，会有

$$I_y = I_{yG} + A(x_1)^2$$

此即为平面面积惯性矩的平行轴定理。要指出的是：上述公式所包含的轴中，其中有一个必须是通过平面图形形心的。此定理可叙述为：平面图形相对于非形心轴的惯性矩等于与之平行的形心轴惯性矩加上平面图形的面积乘以两轴距离的平方。

惯性矩总是正值;关于形心轴的惯性矩是一系列平行轴惯性矩中最小的。

题 7.6　求矩形图形对于与底边重合轴的惯性矩。

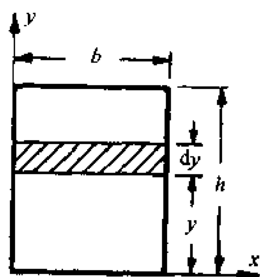


图 7-11

解 ☞ 图 7-11 中的坐标系是非常方便的，根据关于 x 轴的惯性矩定义，应有

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}a,$$

对于图示的阴影单元体，单元内各处的 y 均为常数，因此

$$I_x = \int_0^h y^2 b \mathrm{d}y = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}bh^3$$

此解答也可以将平行轴定理应用于题 7.4 的结果得到。这可以叙述为：相对于底边的惯性矩等于形心轴惯性矩加上图形面积与两轴距离平方的乘积。于是

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2 = \frac{1}{12}bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}bh^3$$

题 7.7　试求图 7-12 所示三角形关于底边轴线的惯性矩。

解 ☞ 引入图示的坐标系，关于水平 x 轴的惯性矩为 $I_x = \int y^2 \mathrm{d}a$ 。对于图中的阴影单元，单元内各点的 y 坐标均为常数，于是 $I_x = \int_0^h y^2 s \mathrm{d}y$，由相似三角形，可知 $s/b = (h-y)/h$，于是

$$I_x = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\int_0^h y^2 \mathrm{d}y - \int_0^h y^3 \mathrm{d}y\right] = \frac{1}{12}bh^3$$

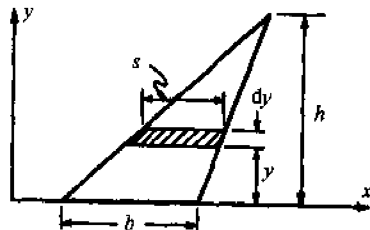


图 7-12

题 7.8　试求三角形关于过形心与底边平行的轴的惯性矩。

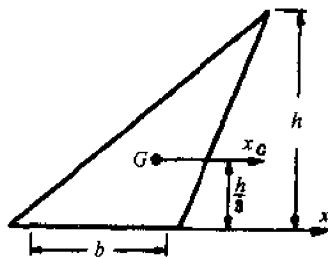


图 7-13

解 ☞ 令 x 轴与底边重合，x_G 为与 x 轴平行的、过形心的轴，如图 7-13 所示。

由图 7-3(b) 可知，x_G 轴与底边相距 $h/3$，根据惯性矩平行轴定理，有

$$I_x = I_{xG} + A(y_1)^2。$$

但是，由题 7.7 可知 I_x、A 和 $y_1(=h/3)$ 都是已知的。于是，可求解待求的未知量 I_{xG}。将各数据代入上式，有

$$\frac{bh^3}{12} = I_{xG} + \frac{1}{2}bh\left(\frac{h}{3}\right)^2$$

解出

$$I_{xG} = \frac{1}{36}bh^3$$

题 7.9　试求圆形截面对其直径的惯性矩。

解 ☞ 选图 7-14 所示的阴影单元，计算工作用极坐标进行。圆截面的半径记作 r。根据定义 $I_x = \int y^2 \mathrm{d}a$，注意到 $y = \rho\sin\theta$、$\mathrm{d}a = \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho$，因而

$$I_x = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho^2 \sin^2\theta \rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\rho = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^r = \frac{r^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\pi r^4}{4}$$

如果用 D 表示圆截面的直径，$D=2r$，则 $I_x = \pi D^4/64$。

这是实心圆截面极惯性矩的 1/2(见题 5.1)。半圆截面对于与底边重合轴的惯性矩等于

$$I_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{128}$$

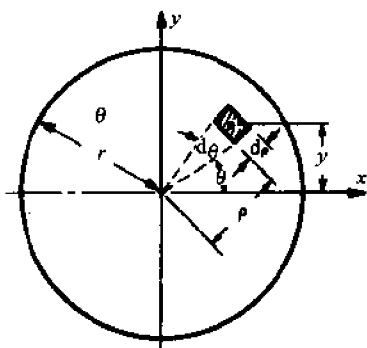


图 7-14

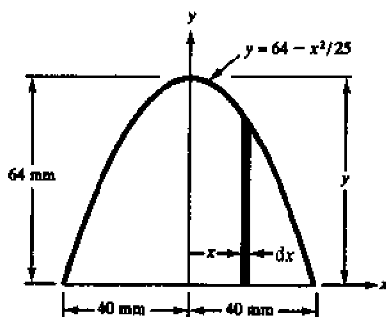


图 7-15

题 7.10 试求图 7-15 所示的平面图形关于 x 轴、y 轴的惯性矩，以及相应的回转半径。

解 ☞ 选择如图 7-15 所示宽度为 dx，高度为 y 的阴影单元。由题 7.6 可知，这个单元体关于 x 轴的惯性矩为

$$dI_x = \frac{1}{3}bh^3 = \frac{1}{3}(dx)y^3$$

为了计算图形内全部单元体的惯性矩，应对 x 从 −40 mm 到 +40 mm 积分，即

$$I_x = \int dI_x = \frac{1}{3}\int_{x=-40}^{x=40} y^3 dx = \frac{2}{3}\int_{x=0}^{x=40}(64 - x^2/25)^3 dx = 3.197\times10^6\ \text{mm}^4$$

同一个单元体还可用来计算整个图形关于 y 轴的惯性矩。按定义，有 $dI_y = x^2 da$ 即

$$I_y = \int dI_y = \int_{x=-40}^{x=40} x^2 y dx = 2\int_{x=-40}^{x=40} x^2(64 - x^2/25)dx$$
$$= 1.092\times10^6\ \text{mm}^4$$

为了求解回转半径，首先要计算曲线下的面积，即

$$A = \int y dx = 2\int_{x=0}^{x=40}(64 - x^2/25)dx = 3413\ \text{mm}^2$$

于是可有

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{3.197\times10^6\ \text{mm}^4}{3413\ \text{mm}^2}} = 30.6\ \text{mm}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1.092\times10^6\ \text{mm}^4}{3413\ \text{mm}^2}} = 17.9\ \text{mm}$$

题 7.11 两个槽形分支截面焊接在长 16 in，厚 0.5 in 的平板上，如图 7-16 所示。试求上述组合截面的形心，并求关于平行于 x 轴的形心轴的惯性矩及回转半径。

解 ☞ 首先考虑图 7-17 所示的单个槽形截面。截面的面积是

$$A = 2(0.5)(2.60 - 0.25) + 10(0.25) = 4.85(\text{in}^2)$$

由题 7.4 及平行轴定理，可以计算此单个槽形截面关于与 x 平行的自身形心轴(图 7-17 中 x_1 轴)的惯性矩，

$$I_{x_1} = \frac{1}{12}(\overset{①}{0.25})(10)^3 + 2\left[\frac{1}{12}(\overset{②}{2.35})(0.5)^3 + 2.35(\overset{③}{0.5})(5 - 0.25)^2\right]$$
$$= 73.90(\text{in}^4)$$

其中第①项是铅直矩形对 x_1 轴的惯性矩，第②项是水平矩形对自身形心轴 x_2 的惯性矩，第③项是根据平行轴定理，由 x_2 轴向 x_1 轴的平移项。

根据题 7.6 的结果和平行轴定理，可以计算整个组合截面关于 x 轴的惯性矩，有

$$I_x = \frac{1}{3}(16)(0.5)^3 + 2[73.90 + 4.85(5.5)^2] = 441.8\ (\text{in}^4)$$

按形心定义计算整个组合截面的形心位置，

$$\bar{y} = \frac{\sum yda}{A} = \frac{16\overset{④}{(0.5)}(0.25) + 2\overset{⑤}{(4.85)}(5.5)}{16(0.5) + 2(4.85)} = 3.13(\text{in})$$

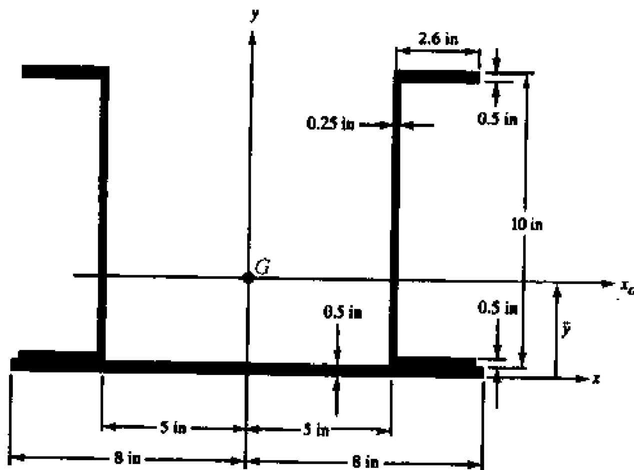


图 7-16

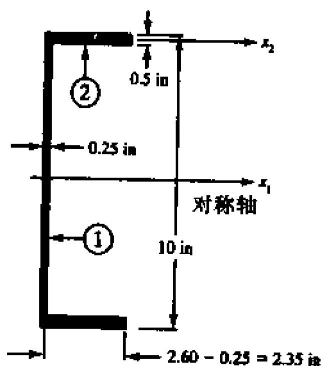


图 7-17

其中标注④的项相应于水平平板，标注⑤的项相应于分支槽形截面。

现在已经求得组合截面的水平形心轴 x_G，应用平行轴定理，由 x 轴向 x_G 轴平移计算惯性矩

$$I_x = I_{xG} + A(\bar{y})^2$$

$$441.8\text{in}^4 = I_{xG} + (17.70\text{in}^2)(3.13\text{in})^2$$

$$I_{xG} = 268.48\text{in}^4$$

相应的回转半径为 $r_{xG} = \sqrt{\frac{I_{xG}}{A}} = \sqrt{\frac{268.48}{17.70}} = 3.89(\text{in})$

题 7.12　平截面是边长 200 mm 的等边三角形，从中挖去另一个等边三角形，两个等边三角形保留下来的截面宽度在垂直于边长的方向为 30 mm，如图 7-18 所示。试求保留（阴影）截面的形心，以及关于与 x 轴平行的形心轴的惯性矩。

解　☞ 首先必须求出被挖去的内部三角形的尺寸，由图 7-18 的几何关系可知，因为 BE 和 BC 边之间的夹角是 30°，所以 $BE = 60$ mm。被挖去三角形 DEF 的高度 h 为

$$h = 200\cos30° - 30 - 60 = 83.21 \text{ mm}$$

这个三角形的边长

$$DF = 83.21/0.866 = 96.08 \text{ (mm)}$$

由对称性可知，形心必定在 y 轴上。按定义计算形心位置为

$$\bar{y} = \frac{\int yda}{A} \quad 或 \quad \frac{\sum ydA}{A}$$

其中分子表示面积对 x 轴的一次矩。利用本章表格提要中所列出的、三角形的形心位置和面积，有

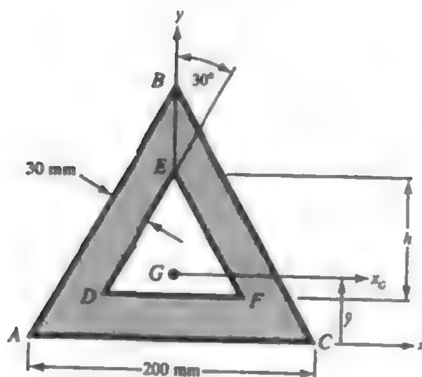


图 7-18

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}(200)(200\cos30°)(200/3\cos30°) - \frac{1}{2}(96.08)(83.21)(30 + 83.21/3)}{\frac{1}{2}(200)(200\cos30°) - \frac{1}{2}(96.08)(83.21)}$$

$$= 57.72\ (\text{mm})$$

为了计算阴影截面的惯性矩，首先计算阴影截面对 x_G 轴的惯性矩，这可以由外部三角形 ABC 关于 x 轴的惯性矩(由题 7.7 的结果)减去为部三角形 DEF 对同一轴的惯性矩得到。内部三角形的结果首先要计算三角形 DEF 关于自身形心轴的惯性矩(利用题 7.8 的结果)，然后利用平行轴定理，得到关于 x 轴的结果。

$$I_x = \frac{1}{12}(200)(200\cos30°)^3 - \left[\frac{1}{36}(96.08)(83.21)^3 + \frac{1}{2}(96.08)(83.21)(30 + 83.21/3)^2\right]$$

$$= 71.74 \times 10^6(\text{mm}^4)$$

利用平行轴定理，有

$$I_x = I_{xG} + A(\bar{y})^2$$

$$71.74 \times 10^6\text{mm}^4 = I_{xG} + \left[\frac{1}{2}(200)(200\cos30°) - \frac{1}{2}(96.08)(83.21)\right](57.72)^2$$

解出

$$I_{xG} = 27.35 \times 10^6\text{mm}^4$$

题 7.13　如图 7-19 所示，试求矩形截面关于 x、y 轴的惯性积。

解 ☞ 由惯性积的定义 $I_{xy} = \int xy\mathrm{d}a$，取图示的阴影单元体，计算上述积分

$$I_{xy} = \int_{y=0}^{y=h}\int_{x=0}^{x=b} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=h}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b y\mathrm{d}y = \frac{b^2}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{b^2h^2}{4} \tag{1}$$

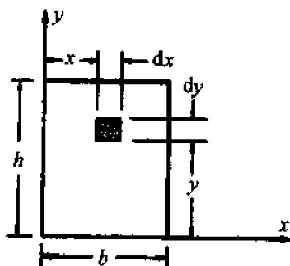


图 7-19

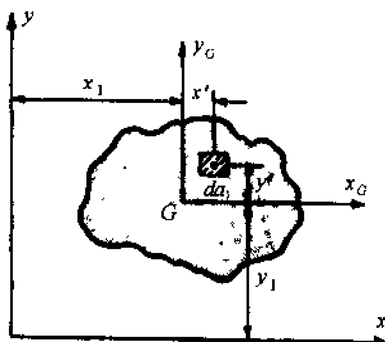


图 7-20

题 7.14　推导平面图形惯性积的平行轴定理。

解 ☞ 在图 7-20 中，轴 x_G 和 y_G 通过平面图形 A 的形心，x、y 轴分别与过形心的 x_G、y_G 轴平行，且相距已知的距离。

对于单元体 $\mathrm{d}a$，关于 x、y 轴的惯性积为

$$\mathrm{d}I_{xy} = (x_1 + x')(y_1 + y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

整个截面关于 x、y 轴的惯性积为

$$I_{xy} = \int\mathrm{d}I_{xy} = \iint(x_1 + x')(y_1 + y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint x_1y_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint x'y_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint x_1y'\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint x'y'\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 x_1 和 y_1 均为常数，因而上式右侧第一项等于 x_1y_1A；注意到 x'、y' 都是关于形心轴的坐标，因而第二项和第三项均为零；第四项等于 $I_{x_Gy_G}$，亦即平面图形关于自身形心轴的惯性积。于是，

$$I_{xy} = x_1y_1A + I_{x_Gy_G} \tag{1}$$

此即为平面图形惯性积的平行轴定理。此处要指出的是，x_G 和 y_G 必须是通过平面图形形心的坐标轴，此外只有当两套坐标系有图 7-20 所示的位置关系时，x_1 和 y_1 才均是正的；也就是说，必须要特别注意 x_1 和 y_1 应有适当的代数运算符号。

题 7.15　试求图 7-21 所示的拐角形截面的惯性积 I_{xy}。

解 ☞ 可将给定的截面分解为如图的两个矩形截面。对矩形截面①，由题 7.13 的(1)式，有

$$(I_{xy})_1 = \frac{1}{4}(10)^2(125)^2 = 39 \times 10^4(\text{mm}^4)$$

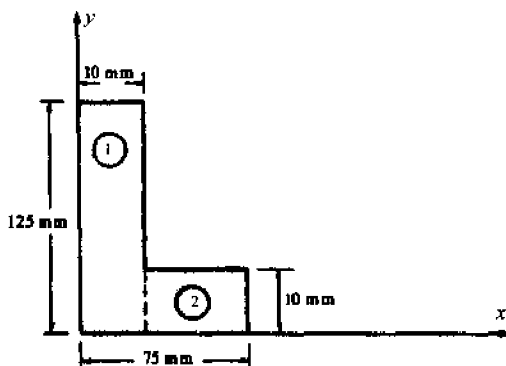


图 7-21

对于矩形截面②，使用题 7.14 中的(1)式来计算。矩形截面②关于与 x、y 轴平行的形心轴的惯性积等于零，因为这样的轴是对称轴，亦即对截面②，有 $I_{x_Gy_G} = 0$。题 7.14 导出的平行轴定理为

$$(I_{xy})_2 = (42.5)(5)(65)(10) = 13.8 \times 10^4(\text{mm}^4)$$

整个拐角形截面的惯性积为

$$I_{xy} = 39 \times 10^4 + 13.8 \times 10^4 = 52.8 \times 10^4(\text{mm}^4)$$

题 7.16　试求题 7.15 中的拐角形截面关于形心轴 x_G、y_G 的惯性积，x_G、y_G 轴是和 x、y 轴分别平行的形心轴，见图 7-22。

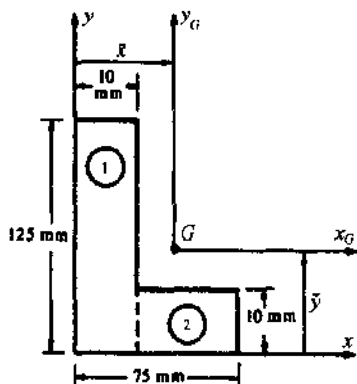


图 7-22

解　首先要求出截面形心的位置，亦即解出 $\bar{x}$、$\bar{y}$，可有

$$\bar{x} = \frac{125(10)(5) + 65(10)(42.5)}{125(10) + 65(10)} = 17.8\ (\text{mm})$$

$$\bar{y} = \frac{125(10)(62.5) + 65(10)(5)}{125(10) + 65(10)} = 42.8\ (\text{mm})$$

利用题 7.13 导出的平行轴定理，有

$$I_{xy} = x_1 y_1 A + I_{x_Gy_G}$$

由题 7.15 知 $I_{xy} = 52.8 \times 10^4\ \text{mm}^4$，于是

$$52.8 \times 10^4 = 17.8(42.8)(1900) + I_{x_Gy_G}$$

解出

$$I_{x_Gy_G} = -92 \times 10^4\ \text{mm}^4$$

题 7.17　如图 7-23 所示，平截面 A 及其关于 x，y 轴的 I_x、I_y 和 I_{xy} 都是已知的，试求截面相对于另一对相互垂直轴 x_1，y_1 的惯性矩 I_{x1}、I_{y1} 和惯性积 I_{x1y1}。同时还计算 I_{x1} 的最大及最小值。

解　截面关于 x_1 轴的惯性矩是

$$\begin{aligned}
I_{x1} &= \int y_1^2 \mathrm{d}a = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 \mathrm{d}a \\
&= \cos^2\theta \int y^2 \mathrm{d}a + \sin^2\theta \int x^2 \mathrm{d}a - 2\sin\theta\cos\theta \int xy \mathrm{d}a \\
&= I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - 2I_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
&= I_x\left(\frac{1 + \cos2\theta}{2}\right) + I_y\left(\frac{1 - \cos2\theta}{2}\right) - I_{xy}\sin2\theta
\end{aligned}$$

或

$$I_{x1} = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) + \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\cos\theta - I_{xy}\sin2\theta \tag{1}$$

类似地，在(1)式中用 $\theta+\pi/2$ 去替 θ，可得到 I_{y1}，即

$$I_{y1}=\left(\frac{I_x+I_y}{2}\right)-\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)\cos2\theta+I_{xy}\sin2\theta \tag{2}$$

欲求与 I_{x1}最大和最小值对应的 θ，须将(1)式对 θ 取一阶导数，并令其等于零。注意到此时 I_x、I_y 和 I_{xy}都是常数，由(1)式可有

$$\frac{\mathrm{d}I_{x1}}{\mathrm{d}\theta}=-(I_x-I_y)\sin2\theta-2I_{xy}\cos2\theta=0$$

解出

$$\tan2\theta=-\frac{I_{xy}}{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)} \tag{3}$$

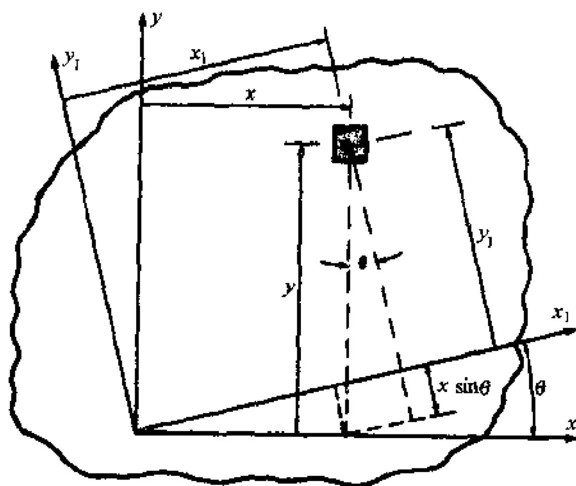


图 7-23

(3)式有一个很方便的图形解释，如图 7-24 中的情况(Ⅰ)和情况(Ⅱ)。如果将(3)式给出的 2θ 值代入(1)式，可得到

$$(I_{x1})_{\substack{\max\\\min}}=\left(\frac{I_x+I_y}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+(I_{xy})^2} \tag{4}$$

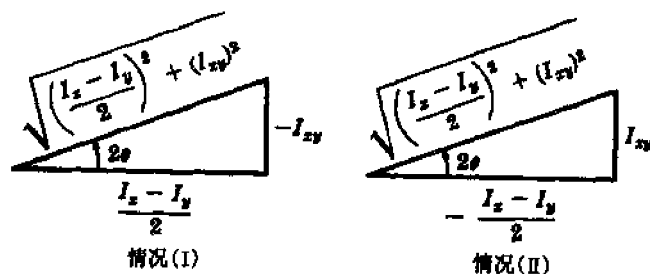


图 7-24

对图 7-24 中的情况(Ⅰ)，式中取"+"号；情况(Ⅱ)，取"-"号。惯性矩的这些最大和最小值，相应于(3)式所定义的坐标轴。惯性矩的最大、最小值称为主惯性矩，相应的坐标轴称为主轴。

现在计算 I_{x1y1}，有

$$I_{x1y1}=\int x_1y_1\mathrm{d}a=\int(x\cos\theta+y\sin\theta)(y\cos\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}a$$

$$=\cos^2\theta\int xy\mathrm{d}a-\sin^2\theta\int xy\mathrm{d}a+\sin\theta\cos\theta\int y^2\mathrm{d}a-\sin\theta\cos\theta\int x^2\mathrm{d}a$$

$$=I_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+(I_x-I_y)\sin\theta\cos\theta$$

$$= \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \qquad (5)$$

由(5)式可知，当

$$\tan 2\theta = \frac{I_{xy}}{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)}$$

时，$I_{x1y1} = 0$；这是与(3)式相同的条件，因为(3)式定义了主轴，因而可知，平面图形关于主轴的惯性积等于零。

题 7.18　结构铝 6Z5.42 型材截面的名义尺寸如图 7-25 所示。试求截面相对于过 O 点的 x、y 轴的惯性矩 I_x、I_y 和惯性积 I_{xy}，以及惯性矩的最大和最小值。

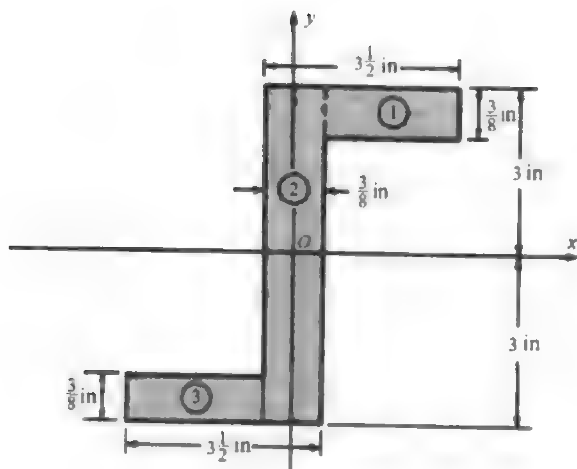


图 7-25

解　图 7-25 所示的截面可分解为 3 个矩形的子截面①、②和③。题 7.4 中的结果及题 7.5 中导出的平行轴定理可用于计算 I_x 和 I_y。

$$I_x = \frac{1}{12}\left(\frac{3}{8}\right)(6)^3 + 2\left[\frac{1}{12}\left(3\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \left(3\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(2\frac{13}{16}\right)^2\right] = 25.27(\text{in}^4)$$

$$I_y = \frac{1}{12}(6)\left(\frac{3}{8}\right)^3 + 2\left[\frac{1}{12}\left(\frac{3}{8}\right)\left(3\frac{1}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)\left(3\frac{1}{8}\right)\left(1\frac{3}{4}\right)^2\right] = 9.08(\text{in}^4)$$

截面关于 x、y 轴的惯性积可利用题 7.14 中导出的惯性积平行轴定理来计算。要指出的是，每个矩形子截面关于平行 x、y 轴的自身形心轴的惯性积等于零，原因是这些轴都是对称轴。因此，对整个 Z 形截面，由题 7.14 中的(1)式有

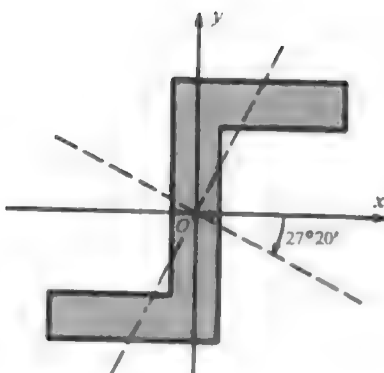


图 7-26

$$I_{xy} = 2\left[\left(\frac{7}{4}\right)\left(2\frac{13}{16}\right)\left(3\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\right] = 11.6(\text{in}^4)$$

关于过 O 点的坐标轴的惯性矩的最大、最小值可由题 7.17 的(4)式计算，即

$$(I_{x1})_{\substack{\max\\ \min}} = \left(\frac{I_x + I_y}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$= \left(\frac{25.27 + 9.08}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{25.27 - 9.08}{2}\right)^2 + (11.6)^2}$$

$$(I_{x1})_{\max} = 31.38\text{in}^4 \qquad (1)$$

$$(I_{x1})_{\min} = 2.98\text{in}^4 \qquad (2)$$

这些主惯性轴的方向可由题 7.17 中的式(3)计算，即

$$\tan 2\theta = -\frac{I_{xy}}{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)} = -\frac{11.6}{\left(\frac{25.27 - 9.08}{2}\right)}$$

$$\theta = -27°20', \qquad -117°20' \tag{3}$$

(1)、(2)式给出的主惯性矩相应于(3)式给出的主轴,这些主轴在图 7-26 中如虚线示。

7.16 习 题

题 7.19 槽形截面焊接在水平补强板上,截面如图 7-27 所示,试求此组合截面形心的 y 坐标。(答案: $\bar{y}$ = 4.56 in)

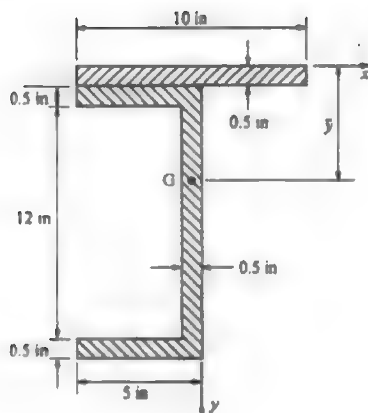


图 7-27

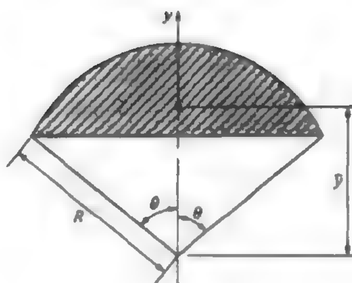


图 7-28

题 7.20 如图 7-28 所示的阴影截面,是由圆弧和弦围成的。试求截面的形心与圆弧中心之间的距离。

(答案: $\bar{y} = \frac{4R}{3} \cdot \frac{(\sin^3\theta)}{(2\theta \cdot \sin 2\theta)}$)

题 7.21 如图 7-29 所示的阴影截面,是由半径为 R 的圆截面挖去一个 $a \times 3a$ 的矩形组成的,试求阴影截面关于 x 轴和 y 轴的惯性矩。(答案: $I_x = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{a^4}{4}$, $I_y = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{9a^4}{4}$)

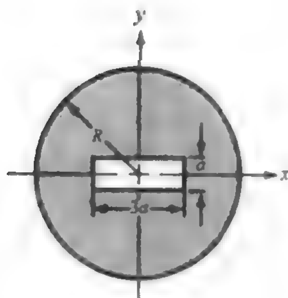


图 7-29

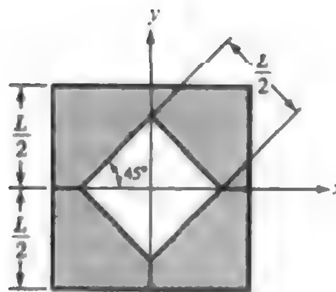


图 7-30

题 7.22 如图 7-30 所示的阴影截面,是由一个正方形挖去另一个正方形组成的,试求阴影截面关于 x 轴的惯性矩。(答案: $I_x = 0.0781L^4$)

题 7.23 矩形截面剪去一个半圆,再剪一个三角形,如图 7-31 所示。试求此截面形心的位置,并求截面关于过形心的水平轴的惯性矩。(答案: $\bar{y}$ = 370.8 mm, $I_{xG} = 9937 \times 10^6$ mm^4)

题 7.24 等腰梯形截面如图 7-32 所示。试求形心的位置,并求截面关于过形心与 x 平行轴的惯性矩。(答案: $\bar{y}$ = 44.4 mm, $I_{xG} = 24.14 \times 10^6$ mm^4)

题 7.25 薄壁截面的形状如图 7-33 所示。试求形心的位置,并求截面关于过形心与 x 平行轴的惯性矩。(答案: $\bar{y} = a$, $I_{xG} = 5.33a^3t + at^3/6$)

题 7.26 图 7-34 所示的阴影截面,是由一个圆截面挖去三个圆孔形成的。试求形心的位置,并求截面关于过形心与 x 平行轴的惯性矩。(答案: $\bar{y} = -R/10$, $I_{xG} = 0.737R^4$)

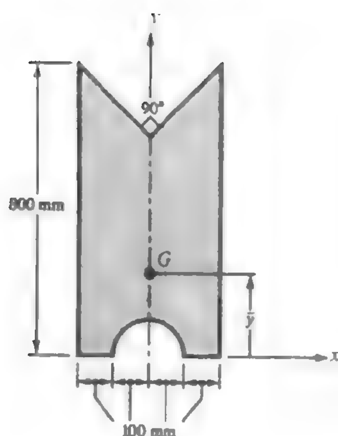


图 7-31

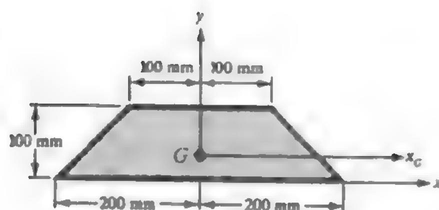


图 7-32

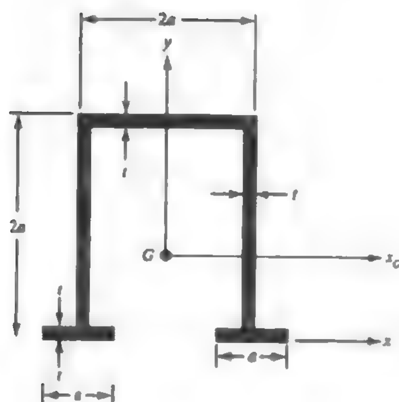


图 7-33

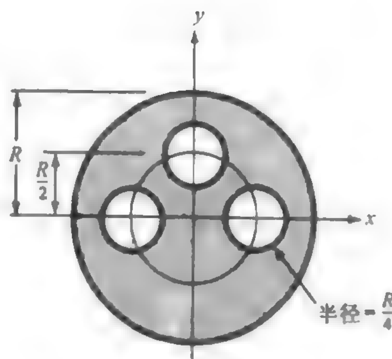


图 7-34

题 7.27　试求图 7-35 所示的菱形截面关于水平对称轴的惯性矩。(答案：$I_{xG} = 85.4\ \text{in}^4$)

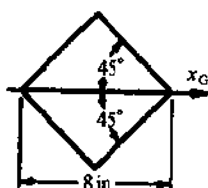


图 7-35

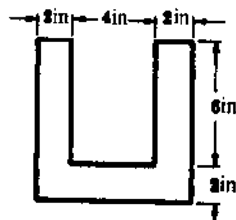


图 7-36

题 7.28　槽形截面如图 7-36 所示，试求截面关于水平形心轴的惯性矩，并求对同一轴的回转半径。(答案：$I_{xG} = 231\ \text{in}^4$，$r_{xG} = 2.40\ \text{in}$)

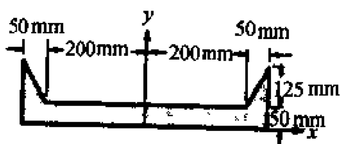


图 7-37

题 7.29　试求如图 7-37 所示槽形截面的形心位置，并求截面关于水平形心轴的惯性矩。(答案：$\bar{y} = 38.33$ mm，$I_{xG} = 33 \times 10^6\ \text{mm}^4$)

题 7.30　平行四边形截面如图 7-38 所示，y、z 轴通过截面的形心。试求 I_y 和 I_z。(答案：$I_y = \frac{1}{12}bh^3$，$I_z = \frac{1}{12}bh(b^2 + c^2)$)

题 7.31　如图 7-39 所示，试求三角形截面关于 x、y 轴的惯性积。(答案：$b^2h^2/24$)

题 7.32　试求图 7-39 所示三角形截面关于形心轴 x_G、y_G 的惯性积。(答案：$-b^2h^2/27$)

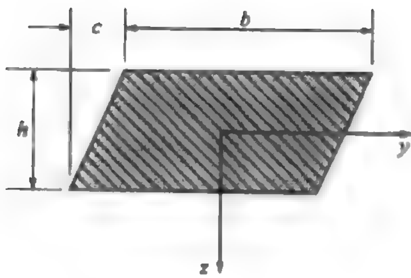


图 7-38

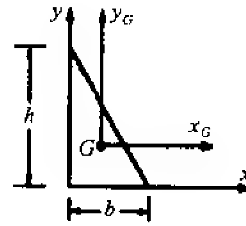


图 7-39

题 7.33　对于图 7-40 所示的平截面，试求关于形心轴 x_G 和 y_G 的惯性积，同时求截面的形心主惯性矩。
（答案：$I_{xG} = 400 \times 10^6\ \text{mm}^4$，$I_{yG} = 147 \times 10^6\ \text{mm}^4$，$I_{xGyG} = -58 \times 10^6\ \text{mm}^4$，$(I_{x1})_{max} = 805 \times 10^6\ \text{mm}^4$，$(I_{x1})_{min} = 142 \times 10^6\ \text{mm}^4$）

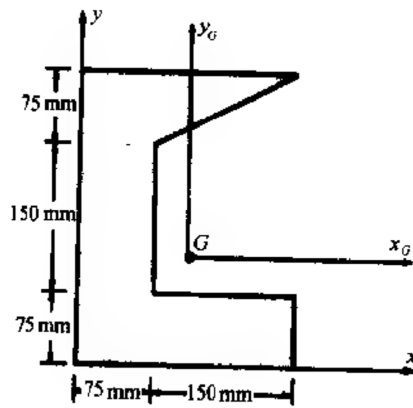


图 7-40

第8章 梁中的应力

8.1 作用在梁上的载荷类型

作用在梁上的载荷,或者是力或者是力偶,这些力和力偶均应位于含梁轴线的平面之内。如果是力,通常理解为垂直于梁的纵向轴线作用,并且将包含作用力的平面假定为梁的纵向对称平面。

8.2 载荷的效应

作用在梁上的这些力和力偶的效应是:

(a) 产生垂直于梁的纵向轴线的挠曲;

(b) 在垂直于梁轴的任意横截面内产生法应力和剪应力。梁的挠曲将在第9、10和11章中研究。

8.3 弯曲的类型

如果只有力偶作用在梁的端部,而没有力作用在梁上,此种弯曲称为纯弯曲。例如在图8-1中,在两个向下作用力之间的梁段,承受的就是纯弯曲。由不能组成力偶的力所产生的弯曲称为普通弯曲。承受纯弯曲的梁只产生法应力,在其内部没有剪应力,而承受普通弯曲的梁内,既有法应力也有剪应力。

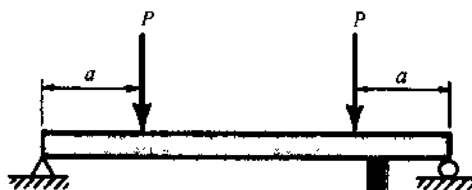


图8-1

8.4 梁作用的特点

为方便起见,可假想地认为梁是由很多很细的纵向杆或纤维组合而成的。每一根纵向纤维,都可以认为是彼此独立作用的,亦即在纤维间没有侧向的挤压和剪切。例如,图8-1所示的梁将发生向下的挠曲,梁的下层纤维发生伸长;与此同时上层的纤维将缩短。纤维在长度上的变化,使在纤维中产生应力。伸长将使纤维内有沿梁轴方向作用的拉应力作用在纤维内,缩短的那些纤维承受压应力。

8.5 中 性 层

在梁的纤维中,总会有一层纤维不发生任何的伸长或缩短,从而也不承受任何的拉伸或压缩应力。此层纤维称为梁的中性层。

8.6 中 性 轴

中性层和垂直梁轴线的横截面相交的交线称为水平中性轴(N. A.)。中性轴一侧的纤维处于拉伸状态,另一侧处于压缩状态。

8.7 弯 矩

任意截面处一侧外力对过此截面的轴的力矩代数和称为此截面处的弯矩。关于弯矩的概念已在第6章中讨论过。

8.8 梁的弹性弯曲

如下的要点仅适用于梁中所有的纤维处于材料的弹性范围:

8.8.1 梁中的法应力

对于具有纵向对称面,并在某个截面处承受弯矩 M 的任意梁,作用在距中性轴 y 处纵向纤维内(见图8-2)的法应力为,

$$\sigma = \frac{My}{I} \tag{8.1}$$

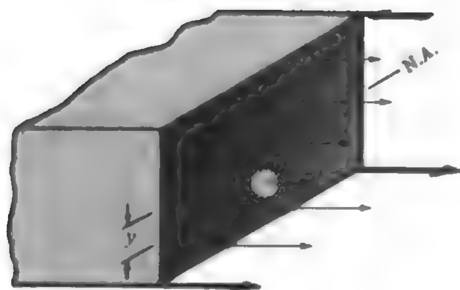


图 8-2

式中 I 表示横截面关于中性轴的惯性矩,已在第7章中讨论过。将在题8.1中详细讨论这个公式的导出过程,公式(8.1)的应用见题8.2～题8.18。(8.1)式中的应力由中性轴处的零变化至外层纤维处的最大,如图示。这些应力也称为弯曲应力、挠曲应力或纤维应力。

8.8.2 中性轴的位置

在梁完全处于弹性范围时,中性轴通过横截面的形心。因此(8.1)式中的惯性矩是梁的横截面关于截面形心轴的惯性矩。

8.8.3 截面模量*

在梁的最外层纤维处,坐标 y 的数值经常用字母 c 来表示,此时最大法应力为

$$\sigma = \frac{Mc}{I}, \qquad \sigma = \frac{M}{I/c} \tag{8.2}$$

比值 I/c 称为截面模量,通常用字母 Z 来表示,Z 的单位是"in^3"或"m^3"。最大的弯曲应

* 目前国内称之为抗弯截面系数。——译者注

力可表示为

$$\sigma = \frac{M}{Z} \tag{8.3}$$

在手册中刊有关于标准结构型钢截面模量 Z 的资料可供直接使用，因而(8.3)式是很方便的。见题 8.5、题 8.9 和题 8.12。

8.8.4　假设

在导出上述法应力公式过程中，加载之前垂直于梁轴线的平截面在施加力和载荷之后，仍保持平面。并且，还限定梁初始时是等截面直梁，并强调梁中所有纤维的应力不超过比例极限。

8.8.5　剪力

梁的任意截面一侧的所有铅直力的代数和称为该截面上的剪力，剪力的概念也已在第 6 章中讨论过。

8.8.6　梁中的剪应力

对于在某个截面处承受剪力 V（用 lbf 表示）的任意梁，梁内会有铅直和水平方向的剪应力 τ。任意横截面内的铅直剪应力的合力等于剪力 V。在图 8-3 的横截面中，对称铅直平面中包含铅直力并且中性轴通过截面的形心，坐标 y 是自中性轴处计量的，整个横截面关于中性轴的惯性矩用 I 来表示，与中性轴相距 y_0 处所有纤维内的剪应力由以下公式给出：

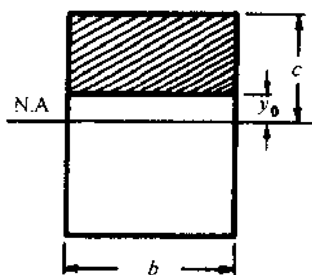


图 8-3

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\mathrm{d}a \tag{8.4}$$

其中 b 为计算剪应力处梁的宽度。(8.4)式将在题 8.19 中导出，其应用见题 8.20～题 8.24。此式中的积分表示图 8-3 中截面的阴影面积关于中性轴的一次矩。截面的一次矩在第 7 章中详细讨论过。更一般地讲，上述积分表示产生应力 τ 的水平面和最外层纤维之间的那部分截面，亦即 y_0 和 c 之间的截面关于中性轴的一次矩。

由(8.4)式显然可知，最大的剪应力永远发生在梁的中性轴处，最外层纤维处的剪应力永远是零。与此相反，法应力由中性轴处的零变化至外层纤维处最大。

在矩形截面的梁中，上述关于剪应力的公式变为

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right) \tag{8.5}$$

式中 τ 表示与中性轴相距 y_0 处的剪应力；h 表示梁截面的高度。在矩形横截面上剪应力的分布是抛物线的，由外层的零变化至中性层处最大。(8.5)式的应用见题 8.20～题 8.23。

上述关于剪应力的两个公式，既能给出一点处铅直方向的剪应力，也能给出该点处的水平方向剪应力，正如将在题 8.19 中讨论的，因为在这两个方向上剪应力的数值永远是相等的。

8.9　梁的塑性弯曲

如下的要点适用于梁的某些或全部纤维的应力超过材料的屈服点应力的情况。

我们考虑如图 8-4 所示的简化应力－应变曲线，同时假设比例极限和屈服点是重合的，屈服区域，亦即曲线的水平平台是可以无限延伸的。韧性材料行为的这一方便的表示方法称为完全（理想）的弹塑性行为。图中 σ_{yp} 表示材料屈服点的应力，ϵ_{yp} 表示与 σ_{yp} 对应的应变。我们还假设，材料的拉伸和压缩时的性质是相同的。

8.9.1 弹塑性作用

对于足够大的弯矩,梁中内部区域纤维的应力处于弹性范围,外层的应力将会达到材料的屈服点。此时的应力分布如图 8-5 所示。

8.9.2 完全塑性作用

伴随弯矩的不断增加,可能会达到一个极限情况,亦即全部纤维的应力均达到材料的屈服点。此时的应力分布如图 8-6 所示。

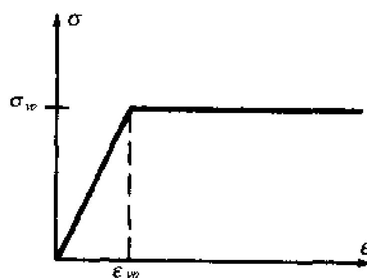


图 8-4

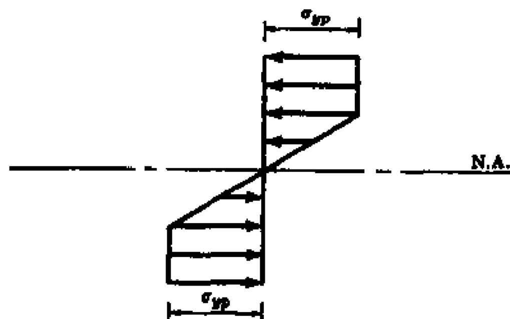


图 8-5

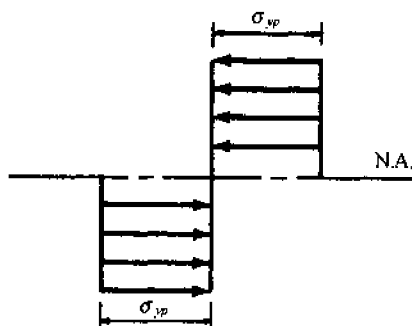


图 8-6

8.9.3 中性轴的位置

当梁完全是弹性时,中性轴通过横截面的形心。然而当塑性区域由外部纤维向内部传播时,中性轴要从这个位置移向另外的位置,中性轴的新位置将由横截面上的法向合力等于零的条件去确定。对于截面完全塑性的极限情况,中性轴的新位置将把截面划分为面积相等的两个部分。这将在题 8.29 中讨论。

8.9.4 完全塑性弯矩

相应于截面全部塑性的弯矩称为完全塑性弯矩,并表示为 M_p。对于此处所假定的应力-应变曲线(即图 8-4——译者注),不会有大于 M_p 的弯矩。

对于矩形截面的梁,在题 8.25 中给出的完全塑性弯矩是 $M_p = bh^2\sigma_{yp}/4$,其中 b 是梁的截面宽度,h 是截面高度。

8.10 例 题

8.10.1 梁的弹性弯曲

题 8.1 试导出任意截面内的弯矩与该截面任一点处的弯曲应力之间的关系式;假设胡克定律是适用的。

解 ☞ 如图 8-7(a)所示的梁,承受两个力偶 M 的共同作用,因而是平衡的。因为沿梁长所有的点处都有相同的弯矩,因而梁是受纯弯曲的。为了确定梁中弯曲应力的分布,我们用一个垂直于梁轴的平面去切割该梁。用这种方法,将待研究的力变成新形成物体的外力,尽管对于原始未切割的物体它们是内力。

图 8-7(b)是切割面左侧梁段的分离体图,显然,力矩 M 必然作用在切割面上,以使左侧梁段处于平衡。力矩 M 作用在切割面上表示右侧梁段对左侧梁段的影响,因为右侧梁段已被除去,必

须代之以它对左侧梁段的影响，这种影响可用力矩 M 表示。这个力矩 M 是垂直于切割面的力的合力矩，位于书页的平面之内。为了确定分布在切割面上的力的变化特征有必要作某些假设。

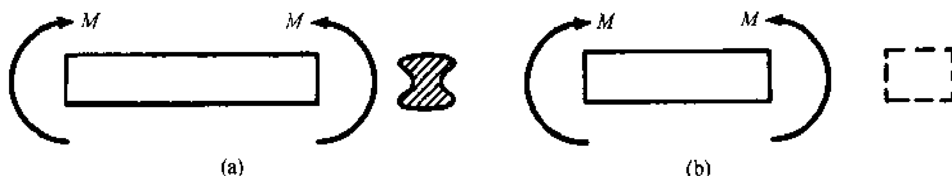


图 8-7

将梁视作由无数多根纵向细长杆或纤维组成，这是很方便的，首先假设每根纵向纤维都是彼此独立作用的，与其他纤维无关，亦即邻近的纤维之间没有侧向的挤压或剪切，因而每根纤维只承受轴向的拉伸或压缩。继而，还假设加载之前垂直于梁轴的平截面在加载之后仍保持平面，且仍垂直于形变后的梁轴。最后，假设材料始终服从胡克定律，拉伸与压缩的弹性模量是相同的。

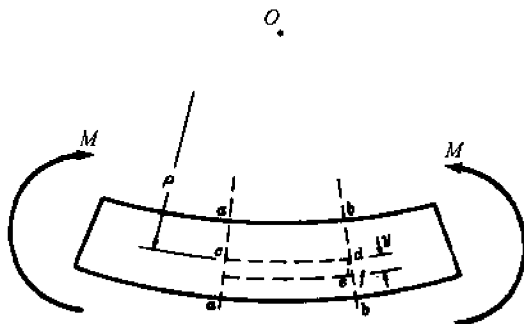


图 8-8

考虑图 8-8 中标注在梁的侧面的两个相邻横截面 aa 和 bb。在加载之前，这些截面彼此是平行的，施加力偶之后，仍保持平面但彼此相对转动至图示的位置，图中的 O 点表示梁轴的曲率中心。显然，梁的上表面的纤维处于压缩状态，下表面的纤维处于拉伸状态。cd 处是不发生任何应变的一层纤维的迹线，称为中性层。中性层和任意横截面的交线叫做中性轴。距离中性层 y（向下为上）处的纵向纤维的伸长，可用画一条与 aa 平行的线 de 的方法得到，如果用 ρ 表示弯曲中性层的曲率半径，由相似三角形 cOd 和 edf，可以得到该层纤维的应变是

$$\varepsilon = \frac{\overline{ef}}{\overline{cd}} = \frac{\overline{de}}{\overline{cO}} = \frac{y}{\rho} \tag{1}$$

亦即纵向纤维的应变与到中性轴的距离成正比。

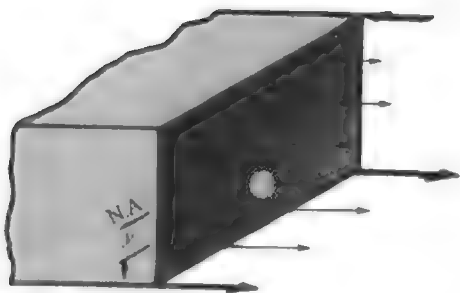


图 8-9

因为胡克定律是适用的，$E = \sigma/\varepsilon$，或 $\sigma = E\varepsilon$，因而可以知道，纵向纤维中的应力亦与到中性轴的距离成正比，即

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} \tag{2}$$

尽管上述推导对任意形状的截面都是正确的，但是我们还是考虑具有纵向对称平面的矩形截面，在这种情况下，这些纵向或弯曲应力如图 8-9 所示。

令 $\mathrm{d}a$ 表示截面内与中性轴相距 y 的单元面积，上述的应力作用在这个单元面积 $\mathrm{d}a$ 上，其合力应等于应力和面积 $\mathrm{d}a$ 的乘积，即

$$\mathrm{d}F = \frac{Ey}{\rho}\mathrm{d}a \tag{3}$$

然而，作用在整个横截面上的合力应等于零（对于纯弯曲），此条件可以表示为力 $\mathrm{d}F$ 在整个截

面上求和，写作如下的积分

$$\int \frac{Ey}{\rho}\mathrm{d}a = \frac{E}{\rho}\int y\mathrm{d}a = 0 \tag{4}$$

显然应有 $\int y\mathrm{d}a = 0$。注意到这个积分表示的是整个截面对中性轴(因为 y 是从中性轴计起的)的面积一次矩，根据第7章的公式 $\int y\mathrm{d}a = \bar{y}A$，其中 $\bar{y}$ 是截面形心到中性轴的距离，由此可有 $\bar{y}A = 0$。因为 $A \neq 0$，那么 $\bar{y} = 0$。于是可知，在胡克定律成立时，中性轴永远通过截面的形心。

单元力 $\mathrm{d}F$ 关于中性轴的力矩为

$$\mathrm{d}M = y\mathrm{d}F = y\left(\frac{Ey}{\rho}\mathrm{d}a\right) \tag{5}$$

截面内所有这样的单元力矩合成的结果应等于作用在截面内的弯矩，可写作

$$M = \int \frac{Ey^2}{\rho}\mathrm{d}a \tag{6}$$

但是 $I = \int y^2\mathrm{d}a$，于是应有

$$M = \frac{EI}{\rho} \tag{7}$$

此处要特别注意，截面的惯性矩 I 是关于截面的形心轴计算的。注意到先前有

$$\sigma = \frac{Ey}{\rho} \tag{8}$$

由(7)、(8)两式消去 ρ 可以得到

$$\sigma = \frac{My}{I} \tag{9}$$

这个公式给出了梁的弯曲或挠曲应力，式中 M 是任意截面的弯矩，I 是截面关于形心轴的惯性矩，y 是应力 σ 作用处的纤维与中性轴(也过截面形心)之间的距离。

通常，梁的最外层纤维所在位置的 y 值用 c 表示，在这些纤维处弯曲应力为最大，可写作

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \tag{10}$$

题 8.2　一根梁在其两端各承受力偶 12000 lbf·in 作用，如图 8-10 所示。该梁是钢的，矩形截面的宽度是 1 in，高度是 2 in。试求梁中的最大的弯曲应力，并指出弯曲应力沿截面高度上的变化情况。

解　☞ 由题 8.1 可知，弯曲是关于水平中性轴(记作N.A)发生的，这个轴通过截面的形心。用第 7 章中介绍的方法，可知阴影矩形截面关于中性轴的惯性矩是

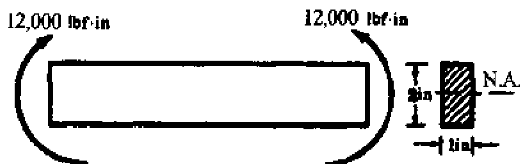


图 8-10



图 8-11

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(1)(2)^3 = 0.667\ (\mathrm{in}^4)$$

由题 8.1 还知道距离中性轴 y 处的弯曲应力为 $\sigma = My/I$，式中的 y 已表示在图 8-11 中。因而，与中性轴相距 y 的所有纤维都承受由此公式给出的相同应力。

因为 M 和 I 沿梁的长度均为常数，显然最大的弯曲应力发生在 y 取最大值的那些纤维处，亦即梁的上、下表面处；根据图示载荷的方向，由观察显然可知，上层的纤维受压缩，下层的纤维受拉伸。对于下层纤维，$y = 1$ in 处的最大弯曲应力是

$$\sigma = \frac{12000(1)}{0.667} = 18000(\mathrm{lbf/in^2})$$

对于上表面的纤维，可以认为 y 是负的，于是可有

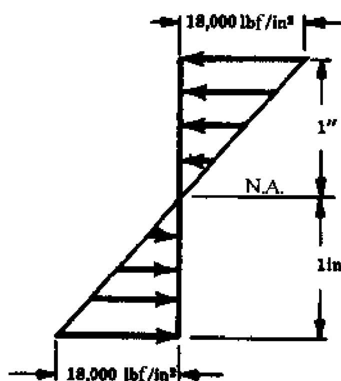


图 8-12

$$\sigma = \frac{12000(-1)}{0.667} = -18000(\text{lbf/in}^2)$$

因而，峰值应力是下表面纤维中的 18000 lbf/in² 拉应力和上表面纤维中的 18000 lbf/in² 压应力。根据公式 $\sigma = My/I$，可知弯曲应力由中性轴处的零线性变化至外层纤维的最大值，沿截面高度的变化规律如图 8-12 所示。

题 8.3 直径为 7 in 的圆形截面梁两端为简支，承受两个各距支座为 12 in 的集中力 20000 lbf 作用。试求梁中最大的弯曲应力。

解 ☞ 此题与题 8.2 不同，沿梁长度各处的弯矩不是常数。载荷以及用第 6 章介绍的方法得到的弯矩图都画在图 8-13 中，由图可知在两个 20000 lbf 向下载荷之间的区段是纯弯曲的，

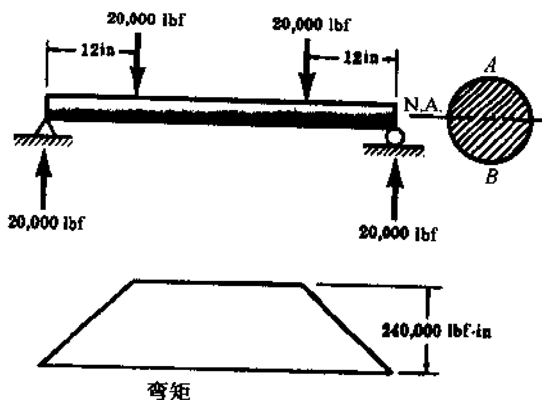


图 8-13

在这个区域内的弯矩到处都等于 20000(12) = 240000 lbf·in。

由题 7.9 可知阴影圆截面关于中性轴(通过圆心)的惯性矩是 $I = \pi D^4/64 = \pi(7)^4/64 = 118$ in⁴，与图示的水平中性轴相距 y 处弯曲应力是 $\sigma = My/I$，显然，最大的弯曲应力发生在铅垂直径的两端，即图中的 A、B 两点处。在载荷之间所有这样的点处，最大应力都是相同的。在 B 点处，$y = 3.5$ in，应力是

$$\sigma = \frac{240000(3.5)}{118} = 7120\ (\text{lbf/in}^2)(\text{拉伸})$$

在 A 点处应力仍是 7120 lbf/in²(压缩)。

题 8.4 长度为 16 ft8 in 的悬臂梁在自由端承受集中力 320 lbf，该梁的截面为宽 2 in、高 3in 的矩形。试求梁中最大拉、压应力的数值与位置。

解 ☞ 由第 6 章的方法可以得到此种载荷的弯矩图，如图 8-14(a)所示，弯矩图是三角形的，最大值在固定端处。最大弯矩等于 320 lbf 集中力对通过 B 点、垂直于书面的轴之矩，即 $-320(200) = -64000$ lbf·in。

与中性轴相距 y 处的弯曲应力为 $\sigma = My/I$，其中 y 如图 8-14(b)所示，I 表示横截面关于中性轴之惯性矩，即

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(2)(3)^3 = 4.5(\text{in}^4)$$

因而，在固定端处(弯矩为最大)峰值的拉伸应力发生在梁的最上层纤维内，即

$$\sigma = \frac{My}{I} = \frac{(-64000)(-1.5)}{4.50} = 21400\text{lbf/in}^2$$

显然，此应力是拉伸应力，因为梁的所有点都是向下挠曲的。最大压应力发生在固定端附近的下层纤维内，数值为 21400 lbf/in²。

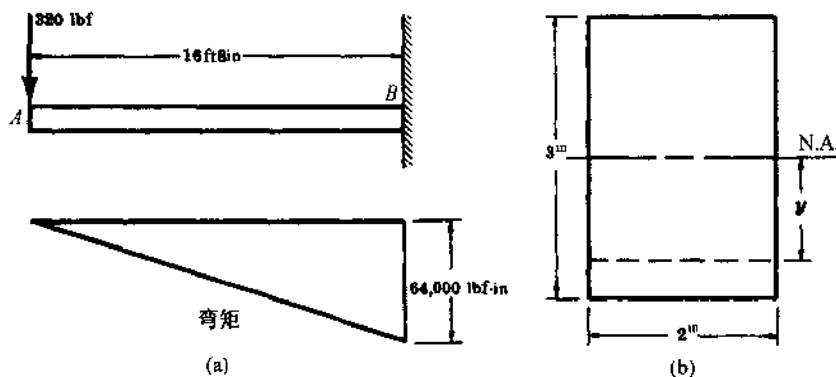


图 8-14

题 8.5 将题 8.4 中的矩形截面换为规格为 $W6\times15\frac{1}{2}$ 的工字形截面，关于此截面规格的标准表明此截面是高 6 in 的工字钢截面，每呎长度的重量为 15.5 lbf。试求最大的拉伸和压缩弯曲应力。

解 此梁的截面是对称的，如图 8-15 所示，弯曲是相对于过形心的中性轴发生的。所有常用轧制钢截面的几何性质制成大量的表格供设计者选用，节选的表格如本章末表 8-1、表 8-2 所示，由这表格可知，截面关于中性轴的惯性矩为 28.1 in^4。

与中性轴相距 y 处的弯曲应力 $\sigma=My/I$，在外层纤维处 $y=c$，于是

$$\sigma=\frac{Mc}{I}=\frac{M}{I/c}$$

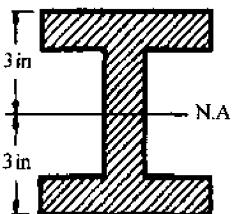


图 8-15

式中比值 I/c 叫做截面模量，通常用字母 Z 来表示，单位是"in^3"。由节选表格中，知 $Z=9.7\ \text{in}^3$。因为我们经常感兴趣的是最大应力，因而也只是关注外层纤维中发生的应力，此时截面模量是一个很方便的物理量，特别是对标准结构截面。在紧邻固定端的截面外层纤维应力为

$$\sigma=\frac{M}{I/c}=\frac{M}{Z}=\frac{64000}{9.7}=6600(\text{lbf/in}^2)$$

梁的上层纤维是伸长的，应力将是拉伸应力；下层纤维是缩短的，应力将是压缩应力。

题 8.6 长度 3 m 的悬臂梁承受均匀分布载荷 30 kN/m，拉伸和压缩的许可应力均为 150 MPa，如果截面为高度等于宽度 2 倍的矩形，试求截面的尺寸。

解 在题 6.2 中，曾画出全梁上有均布载荷作用时的弯矩图，该图是抛物线，弯矩由自由端处的零变化至固定端处的最大。此题的梁及其弯矩图如图 8-16 所示，固定端处的最大弯矩是

$$M_{x=3}=-30(3)(1.5)=-135\ (\text{kN}\cdot\text{m})$$

此处要指出的是，本题是梁的设计问题，而在本章的以往题目中均为已知梁的尺寸及载荷的应力分析问题。此题中只有一个横截面(亦即要求设计的横截面)的弯矩为最大，此截面在固定端处。因而我们希望设计一个矩形截面，当该截面上的弯矩为 135 kN·m 时，最大的弯曲应力为 150 MPa。待设计的矩形截面如图 8-17 所示，高度为 h，宽度为 b，且 $h=2b$；关于形心轴的惯性矩为

$$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}b(2b)^3=\frac{2}{3}b^4$$

在邻近固定端的截面内，弯曲应力为 $\sigma=My/I$，最大的拉伸应力发生在最上层的纤维内，在该处 $y=b$，$\sigma=150$ MPa，那么

$$\sigma=\frac{My}{I},\quad 或\quad 150\text{MPa}=\frac{-135\times10^3(10^3)(-b)}{\frac{2}{3}b^4}$$

由此可解出 $b=110$ mm，$h=2b=220$ mm。

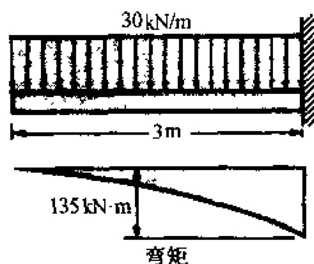


图 8-16

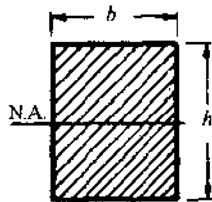


图 8-17

题 8.7　长度为 1.5 m 的悬臂梁在其自由端处承受集中力 P 的作用,如图 8-18(a)所示。此梁的截面为圆形(半径 $R=100$ mm),且挖了两个对称的圆孔,如图 8-18(b)所示。此梁的材料为钛合金,弯曲许可应力为 600 MPa。试求铅直力 P 的最大许可值。

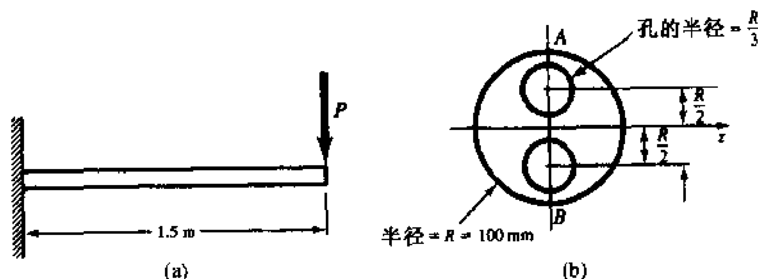


图 8-18

解　☞ 首先必须确定此梁的截面模量。由第 7 章的题 7.9 可知,实心圆截面关于直径 z 轴的惯性矩是 $\pi R^4/4$,利用这个数值再减去两个圆孔关于同一直径轴 z 的惯性矩(利用第 7 章的平行轴定理),有

$$I=\frac{\pi R^4}{4}-2\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{R}{3}\right)^4+\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]=0.592R^4$$

由(8.3)式,可知截面模量为

$$Z=\frac{I}{c}=\frac{0.592R^4}{R}=0.592R^3$$

在最上和最下层纤维处(图 8-18(b)中分别表示为 A 和 B),利用 $R=0.1$ m,由(8.3)式,有

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{Z},\quad 600\times10^6\text{N/m}^2=\frac{P(1.5\text{m})}{0.592R^3}$$

解出 $P=237\times10^3$N,或 237 kN。

题 8.8　承受均布载荷的悬臂梁如图 8-19(a)所示。截面形状如图 8-19(b)所示材料为 6061-T6 铝合金。已知拉伸和压缩许可应力均为 90 MPa,试求均布载荷的许可集度。

解　☞ 首先必须求得截面形心的位置。由第 7 章的方法,有

$$\bar{y}=\frac{(200)(30)(15)+3(180)(10)(90)}{(200)(30)+3(180)(10)}=50.5(\text{mm})$$

其次确定截面的惯性矩。首先计算关于通过翼缘顶部的 x 轴的惯性矩,由第 7 章的方法有

$$I_x=\frac{1}{3}(200)(30)^3+3\left[\frac{1}{3}(10)(180)^3\right]=60.12\times10^6\text{ mm}^4$$

由第 7 章的平行轴定理,向形心轴 x_G 移轴,可以得到

$$I_{xG}=60.12\times10^6\text{mm}^4-(11400\text{mm}^2)(50.5\text{mm})^2=31.05\times10^6\text{mm}^4$$

峰值弯矩发生在固定端处,由题 6.2 可知最大弯矩是

$$M_{max} = \frac{wL^2}{2}$$

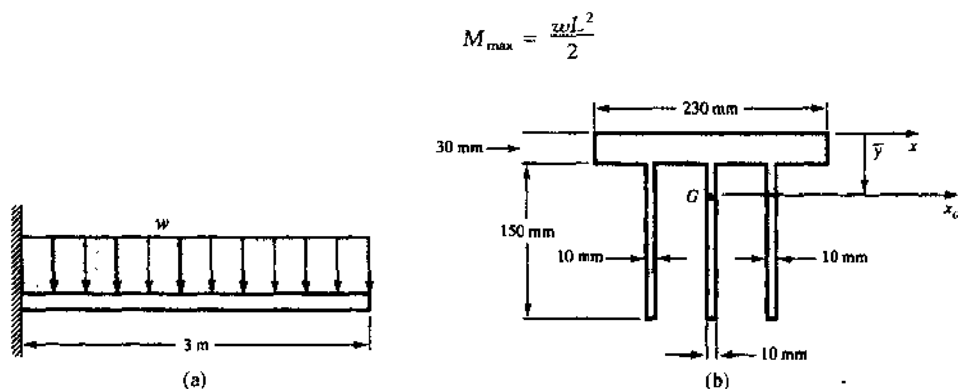


图 8-19

将(8.1)式应用于最低处的纤维，因为那里距中性轴(通过 G 点)最远，有

$$90\times10^6\text{N/m}^2 = \frac{[w(3\text{m})^2][(180-50.5)\text{mm}](1\text{m}/1000\text{mm})}{(2)(31.05\times10^6\text{mm}^4)(1\text{m}/1000\text{mm})^4}$$

解出 $$w = 4.80\ \text{kN/m}$$

题 8.9 如图 8-20 所示的外伸梁 AD 承受集中力 80 kN 及集中力偶 30 kN·m 作用。试由本章末的表 8-2 选择可用的工字钢截面，已知材料的拉、压许可应力为 160 MPa。

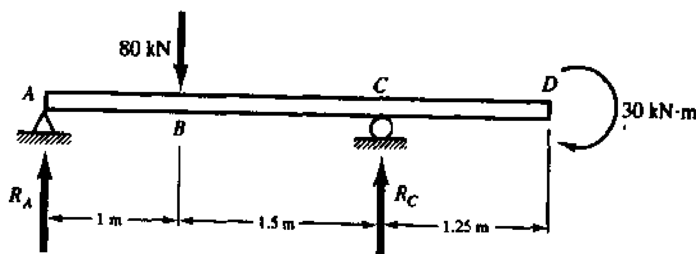


图 8-20

解 ☞ 首先由静力学求解 $\overline{A}$ 和 $\overline{C}$ 处的约束反力，有

$$\sum M_A = -(80\text{kN})(1\text{m}) + R_c(2.5\text{m}) - 30\text{kN}\cdot\text{m} = 0$$

$$R_c = 44\text{kN}$$

$$\sum F_y = R_A + 44 - 80 = 0$$

$$R_A = 36\text{kN}$$

用第 6 章的方法，可画出如图 8-21 所示的弯矩图。

由(8.3)式可有 $\sigma_{max} = M/Z$，代入有关数据，有

$$160\times10^6\text{N/m}^2 = \frac{36\times10^3\text{N}\cdot\text{m}}{Z}$$

解出 $$Z = 225\times10^{-6}\text{m}^3,\qquad \text{或 } 225\times10^3\ \text{mm}^3$$



图 8-21

此即为可以使用的最小截面模量。由表 8-2 可以看到，W203×28 截面模量 $Z = 262\times10^3\ \text{mm}^3$，这是可以使用的。

毫无疑问，更为完整的截面规格表将能提供截面模量 Z 更接近所需要最小值 $225\times10^3\ \text{mm}^3$ 的其他截面。为简便起见在表 8-2 中只列出部分典型截面。

题 8.10　一根直径 0.5 mm 的钢丝绕在直径为 400 毫米的轮上，试求钢丝中的最大弯曲应力。设 $E=200$ GPa。

解　☞ 因为钢丝的曲率半径为常数 200 mm，由题 8.1 的(7)式，显然可知名义弯矩为 $M=EI/R$，也就是说，钢丝中各处的弯矩 M 也为常数，因而钢丝相当于承受纯弯曲的梁。钢丝的局部放大图如图 8-22 所示。对于钢丝内距中性轴 y 的纤维，由题 8.1 式的(1)式，可以得到法向应变为

$$\varepsilon=\frac{y}{R}$$

式中 R 为梁的曲率半径。

最大的法向应变发生在 y 取最大值处，亦即距中性轴 1/2(0.5) mm 处。曲率半径大约为 200 mm，更精切地曲率半径应从中性层计起，但实际上只与 200 mm 相差 0.25 mm，可将其略去。在钢丝最外层纤维处，最大应变为



图 8-22

$$\varepsilon=\frac{(0.5)/2}{200}=0.00125$$

钢丝一侧的纵向纤维受拉伸，另一侧纤维受压缩，此外没有其他应力作用。利用胡克定律可得应力

$$\sigma=E\varepsilon=(200\times10^3)(0.00125)=250\ (\text{MPa})$$

这是钢丝中的最大应力。

题 8.11　如图 8-23(a)所示，简支梁承受均匀变化的分布载荷作用，在梁的右端处最大集度为 w N/m。如果梁的截面为工字形，尺寸如图 8-23(a)所示。材料的拉伸与压缩许可应力均为 125 Mpa，试求许可的最大集度 w。(略去梁的自重)。

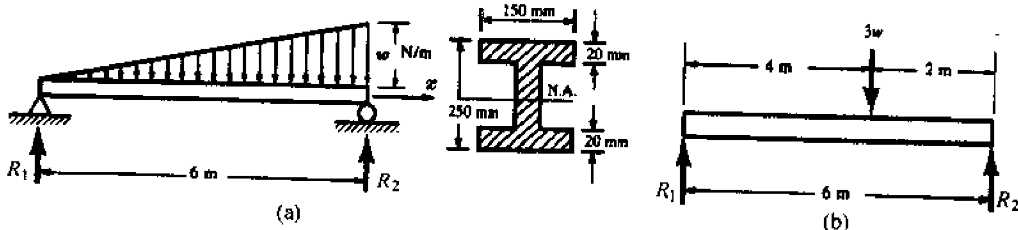


图 8-23

解　☞ 用分布载荷的合力代替未知的 w 作用在梁上，计算约束反力 R_1 和 R_2。作用在全梁 6 m 长度的分布载荷的平均集度为 $w/2$，其合力的数值为 $6(w/2)=3w$N，作用在三角形分布载荷图的形心处，亦即在 R_1 右侧 4 m 处，如图 8-23(b)所示。由静力学可有 $R_1=w$N，$R_2=2w$N。

对于此种分布载荷的剪力和弯矩图，曾在题 6.5 中讨论过。引入原点在梁左端处、且与梁轴线重合的 x 轴。用相似三角形可得到与左支座相距 x 处的分布载荷集度为$(x/6)w$N/m。位于支反力 R_1 和截面 x 之间的加载梁段如图 8-24(a)所示。根据在题 6.5 中介绍的过程，与左支座相距 x 处截面内的剪力 V

$$V=w-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6}\right)wx=w-\frac{1}{12}wx^2$$

此式对所有的 x 值都是适用的，由此可画出剪力图如图 8-24(b)所示。剪应力为零的点可由下式解出：

$$\text{令}\ w-wx^2/12=0,\ \text{可解出}\ x=\sqrt{12}=3.46\text{m},$$

这也是弯矩有极大值的点。

与左端相距 x 处截面内的弯矩为

$$M=wx-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{6}\right)w\frac{x^2}{3}=wx-\frac{1}{36}wx^3$$

此式对所有的 x 都是适用的，画出弯矩图如图 8-24(c)所示。在剪力等于零的 $x=3.46$ m 处，将

之代入上式，得弯矩

$$M_{x=3.46} = 3.46w - \frac{1}{36}w(3.46)^3 = 2.31w\text{N}\cdot\text{m}$$

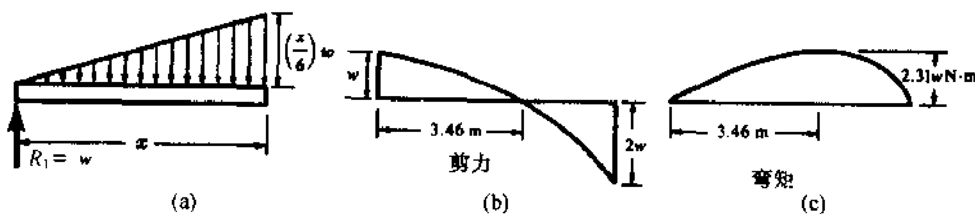


图 8-24

此即为梁中的最大弯矩。

梁截面内与中性轴相距 y 处纤维内的弯曲应力为 $\sigma = My/I$，此梁的惯性矩 I 为

$$I = \frac{150(250)^3}{12} - 2\left[\frac{65(210)^3}{12}\right] = 95\times10^6(\text{mm})^4$$

最大的拉伸应力发生在梁的最大弯矩截面内的最低处 $y = 125$ mm 的纤维内。这应力是 125 MPa，由 $\sigma = My/I$ 可知

$$125\times10^6 = \frac{(2.31w)(0.125)}{95\times10^6(10^{-12})} \quad 或 \quad w = 41\ \text{kN/m}$$

题 8.12　试求矩形截面梁的截面模量。

解　令 h 表示截面的高度，b 表示宽度。假设弯曲是相对于通过截面形心的中性轴发生的，关于中性轴的惯性矩为 $I = bh^3/12$。

最外层纤维与中性轴的距离为 $h/2$，通常用 c 表示。发生在这些纤维中的最大应力是

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}$$

比值 I/c 称为截面模量，通常记作 Z，因而 $\sigma_{max} = M/Z$，对于矩形截面梁

$$Z = \frac{I^*}{c} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

截面模量 Z 的单位是"m^3"或"in^3"。

题 8.13　截面为 T 形的梁，在其两端各承受 5 kN·m 的力偶作用，如图 8-25 所示。试求梁中最大拉伸与压缩应力的数值及其发生的位置。

解　首先须求解截面形心的位置，这是因为中性轴通过形心。为此引入图示的 xy 坐标系，使用第 7 章的方法，形心的 y 坐标为

$$\bar{y} = \frac{\int y\text{d}a}{A}$$

其中右端项的分子表示整个截面关于 x 轴的一次矩。T 形截面可以认为是由虚线所指出的三个矩形组成的，上式成为

$$\bar{y} = \frac{125(25)(62.5) + 2[50(25)(12.5)]}{125(25) + 2[25(50)]} = 40.3\ (\text{mm})$$

亦即形心在 x 轴上方 40.3 mm 处，通过此点的水平轴记作 x_G，如图示。

关于 x 轴的惯性矩等于三个矩形子截面关于同一轴的惯性矩之和，即

$$I_x = \frac{1}{3}(25)(125)^3 + 2\left[\frac{1}{3}50(25)^3\right] = 16.8\times10^6(\text{mm})^4$$

利用平行轴定理可以得到关于 x_G 轴的惯性矩，即

$$I_x = I_{xG} + A(\bar{y})^2, \qquad 16.8\times10^6 = I_{xG} + 5625(40.3)^2$$

解出

$$I_{xG} = 7.7\times10^6\ \text{mm}^4$$

* 原著此处有错。——译者注

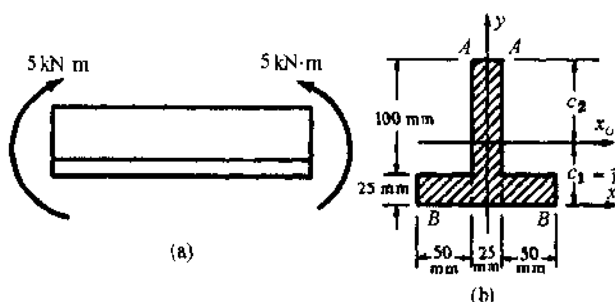


图 8-25

对于图示载荷，x_G 轴下方的纤维处于受拉状态，上方的纤维处于受压状态，令 c_1 和 c_2 表示最远处纤维与 x_G 轴的距离，如图示。显然 $c_1=40.3$ mm，$c_2=84.7$ mm。最大的拉应力发生在沿 $B-B$ 的纤维内，且 $\sigma=Mc_1/I$，其中 I 为整个截面关于过形心的中性轴的惯性矩。最大的拉应力为

$$\sigma=\frac{Mc_1}{I}=5\times10^3(10^3)(40.3)/(7.7\times10^6)=26.2\ (\text{MPa})$$

最大的压缩应力发生在沿 A－A 的纤维内，且 $\sigma=Mc_2/I$，为了符合代数符号规则，应该将 c_2 取为负值，这是因为 c_2 位于 x_G 轴的另一侧(相对于 c_1 而言)，于是

$$\sigma=\frac{Mc_2}{I}=5\times10^3(10^3)(-84.7)/(7.7\times10^6)=-55\ (\text{MPa})$$

结果中的负号表示应力是压缩的。

题 8.14 如图 8-26 所示，槽形截面简支梁承受力偶 1000 lbf·in 的作用。试求最大的拉伸应力和压缩应力。

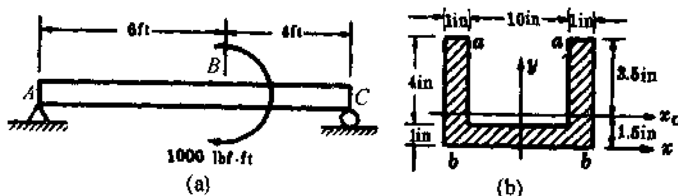


图 8-26

解 ☞ 对于此题的载荷，曾在题 6.11 中画出过弯矩图，此时再画出该图，如图 8-27 所示。利用第 7 章的方法，可以求得形心位于 x 轴上方 1.5 in 处，整个截面关于 x_G 惯性矩为 41.6 in^4。

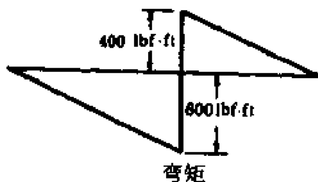


图 8-27

在此题中，要仔细区分正弯矩和负弯矩，处理方法之一是考虑力偶作用的 B 点稍偏左的截面，根据弯矩图及第 6 章中讲到符号规则，该截面的弯矩为 －600 lbf·in；因为弯矩是负的，在该截面处梁的凹面是向下的，如图 8-28 所示。因而上侧的纤维受拉伸，下侧纤维受压缩。沿上侧 $a-a$，纤维的弯曲应力为 $\sigma=My/I$，即

$$\sigma_a=\frac{(-600)(12)(-3.5)}{41.6}=605(\text{lbf/in}^2)$$

沿下侧 b－b 纤维，在上述弯曲应力的公式中 y 值应换成正的，于是

$$\sigma_b=\frac{(-600)(12)(1.5)}{41.6}=-260(\text{lbf/in}^2)$$

其次须研究 B 点稍右截面内的弯曲应力，该处的弯矩为 400 lbf·in，根据通常的符号规则该截面处梁的凹面是向上的，如图 8-29 所示。因而上侧的纤维受压，下侧的纤维受拉。沿上侧 $a-a$ 纤维弯曲应力是

$$\sigma_a'=\frac{400(12)(-3.5)}{41.6}=-404(\text{lbf/in}^2)$$

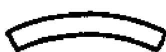


图 8-28



图 8-29

沿下侧 $b-b$ 纤维,可有

$$\sigma_b' = \frac{400(12)(1.5)}{41.6} = 173\ (\mathrm{lbf/in^2})$$

现应从上述四个值中选出最大的拉伸应力和最大的压缩应力。显然,最大拉伸应力是 605 lbf/in²,发生在紧靠 B 截面左侧的最上层纤维内;最大的压应力是 403 lbf/in²,发生在紧靠 B 截面右侧的最上层纤维内。

题 8.15 如图 8-30 所示的双端外伸梁承受三个集中力作用,该梁两支座为简支,截面为 T 形。梁的材料为灰口铸铁,拉伸许可应力为 35 MPa,压缩许可应力为 150 MPa。试求最大的许可载荷 P。

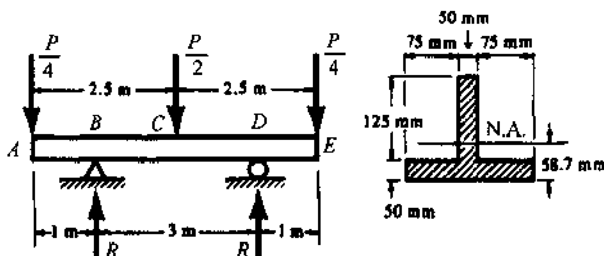


图 8-30

解 由对称性,可知每个支座的约束反力 $R=P/2$,该梁的弯矩图由一系列连接 A、B、C、D 和 E 点处弯矩值的直线组成。B 处的弯矩等于 A 处的力 $P/4$ 对过 B 轴之矩,即

$$M_B = -\left(\frac{P}{4}\right)(1) = -\frac{P}{4}\mathrm{N\cdot m}$$

C 处截面内的弯矩等于力 $P/4$ 和反力 $R=P/2$ 关于过 C 点轴的力矩之和,即

$$M_C = -\left(\frac{P}{4}\right)(2.5) + \left(\frac{P}{2}\right)(1.5) = \frac{P}{8}\mathrm{N\cdot m}$$

根据对称性,可知 D 点的弯矩等于 B 点的弯矩,而在两端 A 和 E 处弯矩等于零。因此,弯矩图如图 8-31 所示。



图 8-31

利用题 8.13 中介绍的方法,可以求得形心与翼缘的最下层纤维之间的距离为 58.7 mm,整个截面关于过形心中性轴的惯性矩为 $40\times10^6\ \mathrm{mm^4}$。

利用 B 处和 C 处的弯矩及此两处的最大拉应力和最大压应力,计算载荷 P 的四个数值,然后选择其中最小者,可能是最简单的方法。首先考虑 B 点,因为该点处的弯矩是负的,该点处凹面向下,如图 8-32 所示,上层纤维受拉伸、下侧纤维受压缩。首先,可令最上层纤维的应力达到许可拉应力 35 MPa,计算 P 值。应用挠曲应力公式 $\sigma=My/I$ 于这些纤维,有

$$36\times10^6 = \frac{(-P/4)(0.116)}{40\times10^6(10^{-12})}, \qquad 解出\ P = 48.3\ \mathrm{kN}$$

其次,令最下层纤维的应力达到许可压应力 150 MPa,计算 P 值。应用挠曲应力公式,有

$$-150\times10^6 = \frac{(-P/4)(0.0587)}{40\times10^6(10^{-12})}, \qquad 解出\ P = 410\ \mathrm{kN}$$

现在考查 C 点。因为该处的弯矩是正的,梁的凹面是向上的,如图 8-33 所示,因而此处上层纤维受压缩,下层纤维受拉伸。首先,令下层纤维的应力达到拉伸许可应力,计算 P 值。由挠曲应力公式,有

$$35 \times 10^6 = \frac{(P/8)(0.0587)}{40 \times 10^6(10^{-12})}, \qquad 解出\ P = 191\ \text{kN}$$



图 8-32



图 8-33

其次，令上层纤维的应力达到压缩许可应力，应用挠曲应力公式，有

$$-150 \times 10^6 = \frac{(P/8)(-0.116)}{40 \times 10^6(10^{-12})}, \qquad 解出\ P = 414\ \text{kN}$$

这四个值中的最小值为 $P = 48.3$ kN，亦即 $\overline{B}$ 截面和 $\overline{D}$ 截面的拉伸应力是最大许可载荷的控制因素。

题 8.16　悬臂梁在其右半段上承受均布载荷作用，截面为带有一个正方形孔洞的矩形，如图 8-34 所示。如果许可拉应力及许可压应力均为 140 MPa，试求许可的分布载荷集度 w。

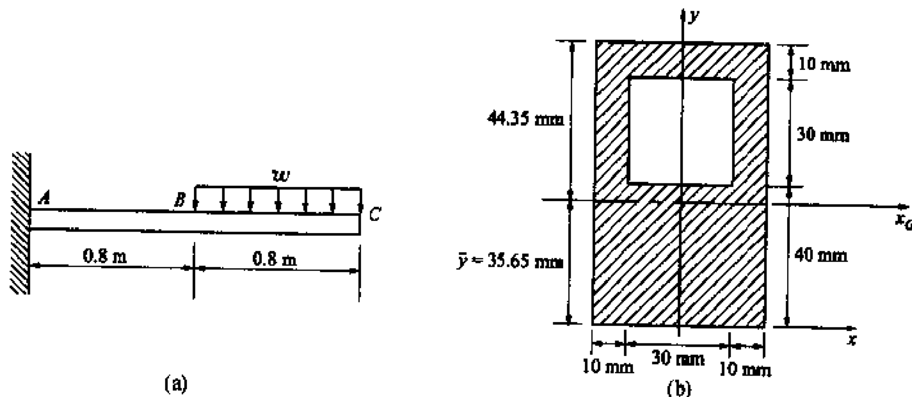


图 8-34

解　☞ 首先求梁中性轴(N.A.)的位置，对于完全的弹性问题，中性轴与下底边的距离为(见第 7 章)

$$\bar{y} = \frac{(80)(50)(40) - (30)(30)(55)}{(80)(50) - (30)(30)} = 35.65\ \text{mm}$$

此外，用第 7 章的方法，可得到截面关于 x 轴的惯性矩为

$$I_x = \frac{1}{3}(50)(80)^3 - \left[\frac{1}{12}(30)(30)^3 + (900)(55)^2\right]$$

$$= 8193.25 \times 10^3 (\text{mm}^4)$$

利用第 7 章的平行轴定理，可导出关于与 x 平行的形心轴 x_G 的惯性矩为

$$I_{xG} = 8193.25 \times 10^3 - (3100)(3565)^2 = 4253.39 \times 10^3 (\text{mm})^4$$

此梁上表面的拉伸纤维较下表面的压缩纤维更远离中性轴。对这些拉伸纤维，应力为

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

$$140 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = \frac{M(44.35\text{mm})(\text{m}/1000\text{mm})}{4253.39 \times 10^3 \text{mm}^4 (\text{m}/1000\text{mm})^4}$$

解出

$$M_{\max} = 13372\text{N} \cdot \text{m}$$

对于此题的载荷条件，$M_A = M_{\max}$，于是 $M_A = M_{\max} = (0.8\text{m} + 0.4\text{m})w(0.8\text{m})$，解出

$$w = \frac{13372\text{N} \cdot \text{m}}{(1.2\text{m})(0.8\text{m})} = 139296\text{N/m}, \quad 或 \quad w = 13.93\ \text{kN/m}$$

题 8.17 如图 8-35 所示，悬臂梁的矩形截面宽度为常数 b，但是高度沿 x 轴是变化的，并且是关于 x 轴对称的，集中力作用在自由端 $x=L, y=0$ 处。为使此梁的最外侧(上、下边缘)的弯曲应力均等于 σ_0，试求梁的轮廓线方程 $y=h(x)$。

解 ☞ 由集中力引起的弯矩方程为 $-P(L-x)$。由题 8.12 知，任意处的截面模量均为 $bh^2/6$。由(8.3)式可知沿顶面外层纤维的弯曲应力为

$$\sigma = \frac{|M|}{Z} = \frac{P(L-x)}{(bh^2/6)} = \frac{6P(L-x)}{bh^2}$$

因为规定上、下表面到处的应力均应等于 σ_0，有

$$\frac{6P(L-x)}{bh^2} = \sigma_0$$

解出

$$h = \sqrt{\frac{6P(L-x)}{b\sigma_0}}$$

此式确定了沿梁长所有点处等强度梁的轮廓线。

图 8-35

这个解答忽略载荷施加点(L, o)奇异效应对其邻域应力的影响。

题 8.18 圆截面的悬臂梁尺寸如图 8-36 所示。试求由于端部 A 处集中 P 引起的峰值弯曲应力。

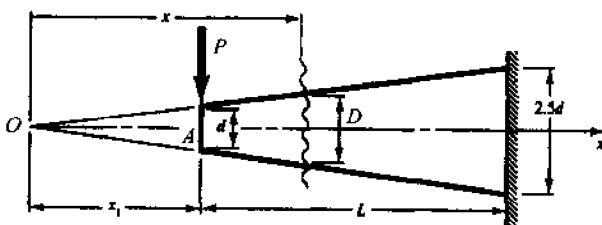


图 8-36

解 ☞ 为了用梁的几何形状表示任意点处截面的惯性矩，必须确定外表面的纤维和 x 轴汇交于何处，由图 8-36 的相似三角形，有

$$\frac{x_1}{d_1} = \frac{x_1 + L}{2.5d}$$

解出

$$x_1 = \frac{2}{3}L \tag{1}$$

与此虚拟交点相距 x 处的弯矩为

$$M = -P\left[x - \frac{2}{3}L\right] \tag{2}$$

如果将梁 x 处的直径记作 D，由几何条件可得

$$\frac{x}{D} = \frac{x_1}{d}, \quad 即\ D = \frac{3xd}{2L} \tag{3}$$

于是在一般位置 x 处，截面惯性矩为

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi}{64}\left[\frac{3xd}{2L}\right]^4 = \left(\frac{81\pi d^4}{(64)(16)L^4}\right)x^4 \tag{4}$$

由(8.2)式可知，外层纤维的弯曲应力为

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{P(x-2L/3)(3xd/2L)}{[81\pi d^4/(64)(16)L^4]x^4} = \frac{256PL^3}{9\pi d^3}\left[\frac{x-2L/3}{x^3}\right] \tag{5}$$

值得注意的是，(5)式指出峰值弯曲应力并不发生在固定端 $x = L + \frac{2}{3}L = \frac{5}{3}L$ 处*

为了求得最大应力，计算 σ 的一阶导数 $d\sigma/dx$，并令其等于零，有

* 原著中为"固定端 $x=L$ 处"，这是不对的。——译者注

$$\frac{d\sigma}{dx}=\left(\frac{256PL^3}{9\pi d^3}\right)\left[\frac{x^3(1)-(x-2L/3)3x^2}{x^6}\right]=0 \qquad (6)$$

解出 $x=L$，此处的距离是从 O 点计起的。将此值代入(5)式，得到峰值弯曲应力为

$$\sigma=\left(\frac{256PL^3}{9\pi d^3}\right)\left[\frac{L-2L/3}{L^3}\right]=\left(\frac{256PL^3}{9\pi d^3}\right)\left(\frac{1}{3L^2}\right)=3.02\frac{PL}{d^3}$$

需要指出的是，在固定端 $x=(L+2L/3)$ 处的弯曲应力为 $1.96PL/d^3$，低于峰值应力。

题 8.19　在垂直于梁轴的横向力作用下的梁中，不仅仅有平行于梁轴的弯曲应力，而且有剪应力作用在垂直于梁轴的横截面内。试用截面内的剪力和截面的几何性质表示剪应力。

解　本题提出的理论仅由矩形截面导出，但是这种分析的结果通常也会给出具有对称轴的其他形状截面剪应力的近似值。

考虑由梁中切出来的长度为 dx 的单元体，如图 8-37 所示。单元体左侧截面的弯矩记作 M，右侧截面弯矩记作 $M+dM$，这是因为由一个截面移动至邻近的截面，弯矩通常会有所变化。如果 y 是由中性轴指向上的，那么左截面 $a-a$ 的弯曲应力为 $\sigma=My/I$，其中 I 为整个截面关于中性轴的惯性矩。应力分布如图 8-37 所示。类似地，右截面 $b-b$ 的弯曲应力为

$$\sigma'=\frac{(M+dM)y}{I}$$

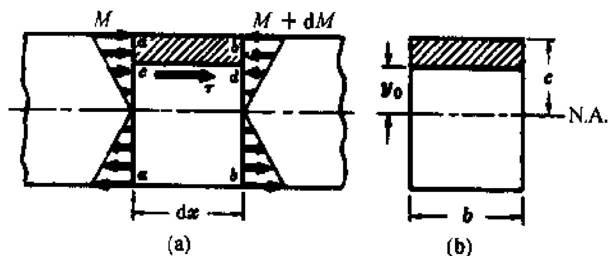


图 8-37

现在考虑阴影单元 $acdb$ 的平衡，作用在界面 ac 的面积 da 上的力，等于力的集度与面积的乘积，即

$$\sigma da=\frac{My}{I}da$$

在左表面 ac 上法向力之和可由下述积分来计算，

$$\int_{y_0}^{c}\frac{My}{I}da$$

类似地，在右表面 bd 上的法向力之和为

$$\int_{y_0}^{c}\frac{(M+dM)y}{I}da$$

因为这两个积分的结果是不相等的，为了维持阴影单元体的平衡，显然应有某些附加的水平力作用在该单元体上。注意到顶面 ab 是自由的，没有任何外部的载荷作用，那么惟一的可能是在下界面 cd 上应有水平剪向力作用，这表明梁的下部对阴影单元体的作用。如图所示沿此界面的剪应力表示为 τ，令 b 表示 τ 作用区段梁的宽度。因而沿表面 cd 的水平剪力为 $\tau b dx$。考虑单元体 $acdb$ 的平衡，有

$$\sum F_h=\int_{y_0}^{c}\frac{My}{I}da-\int_{y_0}^{c}\frac{(M+dM)y}{I}da+\tau b dx=0$$

解出

$$\tau=\frac{1}{Ib}\frac{dM}{dx}\int_{y_0}^{c}y da$$

但是，由题 6.1 有 $V=dM/dx$，此处 V 表示截面 $a-a$ 上的剪力(lbf 或 N)，将 V 代入上式，有

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\mathrm{d}a \tag{1}$$

上式中的积分表示阴影截面积(图 8-37(b))关于截面中性轴的一次矩,阴影截面是整个截面的一部分,它位于待求剪应力处水平线的上方。此部分截面的一次矩有时用 Q 表示,因此上述公式变为

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \tag{2}$$

积分 $\int y\mathrm{d}a$ 或 Q 的单位是"in^3"或"m^3"。

解出的水平剪应力 τ 如图 8-37 所示。现在考虑厚度为 t 的薄单元体 $mnop$ 的平衡,该单元体取自任意物体,并且在单元体下界面承受剪应力 τ_1。如图 8-38 所示。单元体下界面上的所有的水平力为 $\tau_1 t\mathrm{d}x$ 为维持单元体的水平方向力的平衡,在单元体的上界面应有等值的反向力作用,亦即在此界面上切向力的集度亦为 τ_1 作用。这两个界面上的力形成一个数值为 $\tau_1 t\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的力偶,惟一能与之维持平衡的是作用在铅直表面上的另一个力偶。令铅直界面上的切向力集度为 τ_2,全界面上的力为 $\tau_2 t\mathrm{d}y$。关于单元中心的力矩平衡方程是

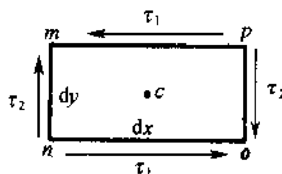


图 8-38

$$\sum M_c = \tau_1 t\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \tau_2 t\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \quad 或\ \tau_1 = \tau_2$$

于是得到一个很有意义的结论:通过物体内任意一点处的两个垂直界面上的剪应力是相等的。由此可以得出结论:在梁中任一点处,不仅仅有水平方向的剪应力,同时还有数值相等的剪应力作用在该点处的铅直界面上。

总之,当梁受横向力作用时既有水平剪应力也有铅直剪应力,任意截面上铅直剪应力的合力等于截面上的剪力 V。

题 8.20 矩形截面梁在其端部是简支的,并且承受单一的集中力作用,如图 8-39(a)。试求梁中的剪应力,同时还求距左支座 1 ft 处截面内、距上边缘 1 in 处的剪应力。

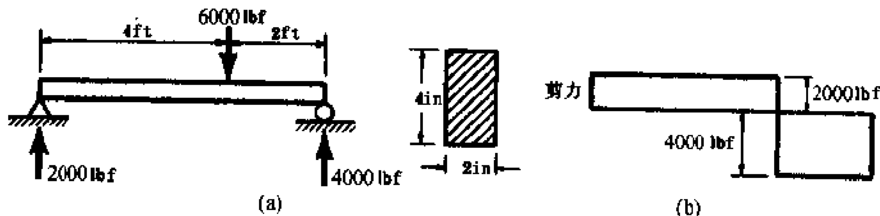


图 8-39

解 ☞ 由平衡方程可以得到支座反力为 2000 lbf 和 4000 lbf,如图。此种载荷的剪力图如图 8-39(b)所示。由剪力图可知,作用在左支座右侧 1 ft 处的剪力为 2000 lbf。由题 8.19 及(8.5)式可知在这个截面内与中性轴相距 y_0 处的剪应力为

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_0^2\right) \tag{1}$$

在距上边缘 1 in 处,注意到 $y_0 = 1$ in, $h = 4$ in, $I = bh^3/12 = 2(4)^3/12 = 10.67\mathrm{in}^4$。将以上数据代入(1)式,有

$$\tau_{y_0=1} = \frac{2000}{2(10.67)}\left(\frac{4^2}{4} - 1\right) = 280\ (\mathrm{lbf/in^2})$$

由(1)式清楚可知,峰值剪应力发生在中性轴 $y_0 = 0$ 处,即

$$\tau_{\max} = \frac{4000}{2(10.67)}\left(\frac{4^2}{4} - 0\right) = 750(\mathrm{lbf/in^2})$$

要指出的是,对矩形截面此峰值剪应力超过平均剪应力 50%,平均剪应力为

$$\tau_{\mathrm{mean}} = \frac{4000}{(4)(2)} = 500(\mathrm{lbf/in^2})$$

题 8.21　承受集中力作用的悬臂梁如图 8-40 所示，截面形状为 T 形。试求梁中的最大剪应力，并求邻近固定端处截面内距顶部 25 mm 处的剪应力。

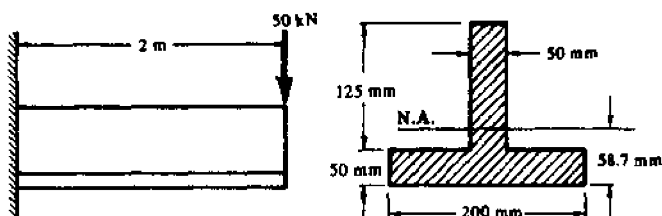


图 8-40

解　☞ 此题中沿梁长各处的剪力均为常量 50 kN，因为比较简单，无须再画剪力图。

在题 8.15 中曾经解得形心的位置及此截面对形心轴的惯性矩，形心在下边沿上方 58.7 mm 处，截面关于水平形心轴的惯性矩为 $40\times10^6\ \text{mm}^4$。

在题 8.19 中已经得到与中性轴相距 y_0 处的剪应力，为

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\mathrm{d}a$$

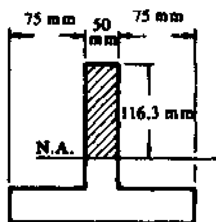


图 8-41

研究此方程可以发现，中性轴处剪应力为最大，因为该处 $y_0=0$，积分可取得最大的可能值。但是，因为此积分表示中性轴和外层纤维之间部分截面关于中性轴的一次矩，因而上述积分可以不必真正用积分运算。部分截面的面积即为图 8-41 中的阴影区。当然上述积分也可以用中性轴以下的无阴影线区面积矩计算，但这种算法会困难一些。

阴影截面关于中性轴的一次矩为

$$50(116.3)(58.15) = 3.38\times10^5(\text{mm}^3)$$

将之代入上述一般公式，可得中性轴处(该处 $b=50$ mm)的剪应力，为

$$\tau = \frac{50\times10^3}{50(40\times10^6)}(3.38\times10^5) = 8.45\ (\text{MPa})$$

式中 b 取作 50 mm，原因在于 b 应等于计算剪应力处梁的宽度。因而可知，最大的剪应力就是 8.45 MPa，且它发生在梁全长各处截面的中性轴处。

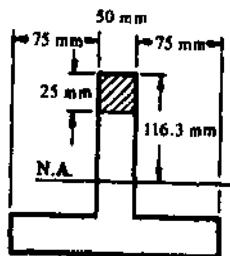


图 8-42

距离梁的上顶表面 25 mm 处的剪应力仍可利用公式

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\mathrm{d}a$$

计算，此时上述积分表示图 8-42 中的阴影面积关于中性轴的一次矩，仍可不必真正去积分，因为阴影面积的形心位置是已知的，它在中性轴上方 103.8 mm 处。于是此阴影面积关于中性轴的一次矩为 $50(25)(103.8)=1.3\times10^5\ \text{mm}^3$，顶部纤维 25 mm 以下处的剪应力为

$$\tau = \frac{50\times10^3}{50(40\times10^6)}(1.3\times10^5) = 3.25(\text{MPa})$$

式中 b 仍取作 50 mm，因为这是计算剪应力处的宽度。

注意到沿梁长各处的剪力均为 50kN，因而各截面顶面以下 25 mm 处的剪应力也均为 3.25 Mpa。

题 8.22　铅直安放的工字截面梁如图 8-43 所示，承受平行于 z 轴的水平集中力 6.5 kN，试求下固定端(xz 平面内)以上 3 m 处截面翼缘上的水平剪应力的分布规律。

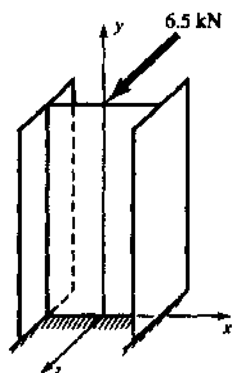


图 8-43

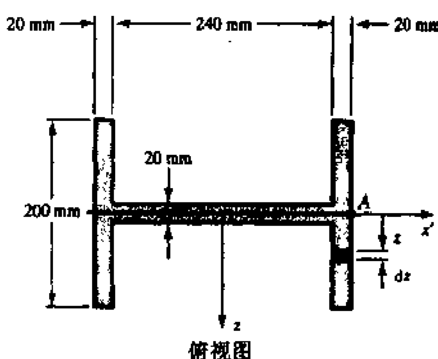


图 8-44

解 ☞ 图8-44显示的是一个平行于 xz 平面的典型水平截面及腹板、翼缘的尺寸。在此截面内与 x 轴相距 z 处的剪应力沿 z 方向作用。xz 平面以上 3 m 的条件并不重要，这是因为题 8.19 导出的剪应力方程既不适用于铅直梁的近顶部截面，也不适用于近底部截面。为了应用题 8.19 中的(1)式去计算剪应力 τ，首先必须确定截面关于 x 轴的惯性矩，由第 7 章的方法，有

$$I=\frac{1}{12}(2)(20\text{mm})(200\text{mm})^3+\frac{1}{12}(240\text{mm})(20\text{mm})^3$$

$$=2683\times10^4\text{mm}^4 \tag{1}$$

其次，在图 8-44 中引入一个沿 z 轴方向、由 xy 平面开始的 z 坐标。由题 8.19，可有 $V=6500$ N，翼缘宽度 b 是 0.02 m。题 8.19 中的积分表示由 z 到翼缘边缘的面积的一次矩，这面积如图 8-44 的阴影区域所示。我们可以用面积与该面积的形心到 x' 轴的距离乘积去计算阴影面积关于 x' 轴的一次矩，而不必真正去作积分，亦即

$$[(0.1-z)(0.04\text{m})]\left(\frac{0.1+z}{2}\text{m}\right),\quad 或\quad (0.02)[(0.1)^2-z^2]\text{m}^3$$

由题 8.19 的(2)式即可导出待求的剪应力，即

$$\tau=\frac{6500\text{N}}{(26.83\times10^{-6}\text{m}^4)(0.02\text{m})(2)}\{0.02[(0.1)^2-z^2]\text{m}^3\}$$

$$=121.1[(0.1)^2-z^2]\text{MPa} \tag{2}$$

在 $z=0$ 的点 A 处，由(2)式得到峰值剪应力是

$$\tau_A=(121.1)[(0.1)^2-0](10^6)=1.21\times10^6\ \text{N/m}^2\quad 或\ 1.21\ \text{MPa}$$

题 8.23 如图 8-45 所示，一工字形截面梁，截面内的剪力为 150 kN。试求截面铅直腹板上的最大和最小剪应力。

解 ☞ 正如题 8.19 中导出的横截面内任一点处的剪应力为

$$\tau=\frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c}y\,da$$

式中 y_0 表示截面内剪应力 τ 作用的位置，它是由中性轴计起的，如图示。I 表示整个截面关于中性轴的惯性矩，中性轴通过截面的形心。按图 8-45 中虚线所示，将此截面分割为三个矩形计算惯性矩 I，即

$$I=\frac{1}{12}(10)(350)^3+2\left[\frac{1}{12}(200)(25)^3+200(25)(187.5)^2\right]$$

$$=389\times10^6(\text{mm}^4)$$

仔细研究剪应力的一般公式即可发现，剪应力在中性轴 $y_0=0$ 处取极大值，这是因为此时式中的积分取得最大值，而且也不必真正去作积分运算，原因在于积分 $\int_{y_0}^{c}y\,da$ 等于 $y_0=0$ 处(即中性轴)和最外纤维之间的部分截面关于中性轴的一次矩，这个截面如图 8-46 所示。它关于中性轴的一次矩为

$$\int_0^{200} y\mathrm{d}a = 175(10)(87.5) + 200(25)(187.5) = 1.1 \times 10^6(\mathrm{mm}^3)$$

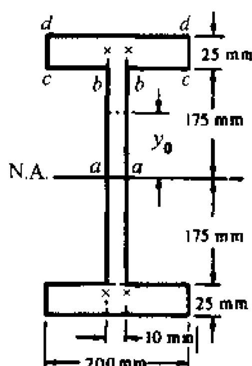


图 8-45

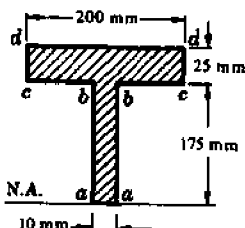


图 8-46

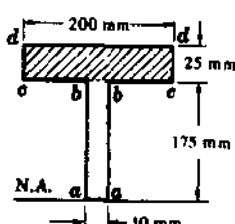


图 8-47

腹板中的最大剪应力发生在中性轴 $a-a$ 处，将以上截面一次矩代入一般公式，有

$$\tau_{\max} = \frac{150 \times 10^3}{10(389 \times 10^6)}(1.1 \times 10^6) = 42.4(\mathrm{MPa})$$

腹板中最小剪应力发生在与中性轴相距最远处，即 $b-b$ 处。为了计算该处的剪应力，须计算 $\int_{y_0}^{c} y\mathrm{d}a$ 位于 $b-b$ 和最外层纤维之间的数值，相关截面如图 8-47 所示，此积分表示该图中阴影面积关于中性轴的一次矩，即

$$\int_{175}^{200} y\mathrm{d}a = 200(25)(187.5) = 9.375 \times 10^5(\mathrm{mm}^3)$$

一般公式中的 b 仍取作 10 mm，因为这是欲计算剪应力处梁的宽度。将全部数据代入一般公式，有

$$\tau_{\min} = \frac{150 \times 10^3}{10(389 \times 10^6)}(9.375 \times 10^6) = 36.2(\mathrm{MPa})$$

要指出的是，腹板内的最大剪应力和最小剪应力相差并不大。实际上按惯例通常是计算工字形梁腹板剪应力的近似值，因此，将总剪力 V 除以腹板的面积即可，有

$$\tau_{av} = \frac{150 \times 10^3}{(400)(10)} = 37.5(\mathrm{MPa})$$

进一步分析工字形截面梁的剪应力可以发现，铅直腹板几乎承担了全部的剪力，水平翼缘只承担了其中的很小部分。不同的规范对工字形截面梁腹板的许可剪应力是以相当低的数值来规定的，如某规范规定为 70 MPa，而另一些规范是 90 MPa。

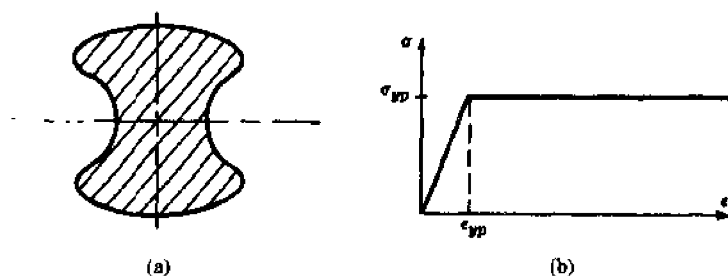
8.10.2　梁的塑性弯曲

题 8.24　考虑具有双对称轴的任意截面梁，如图 8-48(a)所示，承受纯弯曲。材料是理想弹塑性的，亦即应力－应变图如图 8-48(b)所示，且拉伸与压缩时的应力-应变曲线是相同的。试求与中性轴距离大于 y_1 的纤维全部达到材料的屈服点之后，梁内的弯矩。

解　☞ 尽管梁的弯曲使得外层纤维已经屈服，仍可假设：加载前垂直于梁轴的平截面仍保持平面，并垂直于加载后的梁轴，因此纵向纤维的法应变仍与到中性轴的距离成线性关系。

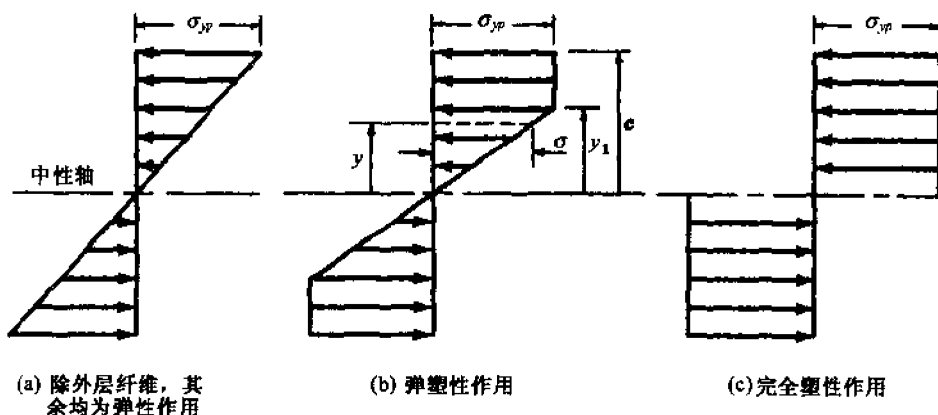
伴随所施加力偶矩的增加，梁外层纤维的应力首先达到了材料的屈服点，而内层纤维的法应力仍与纤维到中性轴的距离成线性变化，如图 8-49(a)。力偶矩的进一步增加，将会使内层纤维屈服不断地由外向内扩展，如图 8-49(b)。极限情况，当所有的纤维(中性轴除外)均达到屈服，法应力的分布如图 8-49(c)所示，对应的弯矩称为全塑性弯矩。对于图 8-48(b)的典型应力-应变曲线，不可能有更大的弯矩。

对于纯弯曲梁，整个截面上的法向力之和应为零。因此，由图 8-49(b)的特征可知双对称截面的中性轴必然通过截面的形心，亦即中性轴以上的面积等于中性轴以下的面积。然而，在题



(a) (b)

图 8-48



(a) 除外层纤维，其余均为弹性作用 (b) 弹塑性作用 (c)完全塑性作用

图 8-49

8.29 中会发现，对于更一般的非对称截面，某些纤维屈服之后，中性轴的位置与完全弹性时不相同(完全弹性时中性轴过形心)。

由图 8-49(b)式，对于 $y<y_1$，有

$$\frac{\sigma}{y}=\frac{\sigma_{yp}}{y_1},\qquad \text{或}\ \sigma=\frac{y}{y_1}\sigma_{yp}$$

且对于 $y>y_1$，$\sigma=\sigma_{yp}$ 为常数；于是，弯矩为

$$M=\int\sigma y\mathrm{d}a=2\int_0^{y_1}\frac{y}{y_1}\sigma_{yp}y\mathrm{d}a+2\int_{y_1}^{c}\sigma_{yp}y\mathrm{d}a=\frac{2\sigma_{yp}}{y_1}\int_0^{y_1}y^2\mathrm{d}a+2\sigma_{yp}\int_{y_1}^{c}y\mathrm{d}a$$

题 8.25 对于矩形截面梁，试求当与中性轴距离大于 y_1 的纤维均屈服时的弯矩。

解 ☞ 对于图 8-50 所示的截面，由题 8-24 的结果，有

$$M=\frac{2\sigma_{yp}}{y_1}\left(\frac{1}{3}by_1^3\right)+2\sigma_{yp}b(c-y_1)\left(\frac{c+y_1}{2}\right)$$
$$=\left(bc^2-\frac{b}{3}y_1^2\right)\sigma_{yp}$$

对于极限情况，亦即 $y_1=0$，如题 8.24 的图 8-49(c)中所指出的，此矩形截面梁的全塑性弯矩是

$$M_p=bc^2\sigma_{yp}=\frac{bh^2}{4}\sigma_{yp}\qquad(1)$$

要指出的是，对于最大可能弹性弯矩 M_e，亦即最外层纤维屈服，其余纤维仍处于弹性范围时，如图 8-49(a)所示，

$$M_e=\frac{bh^2}{6}\sigma_{yp}\qquad(2)$$

因此，矩形截面的全塑性弯矩较最大可能弹性弯矩大 50%

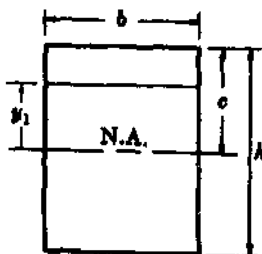


图 8-50

题 8.26 试求矩形截面梁的全塑性弯矩，截面尺寸为 1×2 in,

钢的屈服点为 38000 lbf/in^2，并将此弯矩与最大可能弹性弯矩进行比较。

解 ☞ 由题 8.25 中的(1)式，全塑性弯矩为

$$M_p = \frac{1(2)^2}{4}(38000) = 38000(\text{lbf} \cdot \text{in})$$

由同一题中的(2)式，最大的可能弹性弯矩为

$$M_e = \frac{1(2)^2}{6}(38000) = 25400(\text{lbf} \cdot \text{in})$$

显然，M_p 较 M_e 大 50%。

题 8.27 对于图 8-51 所示的矩形截面梁，与中性轴距离大于 y_1 的纤维已全部屈服，试求梁的轴线曲率半径和弯矩之间的关系。

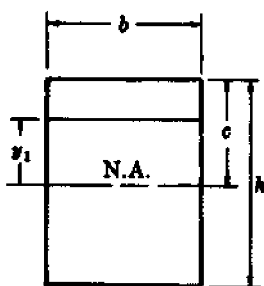


图 8-51

解 ☞ 正如在题 8.25 中假设的、加载前的平截面在加载之后仍保持平面，且仍垂直于梁的轴线，因此，纵向纤纵维的法应变与其到中性轴的距离成线性变化关系。如用 ε_{yp} 表示距中性轴 y_1 处的纤维应变，ε_c 表示最外层纤维的应变，应有

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_{yp}}{y_1} \tag{1}$$

考虑初始长度 dx（沿梁长方向）的矩形单元体，如图 8-52(a)所示，其加载后的图形如图 8-52(b)所示

由该图可有

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon_c}{c} \tag{2}$$

于是

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon_{yp}}{y_1} = \frac{\sigma_{yp}}{Ey_1} \tag{3}$$

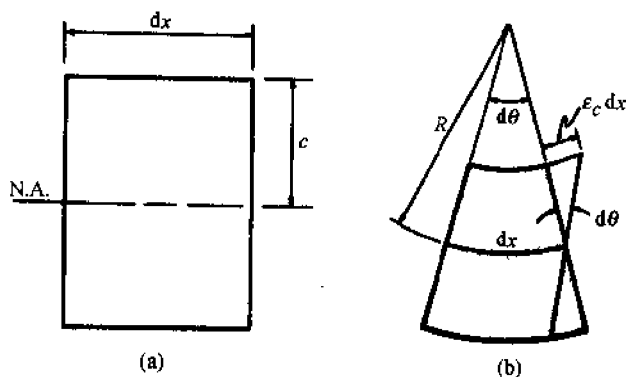


图 8-52

原因在于与中性轴相距 y_1 的纤维仍服从胡克定律 $\sigma_{yp} = E\varepsilon_{yp}$。由题 8.25，应有

$$M = \left(bc^2 y_1 - \frac{b}{3}y_1^3\right)\frac{\sigma_{yp}}{y_1} \tag{4}$$

由(3)式和(4)式，有

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{Eby_1(c^2 - y_1^2/3)} \tag{5}$$

最后，由(2)式和(5)式，可以得到

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI(M/M_e)\sqrt{3 - 2M/M_e}} \tag{6}$$

其中 $M_e = bh^2\sigma_{yp}/6$（见题 8.25），此即为欲求的曲率半径 R 和弯矩 M 之间的关系。(6)式的图形如图 8-53 所示。

题 8.28 考虑一矩形截面梁，截面宽 $b = 25$ mm，高 $h = 10$ mm。材料为钢，屈服应力 $\sigma_{yp} =$

200 MPa,杨氏模量 $E=200$ GPa。试求相应于最大可能弹性弯矩 M_e 及 100 N·m 弯矩时的曲率半径。

解 ☞ 由题 8.25 可知,最大可能弹性弯矩为

$$M_e=\frac{(0.025)(0.01)^2}{6}(200\times10^6)=83(\text{N}\cdot\text{m})$$

由题 8.27 的(6)式,可知相应于此弯矩的曲率为

$$\frac{1}{R}=\frac{83}{(200\times10^9)[(0.025)(0.01)^3/12]\sqrt{3-2}}=0.2$$

亦即 $R=5\text{m}$

图 8-53

由题 8.25 可知,相应于 100 N·m 弯矩的 y_1 值是 4 mm,由题 8.27 的(6)式可知,此时相应的曲率是

$$\frac{1}{R}=\frac{83^*}{(200\times10^9)[(0.025)(0.01)^3/12]\sqrt{3-200/83}}=0.259$$

解出 $R=3.86$ m

题 8.29 考虑梁的更一般情况,其截面只有一个铅直对称轴,如图 8-54(a)所示。试对图 8-54(b)所示的完全塑性弯曲,求中性轴的位置。

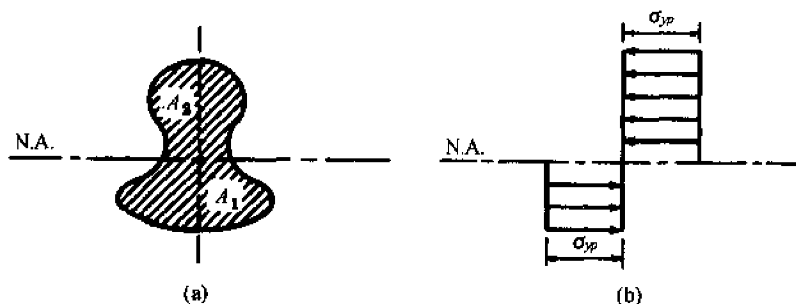


图 8-54

解 ☞ 尽管目前中性轴的位置尚属未知,但是可以用 A_1、A_2 分别表示中性轴以下和以上部分截面的面积。正如在图 8-54(b)中所表示的,位于 A_1 范围内的全部纤维承受等于材料屈服点的拉应力,位于 A_2 范围内的全部纤维承受同样数值的压应力。为满足这些力的水平方向平衡,有

$$\sigma_{yp}A_1-\sigma_{yp}A_2=0 \tag{1}$$

由此可以得出

$$A_1=A_2=A/2 \tag{2}$$

其中 A 是整截面的面积。因而,当完全塑性时,中性轴将把整个截面划分为面积相等的两个部分,这是与完全弹性情况有区别的,在题 8.1 中曾指出,完全弹性时的中性轴通过截面的形心。

此外,拉伸应力和压缩应力组成的力偶矩必须等于所施加的完全塑性力偶矩 M_p。如果 $\bar{y}_1$ 和 $\bar{y}_2$ 分别表示面积 A_1 和 A_2 的形心到中性轴的距离。那么由静力学,有

$$\sigma_{yp}A_1\bar{y}_1+\sigma_{yp}A_2\bar{y}_2=M_p \tag{3}$$

将(2)式代入,上式变成

$$\sigma_{yp}\cdot\frac{A}{2}(\bar{y}_1+\bar{y}_2)=M_p \tag{4}$$

或

$$\sigma_{yp}=\frac{M_p}{(A/2)(\bar{y}_1+\bar{y}_2)} \tag{5}$$

此式经常被写成如下形式:

* 原著此处是 100,$1/R=0.312$,$R=3.2$ m;结果是错误的。—— 译者注

$$\sigma_{yp} = \frac{M_p}{Z_p} \tag{6}$$

其中 $Z_p = (A/2)(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$ 称为塑性截面模量。

题 8.30 对于 W8×40 的工字形截面，钢材的屈服点应力为 38000 lbf/in²，试求完全塑性弯矩。并将计算结果和同一截面的最大可能弹性弯矩比较。

解 ☞ 由题 8.29，可知完全塑性弯矩为

$$M_p = \sigma_{yp} Z_p$$

其中 Z_p 为塑性截面模量。对于一些典型的工字形截面，Z_P 被制成表格，刊登在本章结尾处。对于给定的截面，Z_p 为 39.9 in³，于是

$$M_p = 38000(39.9) = 1520000(\text{lbf}\cdot\text{in})$$

最大可能弹性弯矩为 $M_e = \sigma_{yp} Z$，此处 Z 是通常的（弹性的）截面模量，即

$$M_e = 38000(35.5) = 1350000(\text{lbf}\cdot\text{in})$$

对于此种截面，完全塑性弯矩只比最大可能弹性弯矩大 12.6%。实际上，对于大多数工字形截面，完全塑性弯矩近似超过最大可能弹性弯矩 12% ~ 15%。

题 8.31 考虑如图 8-55(a)所示的 T 形截面，铅直腹板内与中性轴距离大于 y_1 的所有纤维均已达到材料的屈服点，其他纤维尚处于弹性阶段。试求中性轴的位置以及此种应力分布对应的弯矩。

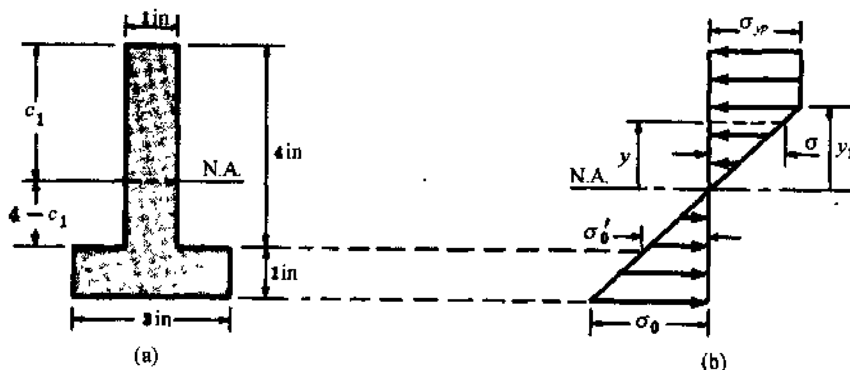


图 8-55

解 ☞ 研究如图 8-55(b)所示的法向力，即可找到中性轴的位置，由几何关系有

$$\frac{\sigma_0}{5-c_1} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1}, \quad 或 \quad \sigma_0 = \frac{5-c_1}{y_1}\sigma_{yp}$$

$$\frac{\sigma_0'}{4-c_1} = \frac{\sigma_{yp}}{y_1}, \quad 或 \quad \sigma_0' = \frac{4-c_1}{y_1}\sigma_{yp}$$

截面上法向力的合力应等于零，即

$$\sum F_N = (c_1 - y_1)(1)\sigma_{yp} + y_1(1)(\sigma_{yp}/2) - \left\{\left[\frac{5-c_1}{2y_1}(5-c_1)(3)\sigma_{yp}\right] - \left[\frac{4-c_1}{2y_1}(4-c_1)(2)\sigma_{yp}\right]\right\} = 0$$

由此可得出 2 次方程，

$$c_1^2 - (2y_1 + 14)c_1 + (y_1^2 + 43) = 0 \tag{1}$$

对于任意给定的 y_1 值，可求出 c_1，即给出了中性轴的位置。此处要指出的是，在上述公式中 y_1 位于分母中，因而上述公式不适用于寻找 $y_1 = 0$ 时的中性轴。原因在于完全弹性时中性轴通过截面的形心。伴随塑性区的增长（亦即 y_1 减少），中性轴要移向由(1)式给出的位置。

相应于图 8-55(b)所示应力的弯矩为

$$M = \int \sigma y \mathrm{d}a = \int_0^{y_1} \frac{y}{y_1}\sigma_{yp}(y)(1)\mathrm{d}y + \int_{y_1}^{c_1} \sigma_{yp}(y)(1)\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^{(5-c_1)}\left(\frac{y}{5-c_1}\right)\left(\frac{5-c_1}{y_1}\right)(\sigma_{yp})(y)(3)\mathrm{d}y$$
$$-\int_0^{(4-c_1)}\left(\frac{y}{4-c_1}\right)\left(\frac{4-c_1}{y_1}\right)(\sigma_{yp})(y)(2)\mathrm{d}y$$

或

$$M=\frac{\sigma_{yp}}{y_1}\left[\frac{y_1^3}{3}+\frac{y_1}{2}(c_1^2-y_1^2)+(5-c_1)^3-\frac{2}{3}(4-c_1)^3\right] \tag{2}$$

题8.32 对于题8.31中的 T 形截面,试求整个截面完全塑性时的中性轴位置及弯矩承载能力,并将之与最大可能弹性弯矩进行比较。

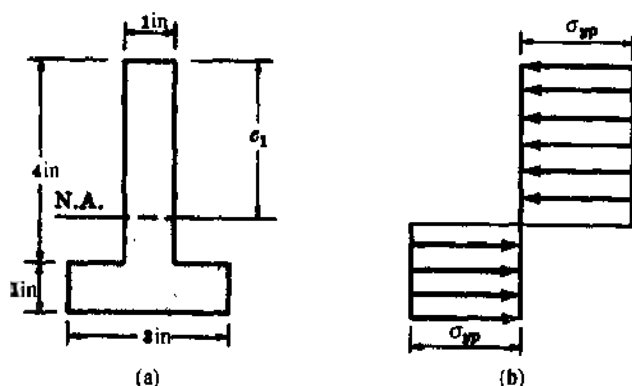


图8-56

解 在这种情况下,法向应力如图8-56(b)所示。考虑全截面上法向力的平衡,有

$$-\sigma_{yp}(1)(c_1)+[\sigma_{yp}(5-c_1)(3)-\sigma_{yp}(4-c_1)(2)]=0$$

由此可有 $c_1=3.5$ in。正如题8.29所指出的,对于完全塑性的情况,中性轴将整个截面划分为面积相等的两个部分。

完全塑性时的弯矩为

$$M_p=\int\sigma y\mathrm{d}a=\int_0^{c_1}\sigma_{yp}(y)(1)\mathrm{d}y+\int_0^{(5-c_1)}\sigma_{yp}(y)(3)\mathrm{d}y-\int_0^{(4-c_1)}\sigma_{yp}(y)(2)\mathrm{d}y$$
$$=\sigma_{yp}[c_1^2-7c_1+21.5]$$

对于 $c_1=3.5$,可有 $M_p=9.25\sigma_{yp}$

在题8.31的(1)式中,令 $y_1=c_1$ 可得到对应于最大可能弹性弯矩时中性轴的位置。此位置为 $c_1=3.07$ in(亦即中性轴过截面的形心)。由题8.31中的(2)式可以得到最大可能弹性弯矩为 $M_e=5.32\sigma_{yp}$。

完全塑性弯矩 M_p 超过 M_e 的74%。

题8.33 如图8-57方式摆放的正方形截面梁,承受铅直载荷。如果只是最顶部及最底部纤维的应力达到材料的屈服点,试求最大可能弹性弯矩。此外如果所有的纤维都已屈服,试求完全的塑性弯矩。

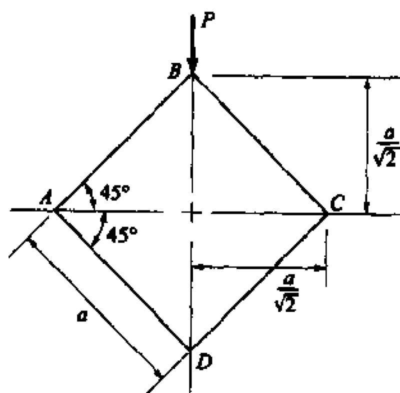


图8-57

解 如果 B 点达到拉伸屈服、D 点达到压缩屈服,整个截面上的应力分布是(见题8.1)

$$\sigma=\frac{My}{I} \tag{1}$$

为了确定 I,可将横截面分为两个三角形 ABC 和 ADC。对于每一个三角形,由题7.7可

有

$$I' = \frac{bh^3}{12} \tag{2}$$

对于整个截面，惯性矩为

$$I = 2\left\{\frac{1}{12}\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right\} = \frac{a^3}{24} \tag{3}$$

由(1)式可以得到最远处纤维内的应力为

$$\sigma_{yp} = \frac{M_e\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{a^3}{24}\right)}$$

解出

$$M_e = \frac{(\sigma_{yp})a^3\sqrt{2}}{12}$$

对于完全塑性的情况，整个截面上的应力分布如图 8-58 所示。AC 上方的拉应力合力是

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{yp} = \frac{a^2}{2}\sigma_{yp}$$

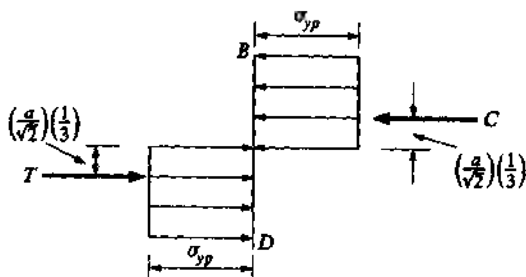


图 8-58

此力作用在三角形 ABC 的形心处。AC 下方的压应力合力为

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)\sigma_{yp} = \frac{a^2}{2}\sigma_{yp}$$

作用在三角形 ADC 的形心处。这些力形成的力偶矩为

$$M_p = \left(\frac{a^2}{2}\right)\sigma_{yp}\left[2\left(\frac{a}{3\sqrt{2}}\right)\right] = \sigma_{yp}\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$$

下述的比值也是人们很感兴趣的

$$\frac{M_p}{M_e} = \frac{\sigma_{yp}(a^3/3\sqrt{2})}{\sigma_{yp}(a^3\sqrt{2}/12)} = 2$$

8.11 习　　题

题 8.34　由屈服点为 12000 lbf/in² 的钛合金 Ti-6Al-4V 制成的梁，其截面为高 2 in、宽 1 in 的矩形，弯曲的中性轴沿 1 in 的方向。现已知最大弯曲应力为 9000 lbf/in²，试求相应的弯矩。
（答案：6000 lbf·in）

题 8.35　长度为 3 m 的悬臂梁在其自由端承受 35 kN 的集中力。材料为结构钢，且最大的弯曲应力不得超过 125 MPa。如果梁截面为圆形的，试求其直径。（答案：204 mm）

题 8.36　两块厚 1/2 in、宽 8 in 的搭接板焊接在两个 10 in 高的槽钢上组成图 8-59 所示截面。载荷作用在铅直平面内，且弯曲是关于水平轴发生的。每个槽形截面关于水平形心轴的惯性矩为 78.5 in⁴，如果最大许可的弹性弯曲应力为 18000 lbf/in²，试求梁内可能承受的最大弯矩。（答案：123200 lbf·in）

题 8.37　使用惯性矩 $I = 61 \times 10^6$ mm⁴、高度为 250 mm 的工字钢制成悬臂梁，梁长 2 m，材料的许可应力为 125 MPa。若此梁在全长范围内承受均布载荷，试求许可的载荷集度。（答案：30.5 kN/m）

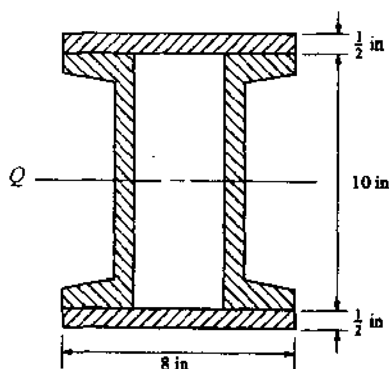


图 8-59

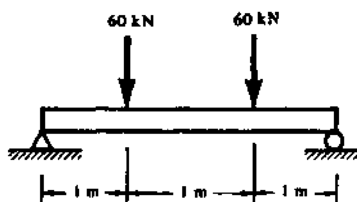


图 8-60

题 8.38 如图 8-60 所示，简支梁承受两个对称布置的集中力 60 kN 作用，材料的拉伸和压缩许可应力均为 125 MPa。若截面的高度为 250 mm，试求所需要的惯性矩。(答案：60×10^6 mm^4)

题 8.39 考虑如图 8-60 所示的、承受两个集中力 60 kN 的简支梁，若梁的截面如图 8-61 所示的圆环形，材料的拉伸和压缩许可应力均为 125 MPa，试求圆截面的外径。(答案：17.4 mm)

题 8.40 考虑承受集中力和分布载荷的简支梁，如图 8-62 所示。若材料的许可拉应力和许可压应力均为 20000 lbf/in^2，试选择适宜的工字形截面。(答案：W12×25)

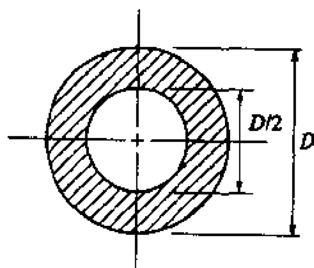


图 8-61

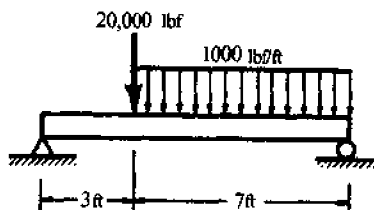


图 8-62

题 8.41 长度为 3 m 的悬臂梁，承受均布载荷 30 kN/m 作用，拉伸和压缩许可应力均为 150 MPa。试选择适宜的工字形截面。(答案：W305×66)

题 8.42 长度为 3 m 的两端简支梁承受均布载荷 10 kN/m 作用，此梁截面为 75 m×150 mm 的矩形。试求峰值弯曲应力的数值和位置，此外还要求梁中点处的截面上表面以下 25 mm 处的弯曲应力。(答案：40 MPa，－26.8 MPa)

题 8.43 重新考虑题 8.42 中的梁。如果将梁的自重作为附加均布载荷与原均布载荷共同作用在梁上，试求梁的最大弯曲应力。梁的自重为 77.0 kN/m^3。(答案：43.6 MPa)

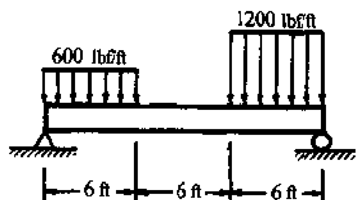


图 8-63

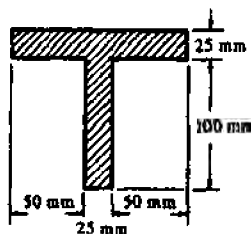


图 8-64

题 8.44 两段均布载荷作用在一个简支梁上，如图 8-63 所示。梁的截面为 W8×28。试求梁的最大弯曲应力数值与位置。(答案：900 lbf/in^2，距右支座为 5.5 ft)

题 8.45 长度为 2 m 的悬臂梁，截面为 T 形，如图 8-64 所示。承受均布载荷 8 kN/m(含自重)。试求最大的拉伸应力和最大的压缩应力。(答案：38.5 MPa，－81 MPa)

题 8.46　如图 8-65(a)所示的简支梁 AC 承受集中力 P 作用，梁的截面为有两个方形孔洞的矩形，如图 8-65(b)所示。如果许可应力为 120 MPa，试求许可载荷 P。(答案：1.80 kN)

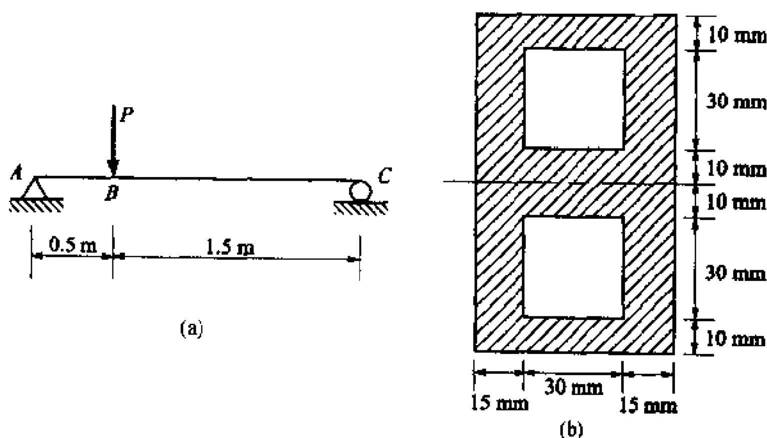


图 8-65

题 8.47　槽形截面的简支梁承受均布载荷及集中力偶的作用，如图 8-66 所示。试求最大的拉伸应力和压缩应力。(答案：31.2 MPa，-56.8 MPa)

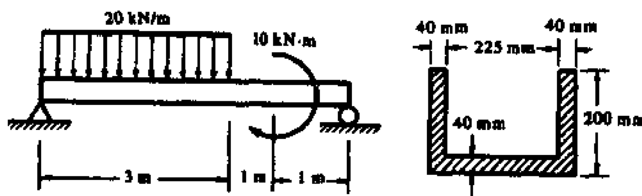


图 8-66

题 8.48　几何形状如图 8-67 所示的圆截面梁承受作用在中点处的集中力 P，试求最大弯曲应力的位置与数值。(答案：$x = L/4$，$\sigma_{max} = 0.377PL/d^3$)

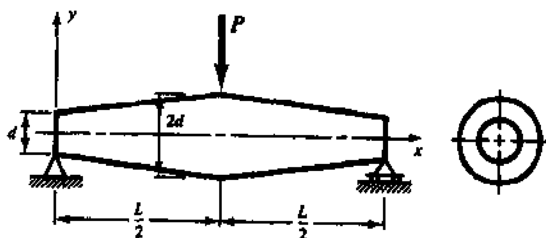


图 8-67

题 8.49　槽形截面外伸梁承受图 8-68 所示载荷。材料为灰铸铁，拉伸许可应力为 5000 lbf/in^2，压缩许可应力为 20000 lbf/in^2。试求许可载荷 P。(答案：2400 lbf)

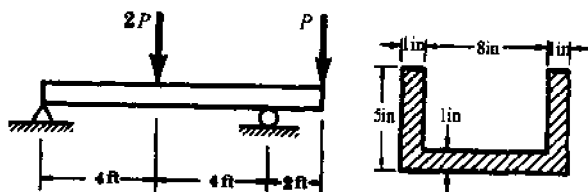


图 8-68

题 8.50 如图 8-69 所示，长度为 10 ft 的简支梁截面为 4in×8in，承受均布载荷 200 lbf/ft 作用。忽略梁的自重，试求

(a)梁中的最大法应力；　(b)最大剪应力

(c)与右支座相距 2 ft，并在顶表面以下 1 in 处的剪应力。

(答案：(a)705 lbf/in^2，(b)47 lbf/in^2，(c)12.3 lbf/in^2)

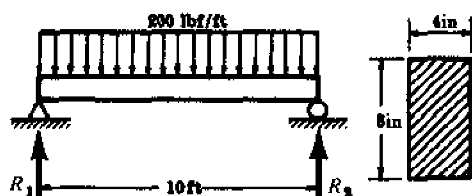


图 8-69

题 8.51 简支梁如图 8-70 所示，试求(a)最大弯曲法应力；(b)最大剪应力。

(答案：(a)22000 lbf/in^2，(b)1660 lbf/in^2)

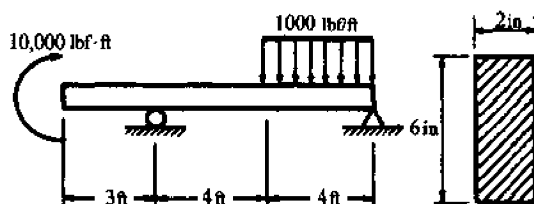


图 8-70

题 8.52 对于一个实心的圆截面梁，试求其最外部纤维开始屈服时的弯矩与全塑性弯矩的比值。(答案：69.6%)

题 8.53 考虑一等腰三角形截面(如图 8-71)梁的弯曲，载荷位于铅直对称面内。试求全塑性弯矩和最外部纤维开始屈服弯矩的比值。(答案：2.48)

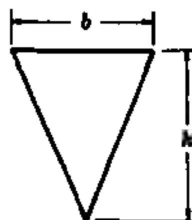


图 8-71

题 8.54 如图 8-72 所示的 T 形截面，试求全塑性弯曲时中性轴的位置。(答案：距下边缘 137.5 mm)

题 8.55 半径为 r 的实心圆截面梁，承受弯曲。试求最外层纤维开始屈服时的弯矩和距中性轴远于 $r/2$ 纤维全部屈服时弯矩的百分比。(答案：49.2%)

题 8.56 如图 8-73 所示为一个梁的截面，当其弯矩等于 20 kN·m 时，试求弹性区和塑性区分界线的高度 y_1，并求梁轴线的曲率半径。设材料的屈服点为 200 MPa，$E=200$ GPa。

(答案：$y_1=47.4$ mm，$R=52.6$ m)

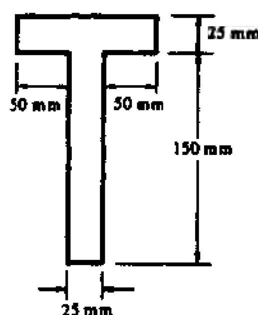


图 8-72

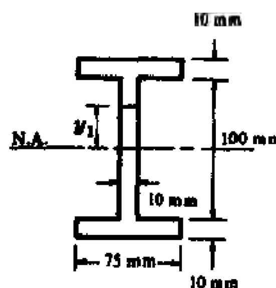


图 8-73

题 8.57 高度为 600 mm 的工字形截面，每个翼缘都焊接一块厚度为 25 mm 的盖板(见图 8-74)，整个截面的惯性矩为 1000×10^6 mm^4。若已知沿梁长的某处的横向剪力为 300 kN，试求每个焊缝内单位长度

上的剪力。(答案:146N/mm)

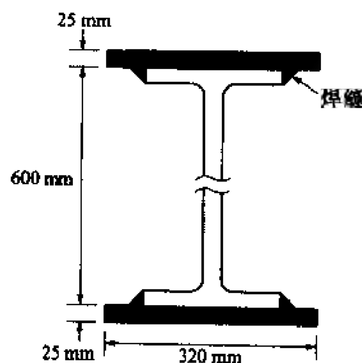


图 8-74

表 8-1　部分工字钢截面的性质　(USCS 系统)

型号*	每 ft 重量 /(lbf/ft)	面积 /(in²)	I/(in⁴) (关于 xx 轴)	Z /(in³)	I/(in⁴) (关于 yy 轴)	Z_P/(in³) (塑性截面模量)
W 18×70	70.0	20.56	1153.9	128.2	78.5	144.7
W 18×55	55.0	16.19	889.9	98.2	42.0	111.6
W 18×72	72.0	21.16	597.4	97.5	195.3	108.1
W 18×58	58.0	17.06	476.1	78.1	107.4	86.5
W 18×50	50.0	14.71	394.5	64.7	56.4	72.6
W 18×45	45.0	13.24	350.8	58.2	50.0	64.9
W 18×40	40.0	11.77	310.1	51.9	44.1	57.6
W 18×36	36.0	10.59	280.8	45.9	23.7	51.4
W 18×32	32.0	9.41	246.8	40.7	20.6	45.0
W 18×25	25.0	7.39	183.4	30.9	14.5	35.0
W 10×89	89.0	26.19	542.4	99.7	180.6	114.4
W 10×54	54.0	15.88	305.7	60.4	103.9	67.0
W 10×49	49.0	14.40	272.9	54.6	93.0	60.3
W 10×45	45.0	13.24	248.6	49.1	53.2	55.0
W 10×37	37.0	10.88	196.9	39.9	42.2	45.0
W 10×29	29.0	8.53	157.3	30.8	15.2	34.7
W 10×23	23.0	6.77	120.6	24.1	11.3	33.7
W 10×21	21.0	6.19	106.3	21.5	9.7	24.1
W 8×40	40.0	11.76	146.3	35.5	49.0	39.9
W 8×35	35.0	10.30	126.5	31.1	42.5	34.7
W 8×31	31.0	9.12	109.7	27.4	37.0	30.4
W 8×28	28.0	8.23	97.8	24.3	21.6	27.1
W 8×27	27.0	7.93	94.1	23.4	20.8	23.9
W 8×24	24.0	7.06	82.5	20.8	18.2	23.1
W 8×19	19.0	5.59	64.7	16.0	7.9	17.7
W 6×15$\frac{1}{2}$	15.5	4.62	28.1	9.7	9.7	11.3

* W 后面第一个数字是截面的名义高度(以 in 为单位),第二个数字是每 ft 的重量。

表 8-2　部分工字钢截面的性质　(SI 系统)

型号*	每米重量 /(kgf/m)	面积 /(mm²)	$I/(10^6mm^4)$ (关于 xx 轴)	Z /(10^3mm^3)	$I/(10^6mm^4)$ (关于 yy 轴)	$Z_p/(10^3mm^3)$ (塑性截面模量)
W 460×103	102.9	13200	479	2100	32.6	2370
W 460×81	80.9	10400	369	1610	17.4	1820
W 305×106	105.8	13600	248	1590	81.0	1770
W 305×85	85.3	11000	198	1280	44.6	1410
W 305×74	73.5	9480	164	1060	23.4	1190
W 305×66	66.2	853.0	146	952	20.7	1060
W 305×59	58.8	7580	129	849	18.3	942
W 305×53	52.9	6830	117	750	9.83	840
W 305×47	47.0	6060	102	665	8.55	736
W 305×37	36.8	4760	76.1	505	6.02	572
W 254×131	130.8	16900	225	1630	74.9	1870
W 254×79	79.4	10200	127	988	43.1	1100
W 254×72	72.0	9280	113	893	38.6	986
W 254×66	66.2	8530	103	803	22.1	899
W 254×54	54.4	7010	81.7	652	17.5	736
W 254×43	42.6	5490	65.3	504	6.31	567
W 254×34	33.8	4360	50.0	394	4.69	551
W 254×31	30.9	3990	44.1	352	4.02	394
W 203×59	58.8	7580	60.7	580	20.3	652
W 203×51	51.4	6630	52.5	508	17.6	567
W 203×46	45.6	5870	45.5	448	15.4	497
W 203×41	41.2	5300	40.6	397	8.96	443
W 203×40	39.7	5110	39.0	383	8.63	391
W 203×35	35.3	4550	34.2	340	7.55	378
W 203×28	27.9	3600	26.8	262	3.28	290
W 152×23	22.8	2980	11.7	159	4.02	185

* W 后面第一个数字是截面的名义高度(以 mm 为单位),第二个数字是每米的重量(以 kgf 为单位)。

第 9 章　梁的弹性挠度：双积分法

9.1 引　　言

在第 8 章中讲到作用于梁上的横向力不仅在梁内引起弯曲应力与剪应力，而且在垂直于梁纵向轴线方向上引起挠度。第 8 章中已讨论了应力，本章和第 10 章将讨论挠度的计算方法。

9.2 梁挠度的定义

用梁始于未受力位置时的挠度表示梁的变形是最方便的。挠度的测量是从梁开始时的中性层到变形后的中性层。变形后中性层描述的构形称为梁的弹性曲线。图 9-1 是用初始未变形状态表示的梁，图 9-2 是用受力变形后的构形表示的梁。



图 9-1

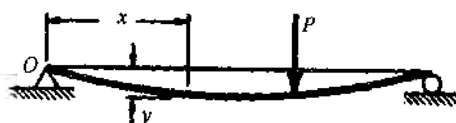


图 9-2

位移 y 被定义为梁的挠度，经常需要确定沿梁长每个 x 值对应的挠度 y。这个关系可写为等式，此等式通常叫做梁的挠曲线(或弹性曲线)方程。

9.3 梁挠度的重要性

与限制应力一样，梁的设计规范经常要限制梁的变形。因此，除了计算第 8 章中讲述的应力外，设计者还必须计算梁的变形。例如，在很多建筑规范中，梁的最大许可挠度不能超过梁长的 1/300；设计航空器的部件时挠度也不能超过预定值，否则空气动力学特性就可能发生改变。因此，一个精心设计的梁不仅能承受可能作用于它的载荷，而且不得产生不良的过大挠度。此外，求解超静定梁约束反力时，将包括各种变形关系的运用，这些将在第 11 章中讨论。

9.4 计算梁挠度的方法

计算梁挠度的方法很多，最常用的方法有如下几种：

1. 双积分法，
2. 奇异函数法，
3. 弹性能法。

本章讲述第一种方法，第 10 章讨论奇异函数法的应用，弹性能法将在第 15 章讨论。要特别指出的是，所有这些方法都仅适用于全梁均工作在弹性阶段的情况。

9.5 双积分法

发生弯曲后，梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M \tag{9.1}$$

式中 x, y 是图 9.2 中表示的坐标,即 y 为梁的挠度。此方程将在题 9.1 中导出;式中 E 表示梁的弹性模量,I 表示梁截面关于通过横截面形心中性轴的惯性矩,M 表示距离梁一端为 x 处的弯矩,它的数值在第 6 章中定义为距离梁端为 x 的截面的一侧的所有外力对通过该截面的轴的力矩代数和。通常,M 是 x 的函数,为了得到作为 x 函数的挠度 y 的代数方程,需要将 (9.1) 式积分两次。

无论在何种载荷作用下,方程(9.1)都是控制梁弹性挠度的基本微分方程。作为应用例子,见题 9.2 至题 9.14 和题 9.16 至题 9.22。

9.6 积分过程

双积分法计算梁的挠度仅仅对(9.1)式积分,第一次积分得到梁上任一点处的斜率 dy/dx,第二次积分法得到对任意 x 值的挠度 y。当然,在对方程积分前必须将弯矩 M 表示为坐标 x 的函数。在这里研究的例子,其积分都是极其简单的。

因为微分方程(9.1)是二阶的,所以它的解一定含有两个积分常数,这两个积分常数由关于梁上某一点的斜率和挠度的已知条件求得,例如,当为悬臂梁时,积分常数由梁的固定端处斜率为零和挠度为零的条件来确定。

为了描述沿梁长不同区段的弯矩,经常需要两个或更多的方程,这一点在第 6 章中强调过。在此种情况下,每一区段都必须写出(9.1)式并且在每一区段上积分这些方程都会产生两个积分常数,利用相邻区段在连接点处变形和斜率的连续条件确定这些常数。见题 9.17～题 9.19。

9.7 符号规则

在第 6 章中采用的弯矩符号规则在这里仍是适用的。在(9.1)式中 E 和 I 均为正,由此式可看到,在某一 x 值处如果 M 是正的,那么 d^2y/dx^2 也是正的。对于以上的弯矩符号规则,坐标 x 必须是沿梁长向右为正,挠度向上为正,这一点将在题 9.1 中详细解释,遵照这样的符号规则,积分(9.1)式即可得到作为 x 函数的挠度 y,此时应认为向上的挠度是正的,向下的挠度是负的。

9.8 假设与限制

推导(9.1)式时,假定由剪力引起挠度与由弯曲作用引起的挠度相比可忽略不计,同时假定挠度的数值与梁的截面尺寸相比很小,且梁的各部分均在弹性范围内工作。梁在加载之前是直的。作为示例,在题 9.25 中将考虑梁在受力之前,与直线构件略有偏离的情况;处理此类问题时须对(9.1)式进行修正。

9.9 例 题

题 9.1 求在横向力作用下梁的挠曲线微分方程

解 ☞ 在题 8.1 中已导出关系式

$$M=\frac{EI}{\rho} \tag{1}$$

式中 M 表示作用于梁的一特定横截面上的弯矩,ρ 是同一截面处梁中性层的曲率半径,E 是

弹性模量，I 表示横截面关于形心中性轴的惯性矩。本书中我们通常考虑 EI 沿全梁均为常数的那些梁，但是 M 和 ρ 均为 x 的函数。

方程(1)可写做下列形式：

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI} \tag{2}$$

此处(2)式的左边表示梁的中性层的曲率，因为 M 沿梁长变化，所以挠曲线的曲率也是可以变化的。

图 9-3

令图 9-3 中的粗线表示梁弯曲变形后的中性层，加载前梁的中性层与 x 轴一致。通常认为图中所示的坐标系是最方便的。向上的挠度 y 被认为是正的，因此对于图 9-3 所示的梁，所有的挠度均为负的。代表变形梁曲线上任一点的曲率表达式很容易根据微分表示出来。曲率的精确公式为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2}{[1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2]^{3/2}} \tag{3}$$

在这个表达中，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 表示曲线任一点处的斜率，对于小挠度梁，它的值尤其是它的平方同 1 相比很小，可以略去。根据小挠度假设，曲率表达式简化为

$$\frac{1}{\rho}\approx\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} \tag{4}$$

因此，在小挠度的情况下，(2)式化为 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2=M/EI$ 或

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=M \tag{5}$$

这就是在横向力作用下梁的挠曲线微分方程。为了纪念它的共同发明者，将此式命名为梁弯曲的欧拉-伯努利方程。在任何问题中，为了求得沿梁长挠度 y 和坐标 x 之间的代数关系式，都必须对此式积分，这将在下面的题中实施。

题 9.2　试求悬臂梁受一集中力 P 时每一点的挠度，如图 9-4 所示。

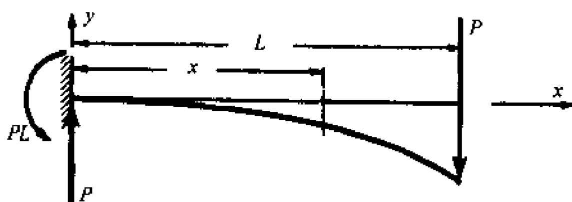


图 9-4

解　☞ 引入图示坐标系 xy，其中 x 轴与梁未弯曲时的位置一致，变形后的梁用粗线表示。首先必须求出固定端对梁的反作用力，根据静力学很容易求得为铅直力 P 和力偶矩 PL，如图示。

与固定端相距 x 的任意截面上的弯矩，可由这两个作用力对经过该截面的轴的力矩和求得。很明显，向上的作用 P 产生一正弯矩 Px，力偶 PL 单独作用将产生如图 9-5 所示的弯曲。根据第 6 章的符号规则，这将构成负弯矩。因此在截面 x 处弯矩 M 为

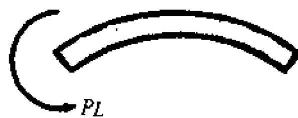


图 9-5

$$M=-PL+Px$$

弯曲梁的微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=M$$

式中 E 表示材料的弹性模量，I 表示横截面对中性轴的惯性矩。代入得

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-PL+Px \tag{1}$$

此方程很容易积分，积分一次得

$$EI\frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

它表示斜率方程，这里 C_1 为积分常数。因为梁在固定端刚性夹支，所以梁在固定端的斜率 dy/dx 为零，即 $(dy/dx)_{x=0}=0$，利用这一条件可求得积分常数。方程(2)对所有的 x 和 y 均适用，代入 $x=0$ 得 $0=0+0+C_1$，即 $C_1=0$

然后，对(2)式积分得

$$EIy = -PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + C_2 \tag{3}$$

式中 C_2 是另一积分常数。再利用支承端的条件可以确定这一常数，在 $x=0$ 处，因为梁刚性夹支所以挠度 y 为零。将 $(y)_{x=0}=0$ 代入(3)式，我们得 $0=0+0+C_2$，即 $C_2=0$

于是，在 $C_1=C_2=0$ 的条件下，(2)式和(3)式给出了梁上任一点 x 处的斜率 dy/dx 和挠度 y。在力 P 作用下，在梁的右端($x=L$)处挠度为最大，由(3)式得

$$EIy_{max} = \frac{-PL^3}{3} \tag{4}$$

其中负号表示挠曲线上这一点的位置位于 x 轴下面。如果仅要求在 $x=L$ 处的最大挠度值，通常用 Δ_{max}表示，有

$$\Delta_{max} = \frac{PL^3}{3EI} \tag{5}$$

题 9.3 图 9-4 所示的悬臂梁的长度为 3 m，自由端受集中力 20 kN 作用，其横截面为 $W203\times59$ 的型钢截面，弹性模量 $E=200$ GPa。根据第 8 章的表 8-2 可知 $I=60.7\times10^{-6}\,m^4$，$Z=580\times10^{-6}\,m^3$。试求梁的最大挠度。

解 ☞ 在集中力作用下，梁的最大挠度发生在自由端，由题 9.2 中的(4)式得

$$y_{max} = -\frac{PL^3}{3EI} = -\frac{(20\,000N)(3m)^3}{3(200\times10^9N/m^2)(60.7\times10^{-6}m^4)}$$

$$= -0.0148\ vm \quad 或 \quad -14.8\ mm$$

负号表示挠度向下。在推导此挠度公式时，曾假设梁的材料服从胡克定律，事实上，仅仅由上面的计算不能确定材料的应力未超过比例极限。如果一旦超过材料的比例极限，梁弯曲的基本方程 $EI(d^2y/dx^2)=M$ 不再适用，以上的数值就毫无意义。因此，在有关梁挠度的每一个问题中，应强调一点，即必须确定梁的最大弯曲应力小于材料的比例极限，这运用题 8.1 导出的弯曲应力公式很容易做到，根据公式

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

其中 σ 表示弯曲应力，M 表示弯矩，c 表示从中性轴到梁外层纤维的距离，I 表示梁横截面关于中性轴的面积二次矩。在此题中最大弯矩产生在固定端，且有 $M_{max}=(20000N)(3m)=60000N\cdot m$。将其代入弯曲应力公式中，得

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z} = \frac{60,000N\cdot m}{580\times10^{-6}m^3} = 103\ MPa$$

钢的比例极限约为 200 MPa，因为上述应力值小于钢的比例极限，所以运用梁的挠曲方程是合理的。

题 9.4 运用题 9.3 中给出的梁的参数，求图 9-4 所示悬臂梁右端的斜率。

解 ☞ 在题 9.2 中得到的斜率方程为

$$EI\frac{dy}{dx} = -PLx + \frac{Px^2}{2}$$

在自由端，$x=L$，有

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = -PL^2 + \frac{PL^2}{2}$$

因此该端的斜率为

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = \frac{-PL^2}{2EI}$$

运用题 9.3 中梁的参数，得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=L} = \frac{(20000\text{N})(3\text{m})^3}{2(200\times10^9\text{N/m}^2)(60.7\times10^{-6}\text{m}^4)} = 0.0222\text{rad} \quad 或 \quad 1.27°$$

题 9.5　如图 9-6 所示，一悬臂梁作用有均布荷载 w，求其任一点处的挠度。

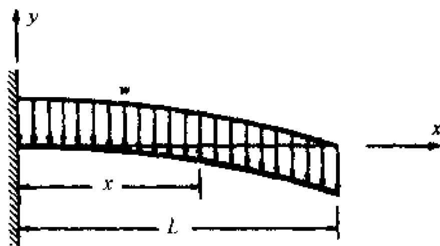


图 9-6

解　☞ 引入图示的坐标系 xy，其中 x 轴与梁未弯时的初始位置一致，弯曲后的梁用粗线表示。关于弯矩的方程虽然可用类似于题 9.2 的方法求得，但是这里我们寻找一种较简便的方法。求距固定端为 x 的截面内的弯矩时，考虑该截面右侧的力而不是左侧的力。

单位长度上力 w 作用在该截面右侧的长度$(L-x)$上，因此合力的数值为 $w(L-x)$lbf，且作用在 x 右侧梁段的中点，到 x 的力臂为$(L-x)/2$。于是，截面 x 处的弯矩为

$$M = -\frac{w}{2}(L-x)^2$$

因为向下的作用力产生负弯曲，所以必须有负号。

弯曲梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w}{2}(L-x)^2 \tag{1}$$

积分一次得

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{w}{2}\frac{(L-x)^3}{3} + C_1 \tag{2}$$

式中 C_1 为积分常数。

利用梁左端的刚性固支条件，可以求得(2)式中的积分常数，在 $x=0$ 处，斜率没有变化，因此 $(dy/dx)_{x=0}=0$，把它代入(2)式，得到 $0 = wL^3/6 + C_1$ 即 $C_1 = -wL^3/6$。于是我们得到

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{w}{6}(L-x)^3 - \frac{wL^3}{6} \tag{2'}$$

再次积分，得

$$EIy = -\frac{w}{6}\frac{(L-x)^4}{4} - \frac{wL^3}{6}x + C_2 \tag{3}$$

式中 C_2 为另一积分常数

在固支端 $x=0$ 处，梁的挠度为零。既然(3)式对所有的 x 和 y 值都适用，那么把此值代入也将适合。代入后得

$$0 = \frac{-wL^4}{24} + C_2 \quad 即 \quad C_2 = \frac{wL^4}{24}$$

这样，梁的挠曲线的最终形式为

$$EIy = -\frac{w}{24}(L-x)^4 - \frac{wL^3}{6}x + \frac{wL^4}{24} \tag{3'}$$

在梁的右端$(x=L)$处，挠度为最大，由(3′)得

$$EIy_{\max} = -\frac{wL^4}{6} + \frac{wL^4}{24} = -\frac{wL^4}{8}$$

式中负值表示挠曲线上的该点位于 x 轴的下方。挠度的最大值为

$$\Delta_{\max} = \frac{wL^4}{8EI} \tag{4}$$

题 9.6　一悬臂梁受抛物线的分布载荷作用，如图 9-7 所示。求挠曲后梁的方程和自由端的挠度。

解 ☞ 引入原点在梁自由端的坐标系。由抛物线的性质知，在自由端的右侧、距离为 x 的任意点处的载荷集度为

$$w = w_0\left(\frac{x}{L}\right)^2 \tag{1}$$

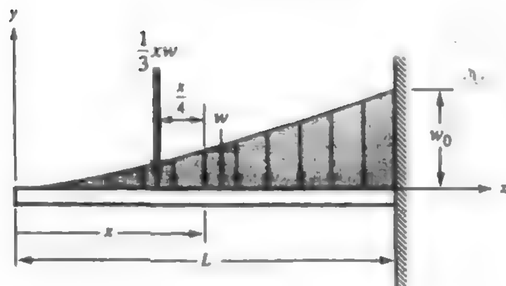


图 9-7

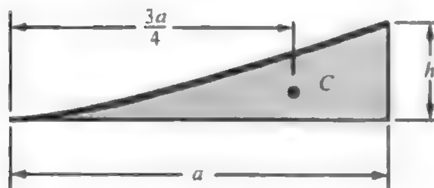


图 9-8

由静力学知，如图 9-8 所示的抛物三角形的面积为 $A = ah/3$、形心 C 位于 $x = 3a/4$ 处；现在就可以根据 x 左侧的所有力矩和求得 x 处的弯矩。x 左侧的合力为 $xw/3$，在图 9-7 中用粗箭头表示，它的作用点在距自由端为 $3x/4$ 处，即距 x 点为 $x/4$。这样，利用(1)式可得在 x 点的弯矩为

$$-\frac{1}{3}xw\left(\frac{x}{4}\right), \qquad 或 \qquad -\frac{w_0x^4}{12L^2}$$

挠曲线的微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{w_0x^4}{12L^2} \tag{2}$$

积分一次得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{w_0}{12L^2}\cdot\frac{x^5}{5} + C_1 \tag{3}$$

在 $x = L$ 处，斜率 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$，因此由(3)式得

$$0 = -\frac{w_0L^3}{60} + C_1, \qquad 求得\ C_1 = \frac{w_0L^3}{60}$$

再积分，有

$$EIy = -\frac{w_0}{60L^2}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{w_0}{60}x + C_2 \tag{4}$$

当 $x = L$ 时，$y = 0$，因此由(4)式得

$$0 = -\frac{w_0L^4}{360} + \frac{w_0L^4}{60} + C_2, \qquad 求得\ C_2 = -\frac{1}{72}w_0L^4$$

所求的弯曲梁的挠度方程为

$$EIy = -\frac{w_0}{360L^2}x^6 + \frac{x_0L^3}{60}x - \frac{1}{72}w_0L^4$$

自由端的挠度为

$$EIy\,|_{x=0} = -\frac{1}{72}w_0L^4$$

题 9.7 如图 9-9 所示，简支梁受均布载荷 w 作用，求梁的挠曲线表达式。

解 ☞ 引入图示的坐标系 xy，此处 x 轴与梁未弯曲时的初始位置一致，变形后的梁用粗线表示。作用于梁上的总载荷为 wL，根据对称性，每一端的约束反力为 $wL/2$。由于荷载对称，很明显挠曲梁关于中点 $x=L/2$ 也是对称的。

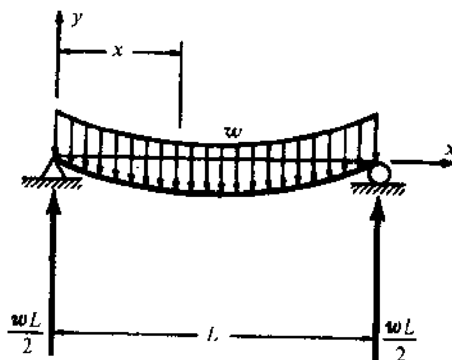


图 9-9

对于这样的受力简支梁，任意截面的弯矩方程在题 6.3 已讨论过。根据那里给出的方法，从左支座到 x 截面左侧区间内的分布载荷可以用其合力来代替，此合力为 wx lbf，作用在长度为 x 区段的中点。合力的方向是向下的，因此产生负弯矩。约束反力 $wL/2$ 产生正弯矩，因此，对于任意 x 值，弯矩为

$$M=\frac{wL}{2}x-wx\frac{x}{2}$$

梁弯曲的微分方程为 $EI(d^2y/dx^2)=M$，代入得

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{wL}{2}x-wx\frac{x}{2}\tag{1}$$

积分得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{wL}{2}\frac{x^2}{2}-\frac{w}{2}\frac{x^3}{3}+C_1\tag{2}$$

要指出的是 dy/dx 表示梁的斜率，由于挠曲线关于跨度中心即 $x=L/2$ 对称，亦即在 $x=L/2$ 处，显然有斜率为零。也就是挠曲后的梁在跨度中点的切线是水平的。利用这个条件可求出 C_1。把该条件代入(2)式，我们有 $(dy/dx)_{x=L/2}=0$

$$0=\frac{wL}{4}\frac{L^2}{4}-\frac{w}{6}\frac{L^3}{8}+C_1,\quad 或\quad C_1=-\frac{wL^3}{24}$$

任意点的斜率 dy/dx 由下式给出：

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{wL}{4}x^2-\frac{w}{6}x^3-\frac{wL^3}{24}\tag{2'}$$

再积分得到

$$EIy=\frac{wL}{4}\frac{x^3}{3}-\frac{w}{6}\frac{x^4}{4}-\frac{wL^3}{24}x+C_2\tag{3}$$

第二个积分常数 C_2 很容易由左支点的挠度为零求得，把 $y_{x=0}=0$ 代入(3)式，得

$$0=0-0-0+C_2\quad 或\quad C_2=0$$

梁挠曲线的最终形式为

$$EIy=\frac{wL}{12}x^3-\frac{w}{24}x^4-\frac{wL^3}{24}x\tag{3'}$$

由于对称性，梁的最大挠度值发生在中点。把 $x=L/2$ 代入(3')得

$$EIy_{max}=-\frac{5wL^4}{384}$$

或者，不考虑代数符号，均布载荷作用下简支梁的最大挠度为

$$\Delta_{max}=\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$$

题 9.8　一简支梁，长度为 10 ft，矩形截面为 1in×3in，受均布荷载 200 lbf/ft 作用。梁材料为

钛合金，型号为 Ti-5AL-2.5Sn，屈服强度为 115000 lbf/in^2，弹性模量 $E=16\times10^6\ \text{lbf/in}^2$。求梁的最大挠度值。

解 ☞ 由题 9.7 知，最大挠度为

$$\Delta_{max}=\frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$$

代入有关数据

$$\Delta_{max}=\frac{5}{384}\frac{(200/12)(120)^4}{(16\times10^6)1/12(1)(3)^3}=1.25(\text{in})$$

运用第 8 章的方法可以得到最大弯曲应力仅为 20000 lbf/in^2，远小于材料的非线性作用范围，因此挠度公式的运用是合理的。

题 9.9 如图 9-10 所示简支梁，两端受力偶 M_1 和 M_2 作用，求挠曲线方程，且当 $M_1=0$ 时，求最大挠度的位置。

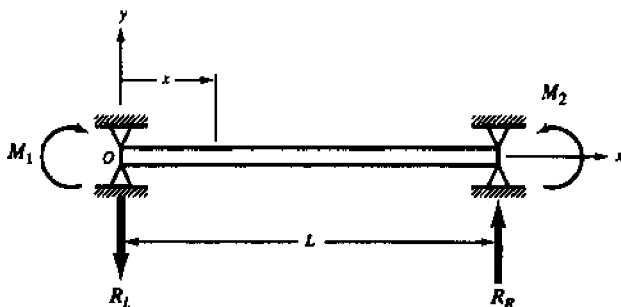


图 9-10

解 ☞ 根据平衡条件可知，作用力偶的合力偶，即(M_1-M_2)，一定与由两端的竖直支反力 R_L 和 R_R 形成的力偶平衡，

$$\sum M_0=-M_1+M_2+R_RL=0$$

因此

$$R_R=\frac{M_1-M_2}{L}(\uparrow)$$

$$\sum F_y=-R_L+R_R=0$$

可解出 $R_L=\dfrac{M_1-M_2}{L}(\downarrow)$

因此梁的弯曲微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_1-R_Lx \tag{1}$$

积分得

$$EI\frac{dy}{dx}=M_1x-R_L\frac{x^2}{2}+C_1 \tag{2}$$

在梁上没有任何关于斜率的条件，因此这里不能确定积分常数 C_1 的值。再积分一次有

$$EIy=M_1\frac{x^2}{2}-\frac{R_L}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2 \tag{3}$$

现在可运用梁两端挠度为零的条件确定两个积分常数。在 $x=0$ 处，$y=0$，由(3)式有

$$0=0-0+0+C_2 \qquad 因此有 \qquad C_2=0$$

另外，在 $x=L$ 处，$y=0$，由(3)式有

$$0=M_1\frac{L^2}{2}-\frac{R_L}{6}L^3+C_1L$$

得

$$C_1=-\frac{M_1L}{3}-\frac{M_2L}{6}$$

因此所求的挠曲线方程为

$$EIy = \frac{M_1}{2}x^2 - \left(\frac{M_1 - M_2}{6L}\right)x^3 - \left(\frac{M_1L}{3} + \frac{M_2L}{6}\right)x \tag{4}$$

若 $M_1 = 0$，(4)式变为

$$EIy = \frac{M_2x^3}{6L} - \frac{M_2Lx}{6} \tag{5}$$

和

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{M_2x^2}{2L} - \frac{M_2L}{6} \tag{6}$$

峰值挠度将发生在(6)式斜率为零的点处，由(6)式可以得

$$x = \frac{L}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

当 $M_1 = 0$ 时，此点的挠度由(5)式可得

$$EIy_{max} = \frac{M_2}{6L}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{M_2L}{6}\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{M_2L^2\sqrt{3}}{27} \tag{8}$$

考查(4)式，当 $M_1 = M_2 = M$ 时，(4)式将变为

$$EIy = \frac{M}{2}x^2 - \frac{ML}{2}x$$

它表示一条抛物线。然而，题 9.1 中的(2)式表明，当沿梁长 M = 常数时，曲率$(1/\rho)$是常数，也就是梁被弯曲成一圆弧，形成这个微小差别的原因是，在题 9.1 中的(5)式中，亦即

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

采用了近似值

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$$

正如在题 9.1 中说明的，实际上，抛物线和圆弧之间的数值差别很小，几乎所有情况均可忽略。

题 9.10　如图 9-11 所示，一简支梁受力偶 M_2 作用，梁长 2 m，材料的弹性模量 $E = 200$ GPa。正方形横截面的边长为 50 mm。梁的最大许可挠度为 5 mm，许可弯曲应力为 150 MPa，求最大许可载荷 M_2。

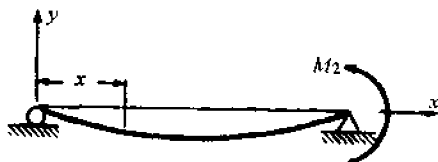


图 9-11

解　☞ 很容易确定两个 M_2 的值：一个利用挠度为 5 mm 的条件，另一个利用梁上最大弯曲应力为 150 MPa 的条件，M_2 的真实解即为这两个值中的较小者。

我们首先考虑梁的最大挠度值为 5 mm，根据题 9.9 中的(8)式，有

$$0.005 = \frac{M_2(2)^2\sqrt{3}}{27(200\times10^9)(1/12)(0.05)(0.05)^3}\quad 即\quad M_2 = 2.03\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

现在我们假设最大容许弯曲应力发生在梁上最大弯矩截面的外层纤维上。参照题 9.9，由于 $M_1 = 0$，可得梁两端的约束反力均为

$$|R| = \frac{M_2}{L}$$

如图 9-12 所示。梁的弯矩图如图 9-13 所示。

梁上的最大弯矩为 M_2，运用弯曲应力公式 $\sigma = Mc/I$，在梁右端即最大弯矩截面的外层纤维上有

$$150\times10^6=\frac{M_2(0.025)}{\left(\frac{1}{12}\right)(0.05)(0.05)^3}\quad 即\ M_2=3.125\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

因此最大许可力矩为 $M_2=2.03\ \text{kN}\cdot\text{m}$

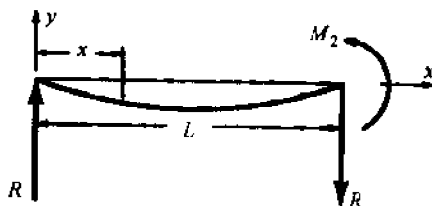


图 9-12

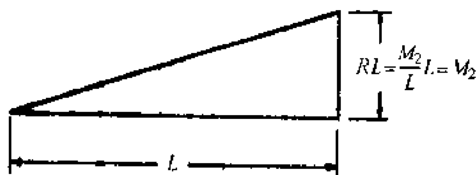


图 9-13

题9.11 如图 9-14 所示简支梁，承受正弦载荷，求该梁的挠曲线及最大挠度。

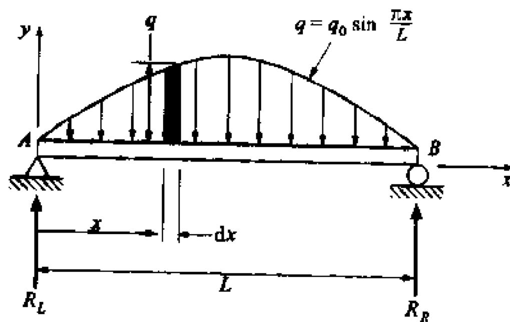


图 9-14

解 ☞ 首先必须确定梁上的总载荷，考虑距 A 端为 x，长度为 $\mathrm{d}x$ 的阴影微元，q 表示单位长度的载荷，则作用于阴影微元上的载荷为 $q\mathrm{d}x$，整个梁上的载荷可由积分求得：

$$载荷=\int_{x=0}^{x=L}q\mathrm{d}x=\int_0^L q_0\sin\frac{\pi x}{L}\mathrm{d}x=\frac{2q_0L}{\pi}$$

由静力学知，每端的约束反力为该载荷的 1/2，即，

$$R_L=R_R=\frac{q_0L}{\pi}$$

x 处的弯矩为该点左侧所有外力的力矩之和。为了确定 x 点左侧正弦载荷的力矩，必须引入另一个积分变量 u，相应的第二个宽度为 $\mathrm{d}u$ 的铅直微元，如图 9-15 所示。让变量由 $u=0$ 到 $u=x$ 变化，从而得到 x 点左侧正弦载荷的弯矩。

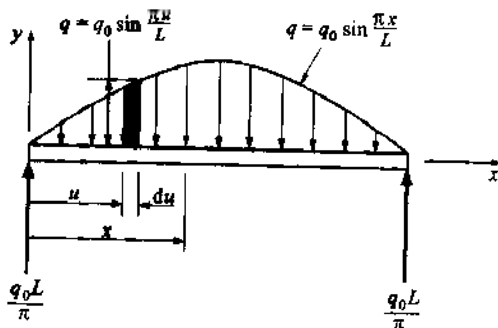


图 9-15

还应考虑左支端约束反力对弯矩的贡献，我们得到

$$M = \frac{q_0 L}{\pi}x - \int_{u=0}^{u=x} q_0\left[\sin\frac{\pi u}{L}\right](\mathrm{d}u)(x-u)$$

$$= \frac{q_0 L}{\pi}x - q_0\int_{u=0}^{u=x} x\sin\frac{\pi u}{L}\mathrm{d}u + q_0\int_{u=0}^{u=x} u\sin\frac{\pi u}{L}\mathrm{d}u \tag{1}$$

在此积分式中，u 为积分变量，x 被(暂时)看作常量，最后一个积分式可用分部积分法计算，考虑到

$$\int\theta(\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \sin\theta - \theta\cos\theta \tag{2}$$

此处 $\theta = \frac{\pi u}{L}$，$\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{L}\mathrm{d}u$

因此(1)式最后一个积分变为

$$\int_{u=0}^{u=x} u\sin\frac{\pi u}{L}\mathrm{d}u = \frac{L^2}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi u}{L} - \frac{\pi u}{L}\cos\frac{\pi u}{L}\right]_{u=0}^{u=x}$$

$$= \frac{L^2}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L}\right] - \frac{Lx}{\pi}\cos\frac{\pi x}{L} \tag{3}$$

因而由(1)式，弯矩为

$$M = \frac{q_0 Lx}{\pi} - q_0 x\left(\frac{L}{\pi}\right)\left[-\cos\frac{\pi u}{L}\right]_{u=0}^{u=x} + \frac{q_0 L^2}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\right]$$

$$= \frac{q_0 L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L} \tag{4}$$

这样，挠曲梁的微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q_0 L^2}{\pi^2}\sin\frac{\pi x}{L} \tag{5}$$

积分一次得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{q_0 L^2}{\pi^2}\left(\frac{L}{\pi}\right)\cos\frac{\pi x}{L} + C_1 \tag{6}$$

由对称性得第一个边界条件，在 $x = L/2$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$。代入(6)式，有 $C_1 = 0$。再积分一次得

$$EIy = -\frac{q_0 L^3}{\pi^3}\left(\frac{L}{\pi}\right)\sin\frac{\pi x}{L} + C_2 \tag{7}$$

第二个边界条件为，在 $x = 0$ 处，$y = 0$。代入(7)式，有 $C_2 = 0$，得梁的挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4}\sin\frac{\pi x}{L} \tag{8}$$

在 $x = L/2$ 处有最大挠度，其值为

$$EIy\mid_{\max} = -\frac{q_0 L^4}{\pi^4}$$

题 9.12　如图 9-16 所示，受集中力 P 作用的简支梁，确定其挠曲线。

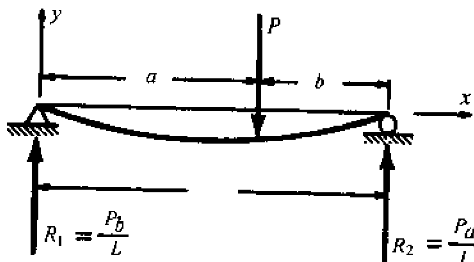


图 9-16

解　☞ 引入图示坐标系 xy，粗线代表挠曲后梁的形状，由静力学知，支座约束反力为 $R_1 = Pb/L$，$R_2 = Pa/L$。

本题与本章中解答过的其它问题相比有一个很大的特点，就是它必须考虑两个不同的弯矩方

程，一个方程适用于力 P 左侧，另一个方程适用于力 P 右侧。对每个方程积分均会产生两个积分常数，这样共有四个待定的积分常数。以前遇到的所有问题仅有两个常数。

在力 P 左侧区段，即 $0<x<a$ 时，弯矩 $M=(Pb/L)x$。这样弯曲梁的微分方程成为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Pb}{L}x,\qquad (0<x<a) \tag{1}$$

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Pb}{L}\frac{x^2}{2}+C_1 \tag{2}$$

在这个区段内任意点的斜率 dy/dx 均属未知，因为力不作用在梁的中点没有理由认为在 $x=L/2$ 处斜率为零。然而在力 P 作用点处，梁的斜率为

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\frac{Pba^2}{2L}+C_1 \tag{3}$$

对(2)式再次积分，有

$$EIy=\frac{Pb}{2L}\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2 \tag{4}$$

在左支座 $x=0$ 处，$y=0$，代入(4)式即得 $C_2=0$，在(4)式中不能运用 $x=L$ 处，$y=0$，这一条件，因为微分方程(1)式不适用于 $a\le x\le l$ 区段。在力 P 作用点处的挠度为

$$(EIy)_{x=a}=\frac{Pba^3}{6L}+C_1a \tag{5}$$

在力 P 右侧区段，弯矩方程为 $M=(Pb/L)x-P(x-a)$，其中 $a<x<L$。因此

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Pb}{L}x-P(x-a)\qquad (a<x<L) \tag{6}$$

对此式积分一次得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Pb}{L}\frac{x^2}{2}-\frac{P(x-a)^2}{2}+C_3 \tag{7}$$

在这个区段内无已知的斜率值，但是在力 P 作用点处的斜率为

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=\frac{Pba^2}{2L}+C_3 \tag{8}$$

在集中力 P 作用点处，由(3)式给出的斜率必须与(8)式给出的斜率相等，因此这两个等式的右端部分必然相等，即

$$\frac{Pba^2}{2L}+C_1=\frac{Pba^2}{2L}+C_3,\quad 即\ C_1=C_3$$

对(7)式再次积分得

$$EIy=\frac{Pb}{2L}\frac{x^3}{3}-\frac{P(x-a)^3}{6}+C_3x+C_4 \tag{9}$$

集中力作用点处的挠度为

$$(EIy)_{x=a}=\frac{Pba^3}{6L}+C_3a+C_4 \tag{10}$$

在 $x=a$ 处，由(5)式给出的挠度必须等于由(10)式给出的挠度。因此这两式的右端必须相等，即

$$\frac{Pba^3}{6L}+C_1a=\frac{Pba^3}{6L}+C_3a+C_4$$

因为前面已有 $C_1=C_3$，故 $C_4=0$。

当 $x=L$ 时，$y=0$，将之代入(9)式，得

$$0=\frac{PbL^2}{6}-\frac{Pb^3}{6}+C_3L,\quad 即\quad C_3=\frac{Pb}{6L}(b^2-L^2)$$

这样四个积分常数均被确定，将这些值代入(4)式和(9)式中，得

$$EIy=\frac{Pb}{6L}[x^3-(L^2-b^2)x]\qquad (0<x<a) \tag{4'}$$

$$EIy=\frac{Pb}{6L}\left[x^3-\frac{L}{b}(x-a)^3-(L^2-b^2)x\right]\qquad (a<x<L) \tag{9'}$$

为了描述全梁的挠度曲线，这两个方程都是必需的，每一个方程仅适用于指定的区段。

如果力 P 作用于梁的中点，由对称性可知最大挠度值发生在 $x=L/2$ 处，可由式(4′)式得到，

即

$$(EIy)_{x=L/2}=\frac{P(L/2)}{6L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3-\left(L^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\frac{L}{2}\right]=-\frac{PL^3}{48}\tag{11}$$

题 9.13　如题 9.12 所述简支梁，长 14 ft，圆形截面的直径为 4 in。钢质材料，$E=30\times10^6$ lbf/in^2，若最大许可挠度为 0.2 in，且 $a=b=7$ ft，求力 P 的最大值。

解　☞ 由题 9.12 的(11)式给出的最大挠度为 $\Delta_{max}=PL^3/48EI$。对于圆截面(见题 7.9)，$I=\pi D^4/64=\pi4^4/64=12.6$ (in^4)，$L=14$ ft$=168$in，因此

$$0.20=\frac{P(168)^3}{48(30\times10^6)(12.6)},\quad 即\quad P=765\text{lbf}$$

由于力作用于梁的中点，故每端约束反力均为 383 lbf，梁中点处的弯矩为 383(7)＝2681 lbf·in，这是梁上的最大弯矩。最大弯曲应力发生在梁中点截面的外层纤维上，最大弯曲应力为 $\sigma=Mc/I$，即 $\sigma_{max}=2681(12)(2)/12.6=5100$ (lbf/in^2)。此值小于材料的比例极限，故挠度方程的运用是合理的。

题 9.14　考虑题 9.12 所述及的简支梁。横截面为 50×100 mm 的矩形，梁为钢质材料，$E=200$ GPa，$P=20$ kN，$a=1$ m，$b=0.5$ m，求梁的最大挠度。

解　☞ 因为 $a>b$，显然最大挠度发生在力 P 的左侧的某点处，该点处的斜率为零。对题 9.12 的(4′)式微分，得该区域的斜率为

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{Pb}{6L}[3x^2-(L^2-b^2)]$$

令上述斜率为零，得挠度最大的点为 $x=\sqrt{(L^2-b^2)/3}$，把此 x 值代入(4′)式，得该点的挠度值

$$EIy_{max}=-\frac{Pb\sqrt{3}}{27L}(L^2-b^2)^{3/2}$$

对于矩形截面 $I=50(100)^3/12=4.167\times10^6$(mm^4)，代入得

$$y_{max}=-\frac{20\times10^3(0.5\times10^3)[(1.5\times10^3)^2-(0.5\times10^3)^2]^{3/2}(\sqrt{3})(10^6)}{27(1.5\times10^3)(4.167\times10^6)(200\times10^9)}$$

$$=-1.46\ (\text{mm})$$

负号表该点处弯曲梁位于 x 轴下方。

由 $\sigma=Mc/I$ 可知，在力 P 作用下最大弯曲应力为 80 MPa，此值小于钢材的比例极限，故上面的挠度方程是有效的。

题 9.15　如图 9-17(a)所示，梁 AC 在 A 端简支，C 端与悬臂梁 CD 铰接，两梁有相同的弯曲刚度 EI，在 B 点作用铅直力 8 kN。求 B 点的挠度。

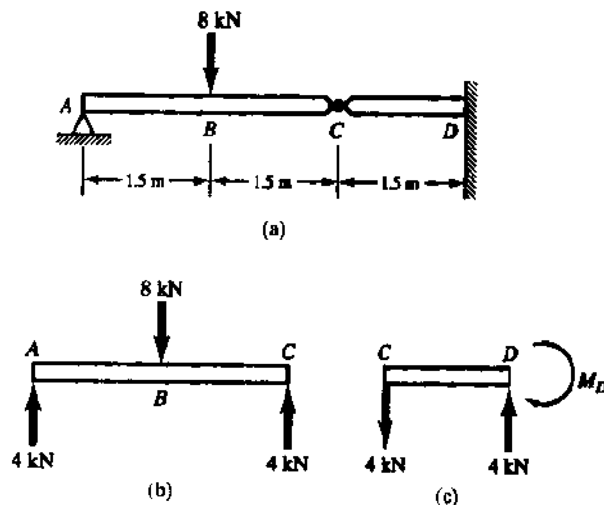


图 9-17

解 ☞ 分别取梁 AC 段和 CD 段的分离体图如图 9-17(b)和 9－17(c)所示。对于 AC，由于对称性，故知 C 点的支反力为 4 kN。又由牛顿定理知，梁 CD 的 C 点处必定有数值相等、方向相反的作用力，如图 9-17(c)所示。

由题 9.2 知，作为 CD 梁自由端的 C 点，其向下的挠度为

$$\Delta_c = \frac{PL^3}{3EI} = \frac{(4\text{kN})(1.5\text{m})^3}{3EI} = \frac{4.5}{EI}$$

该挠度值也表示 AC 梁右端 C 点向下的位移，暂先不考虑由于 8 kN 力引起的 AC 梁的挠曲，由于 AC 梁绕 A 点作刚体旋转，所以由 C 点(AC 段)的位移引起 B 点各下的位移数值为 C 点处位移的 1/2，即 $2.25/EI$。然后考虑由力 8 kN 引起的 B 点的挠度，由题 9.12 可知

$$\frac{PL^3}{48EI} = \frac{(8\text{kN})(3\text{m})}{48EI} = \frac{4.5}{EI}$$

于是，B 点总挠度为

$$\Delta_B = \frac{4.5}{EI} + \frac{2.25}{EI} = \frac{6.75}{EI}(\downarrow)$$

题 9.16 如图 9-18 所示，悬臂梁受均布荷载 w 的作用，同时在自由端作用有集中力 P，求其挠曲线方程。

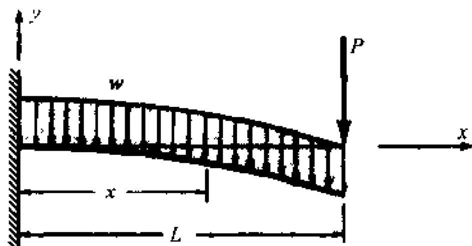


图 9-18

解 ☞ 梁变形后具有粗线所描述的构形，引入如图的坐标系 xy，解本题的逻辑过程是先确定固定端的反力，然后写出弯曲梁的微分方程式，对该方程积分两次，最后根据固支端的斜率和挠度为零确定积分常数。

事实上，在题 9.2 中梁上仅有集中力作用和题 9.5 中仅有均布荷载作用时，这个过程已进行过。仅有集中力作用时，由题 9.2 中的(3)式得挠度 y 为

$$EIy = PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} \tag{1}$$

仅有均布力作用时，由题 9.5 中的(3′)式得挠度 y 为

$$EIy = -\frac{w}{24}(L-x)^4 - \frac{wL^3}{6}x + \frac{wL^4}{24} \tag{2}$$

将以上这两种载荷单独作用的结果叠加，就可以得到它们共同作用的结果，这叫作叠加法，在求解承受组合载荷作用的梁的挠度时，这种方法是非常有用的，如本题所作的那样。实质上，它是利用较简单的梁挠度问题的结果去组成较复杂的问题的结果，它不是确定梁挠度的独立方法。

根据这种方法，受组合载荷作用的梁上，任意点的挠度均可以由每种载荷单独作用时在该点引起的挠度之和求得。因而，组合载荷引起的最终挠度方程可以由叠加每种载荷单独作用时的挠度方程得到：

$$EIy = -PL\frac{x^2}{2} + \frac{Px^3}{6} - \frac{w}{24}(L-x)^4 - \frac{wL^3}{6}x + \frac{wL^4}{24} \tag{3}$$

把(3)式两边对 x 微分可得梁上任意点的斜率 dy/dx。

当每一种单独载荷和由它引起的独立的挠度之间是线性关系时，叠加法是可以使用的。

题 9.17 如图 9-19 所示的铰支外伸梁，受均布载荷 w 的作用，求其挠曲线。

解 ☞ 用作用在长度 L 的中点的均布力合力 wL 代替原均布力，取对右支座的弯矩，有

$$\sum M_r = R_1 b - \frac{wL^2}{2} = 0, \quad 即 \quad R_1 = \frac{wL^2}{2b}$$

对竖直方向上的力求和,得

$$\sum F_y = \frac{wL^2}{2b} + R_2 - wL = 0$$

求得

$$R_2 = wL - \frac{wL^2}{2b}$$

左端外伸部分的弯矩方程为 $M = -wx^2/2, (0 < x < a)$;因此该段弯曲梁的微分方程为

$$EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{-wx^2}{2} \qquad (0 < x < a) \tag{1}$$

积分两次,有

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w}{2}\frac{x^3}{3} + C_1 \tag{2}$$

$$EIy = -\frac{w}{6}\frac{x^4}{4} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

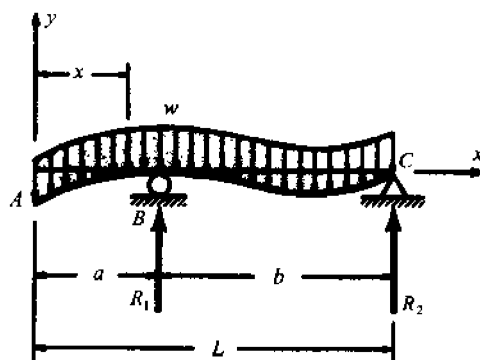


图 9-19

在两支座之间的区段内,弯矩方程为 $M = -wx^2/2 + R_1(x-a)$,该段弯曲梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2} + \frac{wL^2}{2b}(x-a) \qquad (a < x < L) \tag{4}$$

积分两次,有

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w}{2}\frac{x^2}{3} + \frac{wL^2}{2b}\frac{(x-a)^2}{2} + C_3 \tag{5}$$

$$EIy = -\frac{w}{6}\frac{x^4}{4} + \frac{wL^2}{4b}\frac{(x-a)^3}{3} + C_3x + C_4 \tag{6}$$

因为有两个二阶微分方程,即(1)式和(4)式,每一个方程产生两个积分常数,共有四个待定常数(C_1、C_2、C_3 和 C_4),它们的数值可由关于斜率和挠度的已知条件求得。这些已知条件如下:

1. 外伸区段,$x = a$ 时,$y = 0$;
2. 两支座间区段,当 $x = a$ 时,$y = 0$;
3. 两支座间区段,$x = L$ 时,$y = 0$;
4. $x = a$ 时,由(2)式给出的斜率与由(5)式给出的斜率相等;因此 $x = a$ 时,这两式的右端项相等。

将条件 1 代入(3)式,得

$$0 = \frac{-wa^4}{24} + C_1a + C_2 \tag{7}$$

将条件 2 代入(6)式,得

$$0 = \frac{-wa^4}{24} + C_3a + C_4 \tag{8}$$

将条件 3 代入(6)式,得

$$0 = \frac{-wL^4}{24} + \frac{wL^4b^2}{12} + C_3L + C_4 \tag{9}$$

最后,将 $x = a$ 代入等式(2)和(5)式的右端,使左支座处的斜率相等,

$$\frac{wa^3}{6}+C_1=\frac{-wa^3}{6}+C_3 \tag{10}$$

要注意的是，不存在左支座 B 处（$x=a$）斜率等于零的原因。

联立求解四个方程(7)、(8)、(9)、(10)，可以求出四个未知常数 C_1、C_2、C_3、C_4。解答为

$$C_1=C_3=\frac{w(L^4-a^4)}{24b}-\frac{wL^2b}{12} \tag{11}$$

$$C_2=C_4=\frac{wa^4}{24}-\frac{w(L^4-a^4)a}{24b}+\frac{wL^2ab}{12} \tag{12}$$

把这些值代入(3)式和(6)式，可得弯曲梁的两个挠曲线方程，其最终形式可写为

$$EIy=-\frac{wx^4}{24}+\frac{w(L^4-a^4)x}{24b}-\frac{wL^2bx}{12}+\frac{wa^4}{24}-\frac{w(L^4-a^4)a}{24b}+\frac{wL^2ab}{12},\quad (0<x<a) \tag{3'}$$

$$EIy=-\frac{wx^4}{24}+\frac{wL^2(x-a)^3}{12b}+\frac{w(L^4-a^4)x}{24b}-\frac{wL^2bx}{12}+\frac{wa^4}{24}-\frac{w(L^4-a^4)a}{24b}+\frac{wL^2ab}{12},\quad (a<x<L) \tag{6'}$$

由题 9.17 可知，尽管只包括相当简单的几何条件和载荷条件，但是很明显运用双积分法解题是非常枯燥的。通常，这种方法对仅用一个单独方程可以表示全梁挠曲情况时，比较适合，第 10 章将运用奇异函数（见第 6 章）作为一种更简单的方法去求解梁的挠度，它比双积分法更适用于较复杂的载荷和支承条件，而且，奇异函数法非常适宜使用计算机，这将在第 10 章中讲解。

题 9.18 如图 9-20 所示外伸梁，在其两端作用有相等的力 P，求其挠曲线方程。

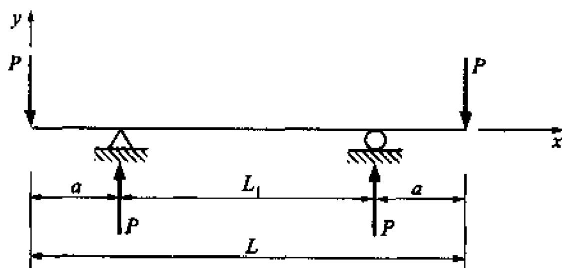


图 9-20

解 ☞ 引入图示坐标系 xy，x 轴与梁的初始位置一致，表示梁左端点与坐标曲线的偏离没有困难。由对称性可知，每一支座只有一个铅直的约束反力 P 作用在梁上。

左端外伸部分的弯矩为

$$M=-Px\qquad(0<x<a)$$

该区段弯曲梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Px\qquad(0<x<a) \tag{1}$$

对该方程积分一次，有

$$EI\frac{dy}{dx}=-P\frac{x^2}{2}+C_1 \tag{2}$$

在此区段内，没有关于斜率 dy/dx 的已知条件，要特别指出，没有支承点 $x=a$ 处斜率等于零的理由，可将该处的斜率记作

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}=-P\left(\frac{a^2}{2}\right)+C_1 \tag{3}$$

再积分一次，有

$$EIy=-\frac{P}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right)+C_1x+C_2 \tag{4}$$

由于梁在支座处是铰支的，故挠度 y 应为零，即 $(y)_{x=a}=0$。将 $x=a$ 时，$y=0$ 的条件代入(4)式，有

$$0 = \frac{Pa^3}{6} + C_1 a + C_2 \tag{5}$$

在两支座间的中央区段,梁的弯矩为 $M = -Pa$,该区段弯曲梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -Pa \qquad (a < x < (L-a)) \tag{6}$$

积分上式,得

$$EI\frac{dy}{dx} = -Pax + C_3 \tag{7}$$

由载荷与几何的对称性可知,在梁的中点处斜率 dy/dx 为零,即 $(dy/dx)_{x=L/2} = 0$,将这些值代入(7)式,有

$$0 = -Pa\left(\frac{L}{2}\right) + C_3, \qquad 即\ C_3 = \frac{PaL}{2} \tag{8}$$

此外,由(7)式还可得到左支座 $x = a$ 处梁的斜率,将 $x = a$ 代入(7)式得

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a} = -Pa^2 + \frac{PaL}{2} \tag{9}$$

无论考虑哪个方程,弯曲梁在该点有相同的斜率,因此由上式给出的斜率 dy/dx 与由(3)式给出的斜率应相等。令(3)和(9)两式的右端相等得

$$-\frac{Pa^2}{2} + C_1 = -Pa^2 + \frac{PaL}{2} \tag{10}$$

得

$$C_1 = \frac{-Pa^2}{2} + \frac{PaL}{2} \tag{11}$$

将 C_1 值代入(5)式,得

$$0 = -\frac{Pa^3}{6} - \frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2L}{2} + C_2 \tag{12}$$

解得

$$C_2 = \frac{2Pa^3}{3} - \frac{Pa^2L}{2}$$

对(7)式再积分一次得

$$EIy = -Pa\frac{x^2}{2} + \frac{PaL}{2}x + C_4 \tag{13}$$

再令左支座 $x = a$ 处挠度为零尽管在求(5)式时用过这个条件,但还可以再使用。事实上,为了求得(13)式中的常数 C_4 必须运用这一条件。因此,把 $(y)_{x=a} = 0$ 代入(13)式,得

$$0 = -\frac{Pa^3}{2} + \frac{Pa^2L}{2} + C_4, \qquad 即\quad C_4 = \frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2} \tag{14}$$

要确定此梁左区段和中间区段的弯矩必须要有两个方程,每个方程均是与弯曲梁的二阶微分方程结合应用;这样求解每一个方程时均会产生两个积分常数。运用关于斜率和挠度的四个条件就可确定这四个常数,这些条件如下:

(a) 梁的外伸部分,$x = a$ 处,$y = 0$;

(b) 梁的中间部分,$x = a$ 处,$y = 0$;

(c) 梁的中间部分,$x = L/2$ 处,$dy/dx = 0$;

(d) $x = a$ 处,支座两侧的挠曲线斜率 dy/dx 相等。

最后,弯曲梁的方程可写为下列形式:

$$EIy = -\frac{Px^3}{6} - \frac{Pa^2x}{2} + \frac{PaLx}{2} + \frac{2Pa^3}{3} - \frac{Pa^2L}{2} \qquad (0 < x < a) \tag{15}$$

$$EIy = -\frac{Pax^2}{2} + \frac{PaLx}{2} + \frac{Pa^3}{2} - \frac{Pa^2L}{2} \qquad (a < x < (L-a)) \tag{16}$$

由于对称性,不再写出右端外伸部分的挠曲线方程。

题 9.19 题 9.18 中的外伸梁,每个力 P 为 4000 lbf,距离 $a = 3$ ft,长度 $L = 16$ ft。梁为钢材的,$E = 30\times10^6$ lbf/in²,圆截面的直径为 4 in。求每个力作用点处和梁中央处的挠度。

解 ☞ 根据题 7.9 可知,惯性矩 $I = \pi(4)^4/64 = 12.6(\text{in}^4)$。而且有 $a = 3\text{ft} = 36\text{in}$, $L = 16$ ft =

192in。左侧外伸部分任意点处的挠度由题 9.18 中的(15)式给出，在集中力 P 作用处有 $x=0$，将这些数值代入(15)式得

$$(30\times10^6)(12.6)(y)_{x=0}=\frac{2(4000)(36)^3}{3}-\frac{4000(36)^2(192)}{2}$$

解得

$$(y)_{x=0}=\quad 0.96\text{ in}$$

支座间的中间区段上任意点处的挠度由题 9.18 的(16)式给出。在梁中心 $x=8\text{ ft}=96\text{ in}$，以及前面的数据 $a=36\text{ in}$，$L=192\text{ in}$，$P=4000\text{ lbf}$ 均代入(16)式，得

$$(30\times10^6)(12.6)(y)_{x=8}=\frac{-4000(36)(96)^2}{2}+\frac{(4000)(36)(192)(96)}{2}+\frac{4000(36)^3}{2}-\frac{4000(36)^2(192)}{2}$$

解得

$$(y)_{x=8}=0.96\text{ in}$$

由于在支座间区段上，弯矩为常值 4000(3) = 12000 lbf·ft，故最大弯曲应力发生在此区段任意位置处梁的外层纤维上。最大应力值为

$$\sigma=\frac{Mc}{I}=\frac{(12000)(12)(2)}{12.6}=22800(\text{lbf/in}^2)$$

此值小于材料的比例极限。

题 9.20 如图 9-21(a)所示悬梁位于水平面，其俯视图为三角形，如图 9-21(b)所示，侧视图如 9-21(c)，厚度 h 为常数，比重为 γ(单位体积内重量)。试求自重作用下的挠曲线及自由端的挠度。

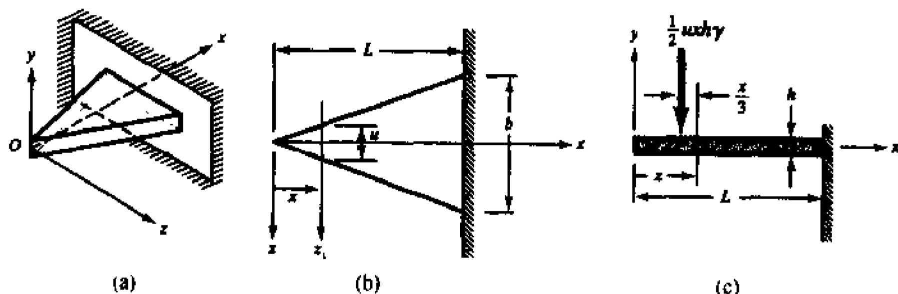


图 9-21

解 ☞ 引入坐标系 xyz，原点在梁的尖端 O 点，任意 x 处截面的宽度为 u，如图 9-21(b)所示，分别用 L 和 b 表示梁的总长度和基础(固定端)的宽度。由几何形状可知

$$u=b\left(\frac{x}{L}\right)$$

x 左侧三角形梁的重力产生截面 x 处的弯矩，此重力数值为 $uxh\gamma/2$，重力合力作用在距截面 x 为 $x/3$ 处，如图 9-21(c)所示，因此由于 x 左侧部分材料的自重在 x 处产生的弯矩为

$$M=-\frac{uxh\gamma}{2}\cdot\frac{x}{3}=-\frac{x^2h\gamma}{6}\left(\frac{bx}{L}\right)=-\frac{bh\gamma x^3}{6L}\tag{1}$$

因此弯曲梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{bh\gamma x^3}{6L}\tag{2}$$

式中 I 是 x 的函数，横截面 x 处的 I(关于平行 z 轴的轴 z_1)为

$$I=\frac{1}{12}uh^3=\frac{1}{12}b\left(\frac{x}{L}\right)h^3$$

梁的微分方程为

$$E\left[\frac{1}{12}b\left(\frac{x}{L}\right)h^3\right]\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{bh\gamma x^3}{6L}\tag{3}$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{2\gamma}{Eh^2}\right)x^2 \tag{4}$$

积分一次，有

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{2\gamma}{Eh^2}\right)\frac{x^3}{3} + C_1 \tag{5}$$

在 $x = L$ 处，$dy/dx = 0$，代入式(5)，得

$$0 = -\frac{2\gamma L^3}{3Eh^2} + C_1, \qquad 解得 \quad C_1 = \frac{2\gamma L^3}{3Eh^2}$$

再积分一次，有

$$y = -\frac{2\gamma}{3Eh^2}\frac{L^4}{4} + \frac{2\gamma L^4}{3Eh^2}x + C_2 \tag{6}$$

第二个边界条件为 $x = L$ 处，$y = 0$，因此由(6)式得

$$0 = -\frac{2\gamma}{3Eh^2}\frac{L^4}{4} + \frac{2\gamma L^4}{3Eh^2} + C_2, \quad 解得 \ C_2 = -\frac{\gamma L^4}{2Eh^2}$$

这样，挠曲梁方程为

$$y = -\frac{\gamma}{6Eh^2}x^4 + \frac{2\gamma L^3}{3Eh^2}x - \frac{\gamma L^4}{2Eh^2}$$

尖端处的挠度为

$$(y)_{x=0} = -\frac{\gamma L^4}{2Eh^2}$$

题 9.21　长度为 L 的截圆锥状的悬臂梁，细端直径为 d，粗端直径为 $2d$，如图 9-22 所示。梁只受自重作用，比重为 γ。求自由端的挠度。

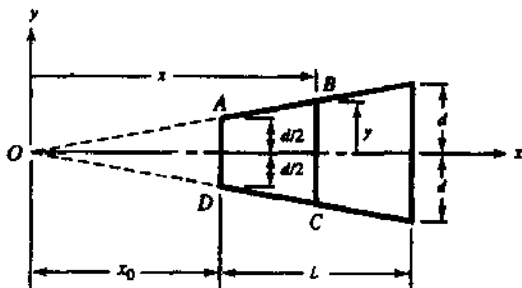


图 9-22

解　☞ 根据几何学，延长锥面使之相交于距离左端为 x_0 的 O 点，由相似三角形可知

$$\frac{d}{x_0} = \frac{2d}{x_0 + L}$$

由此式得出 $x_0 = L$，且

$$\frac{y}{x} = \frac{d}{2L}$$

因此

$$y = \left(\frac{d}{2L}\right)x$$

距离 O 点为 x 的圆截面的惯性矩为

$$I = \frac{\pi y^4}{4} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d^4}{16L^4}\right)x^4$$

实体区域 $ABCD$ 的重力对于 x 截面产生的力矩，可由完整锥体 $OBCO$ 的重力关于 x 的力矩减去锥体 $OADO$ 的重力关于同一截面的力矩求得。把这一力矩作为 x 处的弯矩，利用题 9.1 中的(5)式即可得挠曲梁的微分方程。一个完整锥体的体积为(底面积)(高度)/3，锥体的质心在底面以上 1/4 高度处。对于弯曲梁的方程，有

$$E\left\{\frac{\pi d^4}{64L^4}x^4\right\}\frac{d^2y}{dx^2} = -\left\{\frac{1}{3}\pi y^2 x\gamma\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{3}\gamma\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 L\left(x - \frac{3}{4}L\right)\right\} \tag{1}$$

将上式化简，有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{16L^4\gamma\pi}{3\pi d^4E}\left\{-\frac{d^2}{4L^2}+\frac{Ld^2}{x^3}-\frac{3L^2d^2}{4x^4}\right\} \tag{2}$$

积分一次得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{16L^4\gamma}{3d^4E}\left\{-\frac{d^2}{4L^2}x+Ld^2\left(-\frac{1}{2x^2}\right)-\frac{3L^2d^2}{4}\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\right\}+C_1 \tag{3}$$

第一个边界条件，$x=2L$ 处，$dy/dx=0$，将之代入(3)式，得

$$C_1=\frac{19L^3\gamma}{6d^2E}$$

再积分一次，得

$$y=\frac{16L^4\gamma}{3d^4E}\left\{-\frac{d^2}{4L^2}\frac{x^2}{2}-\frac{Ld^2}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{L^2d^2}{4}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right\}+\frac{19L^3\gamma}{6d^2E}x+C_2 \tag{4}$$

第二个边界条件，在 $x=2L$ 处，$y=0$，由(4)式，有

$$C_2=-\frac{29}{6}\frac{L^4\gamma}{d^2E}$$

因此梁的挠曲线方程为

$$y=\frac{16L^4\gamma}{3d^4E}\left\{-\frac{d^2}{8L^2}x^2+\frac{Ld^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{L^2d^2}{8}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right\}+\frac{19L^3\gamma}{6d^2E}x-\frac{29L^4\gamma}{6d^2E} \tag{5}$$

在(5)式中令 $x=L$，得自由端的挠度为

$$y\big|_{x=L}=-\frac{\gamma L^4}{3d^2E}$$

题 9.22 如图 9-23 所示，矩形变截面简支梁，两端各作用等值的力偶 PL，且对称地作用横向力 $1.5P$，梁厚度 h 为常数。若欲使梁的外层纤维拉应力和压应力均为 σ_0 时，求梁宽的变化规律，并求梁中点处的挠度值。

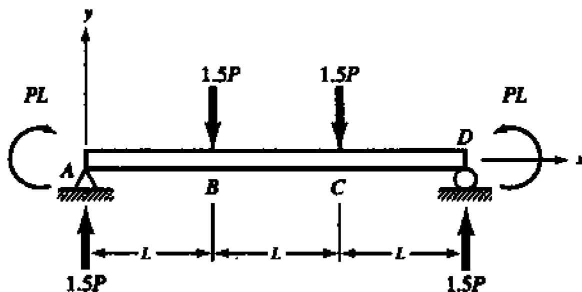


图 9-23

解 ☞ 由静力学很容易求得两端约束反力均为 $1.5P$，如图示。根据第 6 章的方法，力和端部力偶作用时的弯矩图分别如图 9-24(a)和 9-24(b)所示，将这两图叠加得合弯矩图如图 9-24(c)所示。

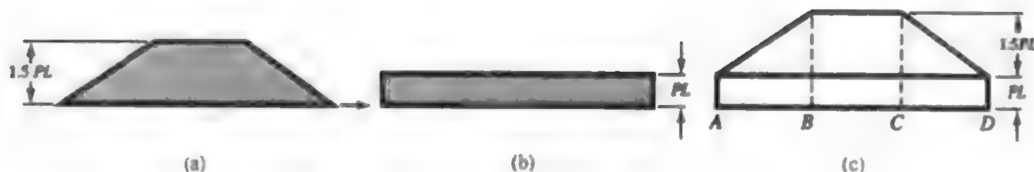


图 9-24

应用题 8.1 和题 8.12 的结果，对于矩形截面，AB 段和 BC 段外层纤维的弯曲应力为

$$\sigma_x=\frac{Mc}{I}=\frac{M}{I/c}=\frac{M}{Z}=\frac{6M}{bh^2} \tag{1}$$

式中，对于矩形截面梁，有

$$Z = \frac{bh^2}{6} \tag{2}$$

图 9-24(c)连同(1)式表明，在 BC 段(因为弯矩为常数)梁的宽度一定为常数，该区段内横截面承受的最大弯矩值为 $2.5PL$，外层纤维的弯曲应力为

$$\sigma_0 = \frac{6(2.5PL)}{b_{\max}h^2} \tag{3}$$

由此可解出 BC 段内梁的最大宽度为

$$b_{\max} = \frac{15PL}{\sigma_0 h^2} \tag{4}$$

在 AB 段，由图 9-24(c)知弯矩为

$$M = PL + 1.5PL\left(\frac{x}{L}\right) \qquad (0 < x < L) \tag{5}$$

此处 x 从 A 支座向右方测量时为正，由于在 A 处 $x=0$，故该处梁的宽度必须能足以承受弯矩 PL。这样，在 $x=0$ 处，令外层纤维的弯曲应力为 σ_0，即

$$\sigma_0 = \frac{6M}{b_{\min}h^2} = \frac{6PL}{b_{\min}h^2}$$

可解出

$$b_{\min} = \frac{6PL}{\sigma_0 h^2} \tag{6}$$

由对称性知，在右端 $x=3L$ 处宽度也为 $b_{\min}$。由(5)式看出，在 A 与 B 之间弯矩线性变化，故从 A 到 B 梁的宽度应线性增大。因此，外层纤维弯曲应力为常数的梁如图 9-25 所示。

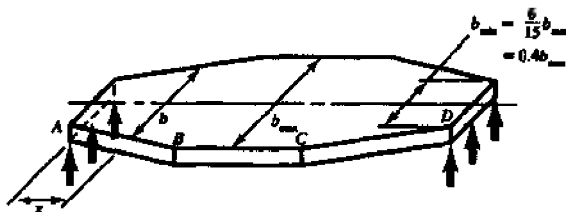


图 9-25

由对称性可知，最大挠度值发生在 BC 段的中点处，即 $x=3L/2$，为了求得此最大挠度值，写出 AB 和 BC 区段的弯曲微分方程。由于载荷和支承情况均为对称的，故 CD 区段与 AB 区段的行为是相同的，不再考虑 CD 区段。首先，

在 AB 段：

$$M = 1.5Px + PL$$

并且

$$\sigma_0 = \frac{Mc}{I} = \frac{(PL + 1.5Px)(h/2)}{bh^3/12} \tag{7}$$

可解出

$$b = \frac{6(PL + 1.5Px)}{\sigma_0 h^2} \tag{8}$$

其中，b 表示与 A 相距 x 处梁的宽度，如图 9-25 所示。横截面的惯性矩为

$$\frac{1}{12}\left[\frac{6(PL + 1.5Px)}{\sigma_0 h^2}\right]h^3 \tag{9}$$

AB 段梁的挠曲线微分方程为

$$E\left[\frac{(PL + 1.5Px)h}{2\sigma_0}\right]\frac{d^2y}{dx^2} = 1.5Px + PL \tag{10}$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\sigma_0}{Eh} = \text{const.} \tag{11}$$

积分得

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{2\sigma_0}{Eh}\right)x+C_1 \tag{12}$$

再积分一次,得

$$y=\frac{2\sigma_0}{Eh}\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2 \tag{13}$$

边界条件为在 $x=0$ 处,$y=0$;由(13)式得 $C_2=0$。此外,在 $x=L$ 处,由(13)式得挠度值,有

$$y\big|_{x=L}=\frac{2\sigma_0}{Eh}\cdot\frac{L^2}{2}+C_1L \tag{14}$$

由(12)式可知,$x=L$ 处的斜率为

$$\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=L}=\frac{2\sigma_0L}{Eh}+C_1 \tag{15}$$

在 BC 段,$M=2.5PL$,由于 BC 段的宽度 b_{max} 为常数,BC 段任意截面的惯性矩为

$$\frac{1}{12}b_{max}h^3 \tag{16}$$

故 BC 段梁的挠曲线微分方程为

$$E\left[\frac{b_{max}h^3}{12}\right]\frac{d^2y}{dx^2}=2.5PL \tag{17}$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{30PL}{Eb_{max}h^3}=\text{const}. \tag{18}$$

积分一次得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{30PLx}{Eb_{max}h^3}+C_3 \tag{19}$$

作为边界条件,由对称性知,$x=3L/2$ 处,$dy/dx=0$,因此由(19)式得

$$C_3=-\frac{45PL^2}{Eb_{max}h^3}$$

再积分一次,得

$$y=\left(\frac{30PL}{Eb_{max}h^3}\right)\frac{x^2}{2}-\left(\frac{45PL^2}{Eb_{max}h^3}\right)x+C_4 \tag{20}$$

在 $x=L$ 处,挠度值由(14)式和(20)式给出,故得

$$\frac{2\sigma_0L^2}{Eh}+C_1L=-\frac{30PL^3}{Eb_{max}h^3}-C_4 \tag{21}$$

最后,令由(15)式和(19)式给出的 $x=L$ 处的斜率相等,得

$$\frac{2\sigma_0L}{2Eh}+C_1=\frac{30PL^2}{Eb_{max}h^3}-\frac{45PL^2}{Eb_{max}h^3} \tag{22}$$

联立求解(21)和(22)式,得

$$C_1=-\frac{45PL^2}{Eb_{max}h^2}\quad 和 \quad C_4=0$$

因此,在 BC 区段,由(20)式得

$$y_{max}\big|_{x=3L/2}=-\frac{33.75PL^3}{Eb_{max}h^3}$$

题 9.23 考虑一悬臂梁,当它挠曲时与一刚性圆柱表面保持接触。该梁在 A 点处的切线是水平的,如图 9-26 所示。求在力 P 作用下自由端 B 的挠度。

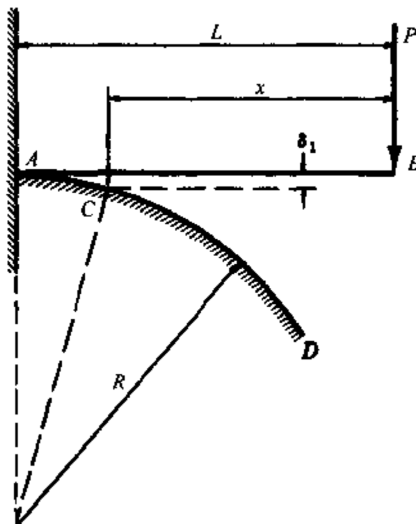


图 9-26

解 ☞ 如果在 A 点悬臂梁的曲率小于刚性圆柱面的曲率,则悬臂梁仅在 A 点接触圆柱表面,且挠度可由题 9.2 准确求得。由题 9.1 可知,在 A 点处,梁的曲率为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI}=\frac{PL}{EI}$$

此曲率一定小于刚性圆柱表面的曲率 $1/R$。

然而，如果 $1/R = PL/EI$，那么梁就与 A 点右侧的圆柱表面接触。我们用 P^* 表示由 $P^* = EI/RL$ 给出的力的极限值。对于 $P > P^*$，梁的某区段 AC 将与圆柱表面接触，且 C 点处刚性表面的曲率 $1/R$ 等于梁的曲率，即 $Px/EI = 1/R$，由此求得 $x = EI/PR$。

于是，自由端 B 的挠度可由下列各项之和求得

1. 从 A 点的切线到 C 点的挠度，图中用 δ_1 表示。可由下列关系式求得

$$(R + \delta_1)^2 = R^2 + (L - x)^2$$

近似地，

$$\delta_1 = \frac{(L - x)^2}{2R}$$

2. 把长度为 x 的那部分梁，看作一简单悬臂梁，其挠度为

$$\delta_2 = \frac{Px^3}{3EI} = \frac{(EI)^2}{3P^2R^3}$$

3. 绕 C 点旋转产生的挠度，为

$$\delta_3 = \frac{x(L - x)}{R} = \frac{EI}{PR^2}\left(L - \frac{EI}{PR}\right)$$

这样，所求自由端的挠度，为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \frac{L^3}{2R} - \frac{(EI)^2}{6P^2R^3}$$

题 9.24　一恒温器由同厚度、不同材料的两个条块组成，并在交接面粘结在一起，通常这种构件采用悬臂梁的计算模型，如图 9-27 所示。若用 E_1 和 E_2 表示两种材料的杨氏模量，α_1 和 α_2 表示两种材料的线膨胀系数，每种材料的厚度均为 h。求由于温度升高 T 后悬臂梁端部的挠度。

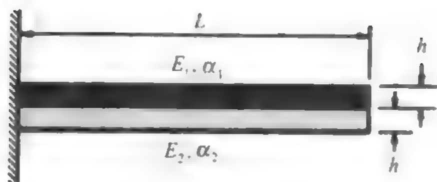


图 9-27



图 9-28

解　☞ 令 b 表示构件的宽度。按照题 8.1，假设变形前的平截面变形后仍保持平面。由于沿梁长没有外力作用，所以作用在每一条块横截面上的法向合力 F 的数值必须相等。这样，图 9-28 可以代表沿梁长任意横截面分离体的简图。

上部条块下层纤维的法向应变可由下列各项之和求得：(a) 由法向力引起的应变 F/E_1bh；(b) 由于弯曲引起的应变，由题 8.1 知此项应变为 $M_A(h/2)/E_1I$；(c) 由于温度升高引起的应变，其大小如第 1 章提到的为 $\alpha_1 T$，这些应变之和一定等于下部条块上层纤维的应变，所以有

$$\frac{F}{E_1bh} + \frac{M_A(h/2)}{E_1I} + \alpha_1 T = \frac{-F}{E_2bh} - \frac{M_B(h/2)}{E_2I} + \alpha_2 T \tag{1}$$

而且，接触面的曲率也一定相等，故由题 9.1，可知两条块曲率各为

$$\frac{1}{R_1} = \frac{M_A}{E_1I} \quad 和 \quad \frac{1}{R_2} = \frac{M_B}{E_2I} \tag{2}$$

因为 $R_1 = R_2$，有

$$M_A = \left(\frac{E_1}{E_2}\right)M_B \tag{3}$$

由静力学，显然应有

$$M_A + M_B = Fh \tag{4}$$

由此解得

$$M_B = \frac{Fh}{1 + (E_1/E_2)}, \qquad M_A = \frac{Fh}{1 + (E_2/E_1)} \tag{5}$$

将(5)式代入(1)式，得

$$F = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)TbhE_1E_2(E_1 + E_2)}{E_1^2 + E_2^2 + 14E_1E_2} \tag{6}$$

由(5)式得

$$M_A = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)Tbh^2E_1^2E_2}{E_1^2 + E_2^2 + 14E_1E_2} \tag{7}$$

现在可以运用题 9.23 所得到圆柱表面一点的挠度 δ 的结果(根据题 9.1 知,纯弯曲时构件弯曲成一段圆弧,故圆柱面代表分界面),构件端部的挠度 δ 可表示为

$$\delta = \frac{L^2}{2R} \tag{8}$$

将(2)式代入得

$$\delta = \frac{M_AL^2}{2E_1I}$$

然后由(7)式,得

$$\delta = \frac{6(\alpha_2 - \alpha_1)TE_1E_2L^2}{h(E_1^2 + E_2^2 + 14E_1E_2)}$$

题 9.25 一有微小初始曲率的梁,其初始构形可由关系式 $y_0 = Kx^3$ 描述,梁在原点处刚性固支,并且在末端受一集中力作用,如图 9-29 所示。随着力 P 逐渐增大,梁将向下挠曲且固定端附近的部分区段将与刚性水平面接触。求梁与水平面接触区段的长度,以及水平面到梁末端的垂直距离。

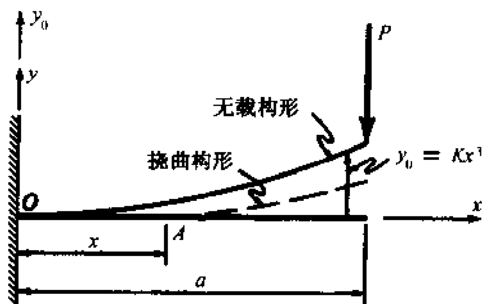


图 9-29

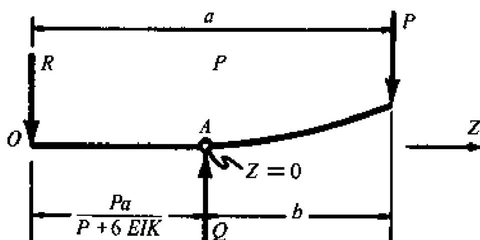


图 9-30

解 ☞ 梁的初始曲率可由表达式 $y_0 = Kx^3$ 确定,从而使支座附近部分区段梁由弯变直的弯矩很容易求得为 $EI(\mathrm{d}^2y_0/\mathrm{d}x^2) = 6EIKx$,其中 x 是与水平面接触的区段长度。若令此弯矩等于作用力对于接触点的力矩,即 $P(a-x)$,有

$$6EIKx = P(a - x), \quad 得\ x = \frac{Pa}{P + 6EIK}$$

因为此梁被认为是无重量的,所以在固定端 O 和接触末端点 A 之间梁与刚性水平面间无法向力,梁在 O 和 A 之间是平的,因此挠曲后梁的分离体简图如图 9-30 所示。静力学方程即关于 A 点的力矩平衡方程表明固支端有一个数值等于 $6EIK$ 的向下集中力。为保持铅直向平衡,在接触区的端点 A 有集中反力作用在梁上。

现在,求 A 点右侧部分的挠曲线方程。题 9.1,(5)式表明,对于初始直梁弯矩 M 与曲率 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ 成正比,然而本题中由于梁初始时不是直的,所以必须修正题 9.1(5)式为弯矩 M 与曲率的变化成正比。A 点右侧部分梁的欧拉-伯努利方程为

$$EI\left(\frac{\mathrm{d}^2y_0}{\mathrm{d}x^2} - \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\right) = P(b - z)$$

式中引入一个新坐标 z,这个坐标沿 x 轴方向但原点在 A 点。指出如下一点是很重要的,随着梁的挠曲,曲率由原始值不断减少;因此等式左端括号内的数值是正的,因而右端必须写作正的。这一点与以前的符号规则,即向下的力产生负弯矩并不矛盾,因为以前的规则是适用于直梁的。如果代入 $EI(\mathrm{d}^2y_0/\mathrm{d}x^2) = 6EIKx$,则上式变为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2} = 6EIK\left[\frac{Pa}{P + 6EIK} + z\right] - Pb + Pz$$

积分两边并引入边界条件：在 $x=0$ 处，$y=\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，可得所要求的挠度为

$$EIy\Big|_{x=b}=\frac{36(EIKa)^3}{(P+6EIK)^2}$$

题 9.26　如图 9-31 所示梁 ABC。AB 段的弯曲刚度为 $3EI$，BC 段的弯曲刚度为 EI，梁在 A 处铰支，B 处为滚动支座，自由端受弯矩 M_0 作用。求 C 点的铅直挠度。

解　☞ 引入图示坐标系 xy，其中 x 表示 AB 或 BC 段内的横截面。首先必须由静力学确定约束反力

$$\sum M_B=-M_0+R_AL=0,\qquad R_A=M_0/L(\downarrow)$$

$$\sum F_y=-R_A+R_B=0,\qquad R_B=M_0/L(\downarrow)$$

AB 段挠曲梁的微分方程为

$$3EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-R_Ax\qquad(0<x<L)$$

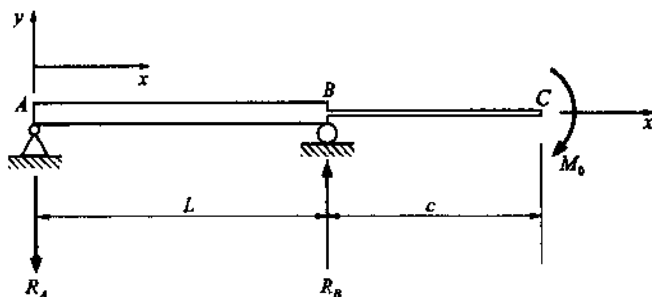


图 9-31

积分一次，得

$$3EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-R_A\frac{x^2}{2}+C_1\tag{1}$$

再积分

$$3EIy=-\frac{R_A}{2}\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2\tag{2}$$

第一个边界条件：$x=0$ 处，$y=0$。代入(2)式，有 $C_2=0$

第二个边界条件：$x=L$ 处，$y=0$。并运用 $R_A=M_0/L$ 有

$$0=-\frac{M_0}{L}\frac{L^3}{6}+C_1L+C_2$$

因此

$$C_1=\frac{M_0L}{6}$$

然后，写出 BC 段挠曲梁的微分方程：

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-R_Ax+R_B(x-L)\qquad((L<x<(L+C))$$

$$=-\frac{M_0x}{L}+\frac{M_0x}{L}-R_BL$$

$$=-M_0$$

此结果也可以通过 BC 段任意截面“x”右侧的作用力取矩得到。积分上式，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-M_0x+C_3\tag{3}$$

再积分一次得

$$EIy=-M_0\cdot\frac{x^2}{2}+C_3x+C_4\tag{4}$$

第三个边界条件：(4)式中 $x=L$ 处，$y=0$。由(4)式，有

$$0=-\frac{M_0L^2}{2}+C_3L+C_4\tag{5}$$

第四边界条件：$x=L$ 处由(1)式和(3)式给出的斜率 dy/dx 必须相等，由此得

$$\frac{1}{3EI}\left[\frac{R_AL^2}{2}+\frac{M_0L}{6}\right]=\frac{1}{EI}[-M_0L+C_3] \tag{6}$$

解(6)式，得 C_3，解(5)式，得 C_4，有

$$C_3=8M_0L/9,\qquad C_4=-7M_0L^2/18$$

因此，梁的挠曲线方程为

$$3EIy=-\frac{M_0}{6L}x^3+\frac{M_0L}{6}x\qquad(0<x<L) \tag{7}$$

$$EIy=-\frac{M_0}{2}x^2+\frac{8}{9}M_0Lx-\frac{7}{18}M_0L^2\qquad(L<X<(L+c)) \tag{8}$$

当 $x-(L+c)$ 时，可由(8)式得到待求的 C 端挠度：

$$[y]_{x=L+c}=\frac{M_0}{EI}\left[\frac{(L+c)^2}{2}+\frac{8}{9}L(L+c)-\frac{7}{18}L^2\right]=-\frac{M_0c}{EI}\left(\frac{L}{9}+\frac{c}{2}\right) \tag{9}$$

9.10 习　题

题 9.27　一悬臂梁载荷如题 9.2 所示，由钛合金做成，$E=105$ GPa 载荷 P 为 20 kN，长度 $L=4$ m。梁横截面的惯性矩为 104×10^6 mm^4。求梁的最大挠度值。(答案：-39 mm)

题 9.28　考虑载荷如题 9.2 所示的简支梁。梁长为 20 ft，$a=15$ ft，载荷 $P=1000$ lbf，惯性矩 $I=150$ in^4。确定梁中点处的挠度。取 $E=30\times10^6$ lbf/in^2。(答案：-0.044 in)

题 9.29　参考图 9-32，试求受图示力偶 M_1 单独作用时悬臂梁任意点处的挠度。(答案：$EIy=-M_1x^2/2$)。

题 9.30　题 9.29 中所述的悬臂梁的截面是直径 5 in 的圆形截面，长度为 10 ft；杨氏模量 $E=30\times10^6$ lbf/in^2，作用力偶矩 5000 lbf·ft。求梁的最大挠度。(答案：-0.469 in)

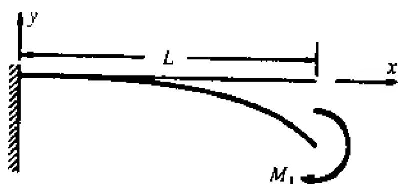


图 9-32

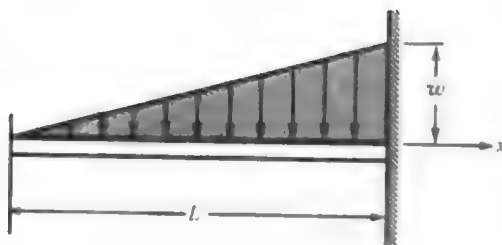


图 9-33

题 9.31　参考图 9-33。悬臂梁受图示均匀变化的分布载荷作用。求其挠曲线方程。

(答案：$EIy=-\frac{wx^5}{120L}+\frac{wL^3x}{24}-\frac{wL^4}{30}$)

题 9.32　悬臂梁受正弦分布载荷作用，如图 9-34 所示。求梁自由端的挠度值。

(答案：$EIy|_{x=0}=-0.07385q_0L^4$)

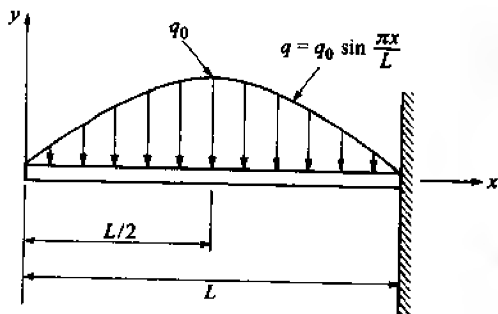


图 9-34



图 9-35

题 9.33　悬臂梁受图 9-35 所示抛物线分布载荷作用。试求挠曲线方程及其自由端的挠度。

(答案：$EIy=-\frac{16}{945}\frac{w_0}{L^{1/2}}x^{9/2}+\frac{8}{105}w_0L^3x-\frac{56}{945}w_0L^4,\quad y|_{x=0}=-\frac{56}{945}w_0L^4$)

题 9.34　如图 9-33 所示,悬臂梁的横截面为 50 mm×75 mm 的矩形,长度为 1 m,且为铝材,$E = 65$ GPa。若最大挠度不超过 5 mm,最大应力不超过 50 MPa,求最大许可载荷集度。(答案:$w = 14.1$ kN/m)

题 9.35　参考图 9-36,简支梁承受均匀变化的分布载荷。试求其挠曲线方程。

(答案:$EIy = \frac{wL}{2}\left(-\frac{x^5}{60L^2} + \frac{x^3}{18} - \frac{7L^2x}{180}\right)$)

题 9.36　求图 9-37 所示受集中力 P 作用悬臂梁的挠曲线方程。(答案:$EIy = -\frac{P}{6}(a-x)^3 - \frac{Pa^2}{2}x + \frac{Pa^3}{6}$ $(0<x<a)$, $EIy = -\frac{Pa^2}{2}x + \frac{Pa^3}{6}$ $(a<x<L)$)

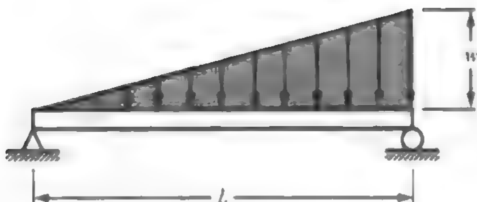


图 9-36

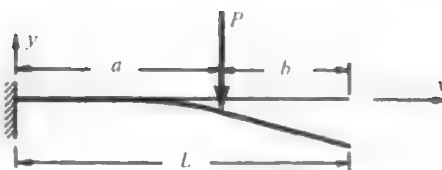


图 9-37

题 9.37　对图 9-37 所示的悬臂梁,取 $P = 5$ kN, $a = 2$ m, $b = 1$ m,杨氏模量 $E = 200$ GPa,梁截面为边长为 150 mm 的等边三角形(关于竖直轴对称)。求梁的最大挠度。(答案:−12.8 mm)

题 9.38　悬臂梁如图 9-38 所示,在右半部分 BC 区段受均布荷载 w 的作用。求挠曲线方程。(答案:$EIy = \frac{wLx^3}{12} - \frac{3wL^2x^3}{16}$ $\left(0<x<\frac{L}{2}\right)$, $EIy = -\frac{w(L-x)^4}{24} - \frac{7wL^3x}{48} + \frac{15wL^4}{384}$ $\left(\frac{L}{2}<x<L\right)$, $\Delta_{max} = \frac{41}{384}\left(\frac{wL^4}{EI}\right)$)

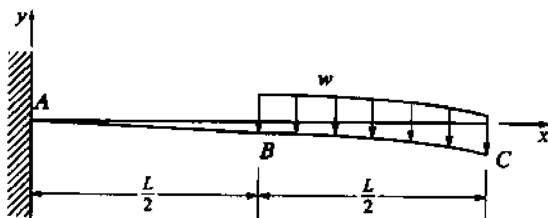


图 9-38

题 9.39　简支外伸梁,受均布载荷 w 的作用,如图 9-39 所示。求梁的挠曲线方程。(在支座水平位置处选取坐标轴)(答案:

$$EIy = -\frac{wx^4}{12} + \frac{wL^3x}{48} - \frac{wLx}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right) + \frac{wa^4}{24} - \frac{waL^3}{48} + \frac{wLa}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 \quad (0 < x < a)$$

$$EIy = -\frac{wx^4}{24} + \frac{wL(x-a)^2}{12} + \frac{wL^3x}{48} - \frac{wLx}{48}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 + \frac{wa^4}{24} - \frac{waL^3}{48} + \frac{wLa}{4}\left(\frac{L}{2} - a\right)^2 \quad (a < x < (a+b))$$

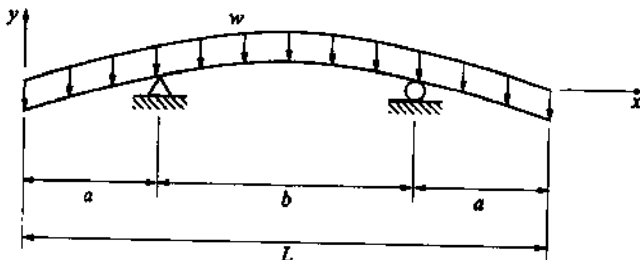


图 9-39

题9.40 简支外伸梁，外伸段受均布载荷作用，如图9-40所示。求梁中点相对于支座水平线初始位置的挠度值。（答案：$\frac{wa^2(L-2a)^2}{16EI}$（支座水平线以上））

题9.41 对于题9.40所述及的梁，求梁的一端相对于支座水平线初始位置的挠度值。（答案：$\frac{wa^3L}{4EI}-\frac{3wa^4}{8EI}$（支座水平线以下））

图9-40

题9.42 外伸梁如图9-41所示，受均布荷载和集中力的共同作用，求梁上A点的挠度。

（答案：$\frac{-wa^3b}{3EI}+\frac{Pab^2}{4EI}-\frac{wa^4}{8EI}$（支座水平线以下））

题9.43 图9-42所示圆锥形悬臂梁，其长度L远大于底部直径D，如果仅受自重作用，比重为γ。求其挠曲线方程。

（答案：$y=-\frac{2\gamma L^2}{45ED^2}(x^3+2L^3-3L^2x)$）

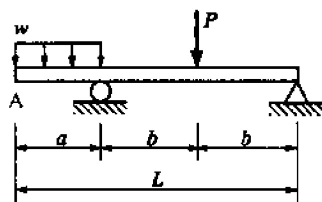


图9-41

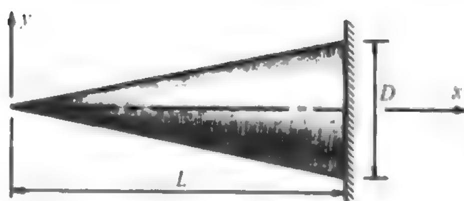


图9-42

题9.44 对于题9.17中的外伸梁，考虑均布载荷120 lbf/ft，$a=3$ ft，$b=12$ ft，$E=30\times10^6$ lbf/in²。梁截面为3in×4in的矩形。求梁的最大挠度值。（答案：在$x=110.4$ in处，为-0.10 in）

题9.45 一悬臂梁，俯视图（见图9-43(a)）为三角形，梁厚为常数h，侧视如图9-43(b)。求由于顶点作用集中力P而引起该点处的挠度（忽略梁的自重）。（答案：$y|_{x=0}=-6PL^3/Ebh^3$）

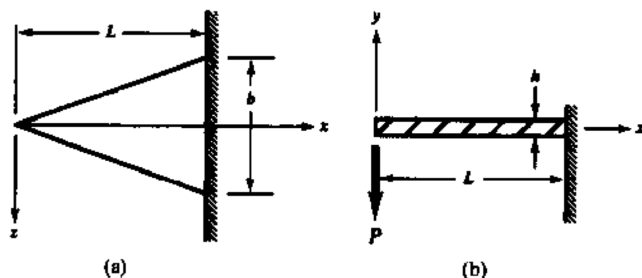


图9-43

题9.46 一悬臂梁，俯视图如图9-44(a)所示，厚度为常数h，如图9-44(b)所示，求梁在端点受集中力P作

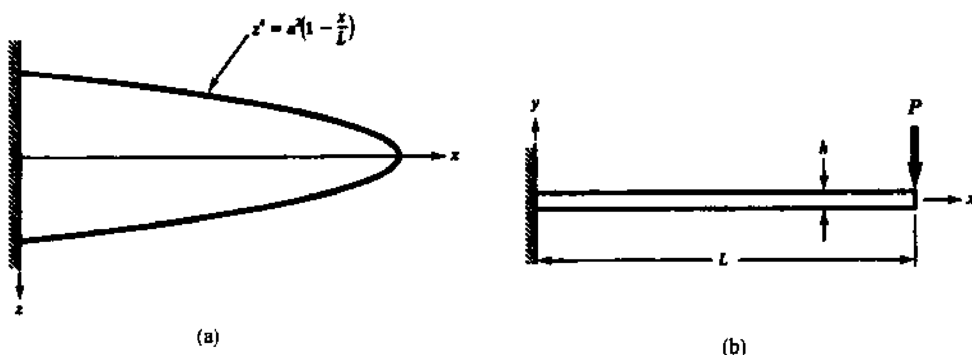


图9-44

用时的挠曲线方程(忽略梁的自重)。(答案：$y=\left[-\frac{16P(L-x)^{11/4}}{77}-\frac{4}{9}PL^{7/4}x+\frac{16PL^{11/4}}{77}\right]\cdot\left(\frac{6L^{1/4}}{Eh^3a^{1/2}}\right)$，$y|_{x=L}=-\frac{24PL^3}{11Eh^3a^{1/2}}$)

题 9.47　如图 9-45 所示，一长度为 L 的简支梁承受均布载荷 w 的作用，梁的宽度 b 为常数。梁截面高度的变化要使上下表面的所有外层纤维具有相同的法向应力 τ_0。求梁截面高度关于 x 的函数 $h(x)$ 及最大挠度。(答案：$h(x)=\frac{2h_{max}\sqrt{Lx-x^2}}{L}$，$y_{max}=-0.0178\frac{wL^4}{Eb(h_{max})^3}$)

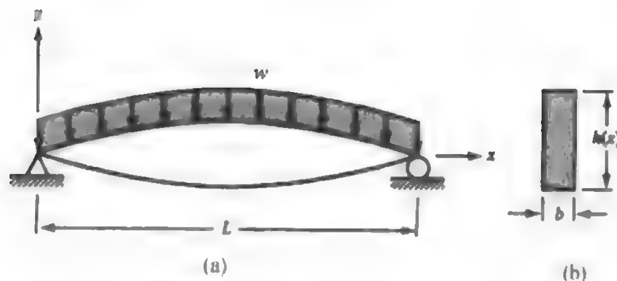


图 9-45

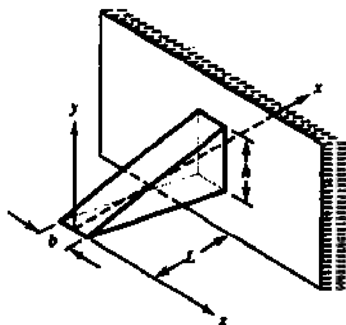


图 9-46

题 9.48　如图 9-46 所示的变截面悬臂梁为楔形，宽度 b 为常数。楔形体的中面位于水平面 xz 平面内。求梁由于自重引起的尖端挠度。(比重为 γ)(答案 $y|_{x=0}=-\gamma L^4/Eh^2$)

题 9.49　两个刚性实心圆柱体 Ⅰ 和 Ⅱ，其几何轴线在水平面内相距 L，如图 9-47 所示。在圆柱体的顶部放置一弯曲刚度为 EI 的梁，中点受铅直力 P 的作用。梁挠曲后(虚线)与每个圆柱体在标示的 A 点相切。试求表示接触点 A 的角度 θ。(答案：$\theta=\frac{PL^2}{16EI}\left(1-\frac{PLR}{4EI}\right)$)

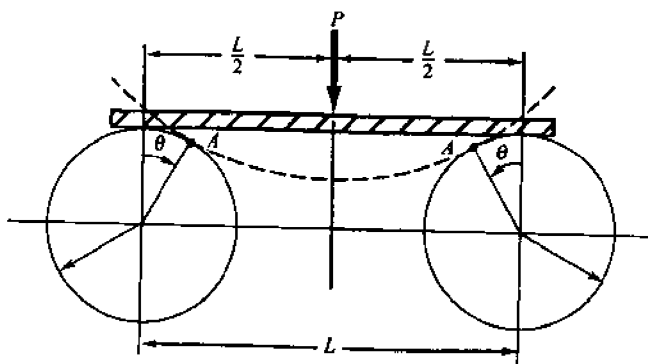


图 9-47

第 10 章 梁的弹性挠度:奇异函数法

第 9 章通过对二阶欧拉-伯努利方程的直接积分来求受横向力作用梁的弹性挠度。正如我们所看到的,这种方法虽然直接,但是即使对于相对较简单的工况,计算过程也可能会变得很冗长。

基于第 6 章介绍的奇异函数法的应用,有一种更有效的方法,这种方法直接、而且适用于受集中力、力偶和分布力等载荷任意组合的梁。对于该方法,唯一要记住的一点就是第 6 章所给出的奇异函数的定义:即若 $x<a$,则量$\langle x-a\rangle$等于 0;若 $x>a$,则$\langle x-a\rangle$等于$(x-a)$。

运用奇异函数法求梁的挠度有几种方法,可能最简单的一种就是运用第 6 章的方法,该方法把弯矩写成用奇异函数表示的、沿梁全长都适用的弯矩方程,对该方程两次积分得到含两个积分常数的挠曲线方程,这两个积分常数必须根据边界条件来确定。按第 6 章提到的奇异函数积分可直接计算,并且与简单的幂函数是一致的。因此,这种方法更为直接,而且避免了如同第 9 章中双积分例题对每段梁(载荷之间)求解两个积分常数的问题。

更重要的是,奇异函数法直接导出一种求梁挠度的计算机方法,如题 10.16、题 10.17 和题 10.18。

10.1 例 题

题 10.1 悬臂梁承受如图 10-1 所示的载荷作用,试用奇异函数法求其挠曲线方程。

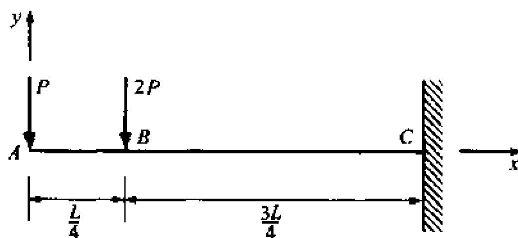


图 10-1

解 ☞ 对此例可不必求解固定端 C 处的约束反力,由第 6 章的方法,我们可得全梁的弯矩方程为

$$M=-P\langle x\rangle^{1}-2P\langle x-L/4\rangle^{1} \tag{1}$$

此处尖括号的意义与第 6 章 P120 的"奇异函数"一节给出的意义相同。因此,梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-P\langle x\rangle^{1}-2P\langle x-L/4\rangle^{1} \tag{2}$$

积分一次,得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-P\frac{\langle x\rangle^{2}}{2}-2P\frac{\langle x-L/4\rangle^{2}}{2}+C_1 \tag{3}$$

式中 C_1 为积分常数,再积分一次得

$$EIy=-\frac{P}{2}\frac{\langle x\rangle^{3}}{3}-2P\frac{\langle x-L/4\rangle^{3}}{2(3)}+C_1\langle x\rangle+C_2 \tag{4}$$

式中 C_2 为另一积分常数。这两个常数由边界条件确定:

(a)在 $x=L$ 处,$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$,因此由(3)式得

$$0 = -\frac{PL^2}{2} - P\left(\frac{3L}{4}\right)^2 + C_1 \tag{5}$$

(b)在 $x = L$ 处，$y = 0$，由(4)式得

$$0 = -\frac{PL^3}{6} - \frac{P}{3}\left(\frac{3L}{4}\right)^3 + C_1 L + C_2 \tag{6}$$

联立求解(5)和(6)式，得到

$$C_1 = \frac{17}{16}PL^2, \quad C_2 = \frac{145}{192}PL^3 \tag{7}$$

因此，所要求的挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{P}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{3}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^3 + \frac{17}{16}PL^2\langle x\rangle^1 - \frac{145}{192}PL^3 \tag{8}$$

例如，由(8)式得到 B 点，即 $x = \frac{L}{4}$ 处的挠度：

$$EIy\big|_{x=L/4} = -\frac{P}{6}\left(\frac{L}{4}\right)^3 - 0 + \frac{17}{16}PL^2\left(\frac{L}{4}\right) - \frac{145}{192}PL^3$$

即

$$y\big|_{x=L/4} = -\frac{94.5PL^3}{192EI} \quad 或 \quad -\frac{0.492PL^3}{EI}$$

题 10.2　如图 10-2 所示的悬臂梁，在右半部分受均布载荷 w 作用，B 点处作用一集中力偶 $wL^2/2$。试用奇异函数法求梁的挠曲线方程。

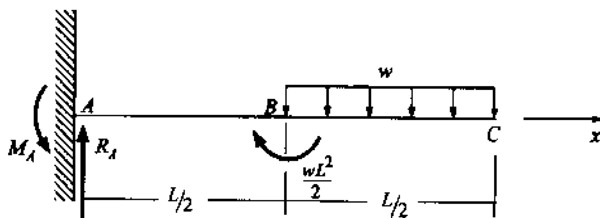


图 10-2

解　☞ 首先，必须由静力学求梁 A 点处的支座约束反力-剪力和力偶。由静力学知

$$\sum M_A = M_A - \frac{wL^2}{2} - w\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3L}{4}\right) = 0$$

$$M_A = \frac{7wL^2}{8}$$

$$\sum F_y = R_A - w\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad R_A = \frac{wL}{2}$$

根据奇异函数法，我们可以写出沿梁全长的弯矩

$$M = \frac{wL}{2}\langle x\rangle^1 - \frac{7wL^2}{8}\langle x\rangle^0 + \frac{wL^2}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^0 - w\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^1 \frac{\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^1}{2} \tag{1}$$

这里，奇异函数的定义同第 6 章，梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wL}{2}\langle x\rangle^1 - \frac{7wL^2}{8}\langle x\rangle^0 + \frac{wL^2}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^0 - w\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^1 \frac{\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^1}{2} \tag{2}$$

积分一次，有

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wL}{2}\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{7wL^2}{8}\langle x\rangle^1 + \frac{wL^2}{2}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^1 - \frac{w}{2}\frac{\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^3}{3} + C_1 \tag{3}$$

第一个边界条件为：$x = 0$ 处，$dy/dx = 0$，代入(3)式，得 $C_1 = 0$

再积分一次，得

$$EIy = \frac{wL}{4}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{7wL^2}{8}\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{wL^2}{2}\frac{\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2}{2} - \frac{w}{6}\frac{\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^4}{4} + C_2 \tag{4}$$

第二个边界条件为：$x = 0$ 处，$y = 0$，代入(4)式，得 $C_2 = 0$

这样,所要求的挠曲线方程为

$$EIy = \frac{wL}{12}\langle x\rangle^3 - \frac{7wL^2}{16}\langle x\rangle^2 + \frac{wL^2}{4}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^2 - \frac{w}{24}\left\langle x - \frac{L}{2}\right\rangle^4 \tag{5}$$

由此得自由端的挠度为

$$EIy\big|_{x=L} = \frac{wL^4}{12} - \frac{7wL^4}{16} + \frac{wL^2}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{w}{24}\left(\frac{L}{2}\right)^4$$

即

$$y\big|_{x=L} = -\frac{113wL^4}{384EI}$$

题 10.3 考虑一简支梁,在其一段上作用有均布载荷,如图 10-3 所示,试用奇异函数法求梁的挠曲线。

解 由静力学知约束反力为

$$R_1 = \frac{w_0}{2L}(L^2 - b^2)$$

$$R_2 = w_0 a - \frac{w_0}{2L}(L^2 - b^2)$$

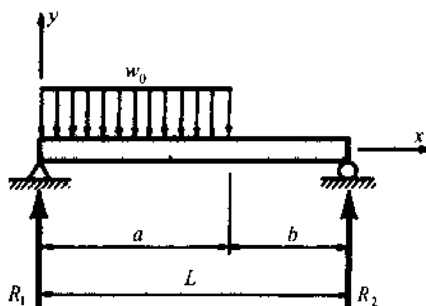


图 10-3

沿梁长任意点 x 处的弯矩为

$$M = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x - a\rangle^2 \tag{1}$$

注意,对于大于 $x = a$ 的所有 x 值,要有右式最后一项去抵消由

$$\frac{w_0}{2}\langle x\rangle^2$$

表示的分布力的影响,因此

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = M = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x - a\rangle^2 \tag{2}$$

积分一次,有

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{R_1}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{w_0}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{w_0}{6}\langle x - a\rangle^2 + C_1 \tag{3}$$

再积分一次,得到

$$EIy = \frac{R_1}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4 - \frac{w_0}{24}\langle x - a\rangle^4 + C_1x + C_2 \tag{4}$$

利用边界条件,在 $x=0$ 和 $x=L$ 处,$y=0$,来确定 C_1 和 C_2,由(4)式有

$$C_1 = \frac{w_0L^3}{24} - \frac{w_0b^4}{24L} - \frac{w_0L}{12}(L^2 - b^2)$$

$$C_2 = 0$$

因此挠曲线方程为

$$EIy = \frac{w_0}{12L}(L^2 - b^2)\langle x\rangle^3 - \frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x - a\rangle^4 + \left[-\frac{w_0L^3}{24} - \frac{w_0b^4}{24L} + \frac{w_0Lb^2}{12}\right]x \tag{5}$$

题 10.4 考虑图 10-4 所示的外伸梁,用奇异函数法求挠曲线方程。

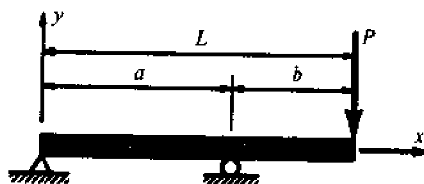


图 10-4

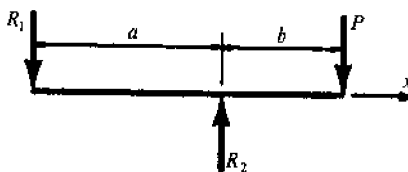


图 10-5

解 ☞ 首先由静力学可得约束反力 $R_1 = Pb/a$，$R_2 = P[1+(b/a)]$，如图 10-5 所示。沿梁全长任意点处 x 的弯矩为

$$M(x) = -R_1\langle x\rangle^1 + R_2\langle x-a\rangle^1 \tag{1}$$

因此

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = -R_1\langle x\rangle^1 + R_2\langle x-a\rangle^1 \tag{2}$$

由此得

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{R_1}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{R_2}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_1 \tag{3}$$

$$EIy = -\frac{R_1}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{R_2}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{4}$$

边界条件：$x=0$ 和 $x=a$ 处，$y=0$；由这些条件、根据(4)式得 C_1 和 C_2，

$$C_1 = \frac{Pab}{6},\quad C_2 = 0$$

因此挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{Pb}{6a}\langle x\rangle^3 + \frac{P}{6}\left(1+\frac{b}{a}\right)\langle x-a\rangle^3 + \frac{Pabx}{6} \tag{5}$$

题 10.5　如图 10-6 所示的悬臂梁，承受三角形分布载荷和力偶的共同作用。试用奇异函数法求该梁的挠曲线方程。

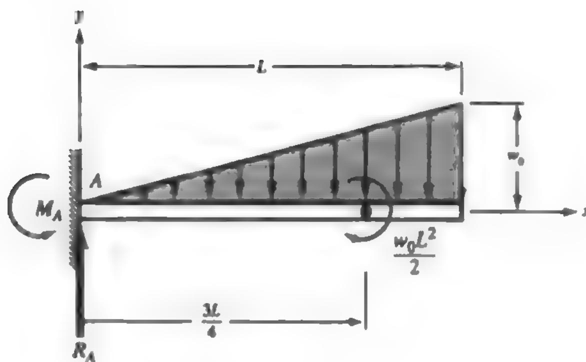


图 10-6

解 ☞ 首先运用静力学求 A 点的约束反力。要使梁不绕 A 点旋转，必须要有竖向剪力 R_A 和力偶 M_A。由静力学可知

$$\sum M_A = M_A - \frac{w_0L^2}{2} - \frac{w_0}{2}(L)\left(\frac{2}{3}L\right) = 0$$

因此

$$M_A = \frac{5}{6}w_0L^2$$

$$\sum F_y = R_A - \frac{w_0L}{2} = 0$$

故

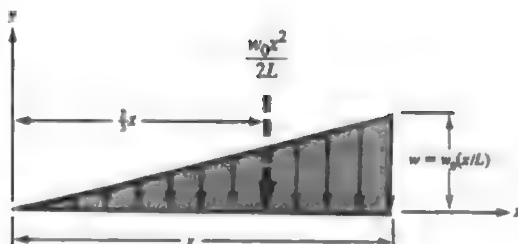


图 10-7

$$R_A = \frac{w_0 L}{2}$$

若要求写出弯矩表达式,我们先考查分布力的作用,由几何图形知,在 A 点右端任意位置 x 的载荷集度为 $w = w_0(x/L)$,合力(图 10-7 中用虚线矢量表示)为

$$\frac{wx}{2} = w_0\frac{x^2}{2L}$$

作用点在距 A 为 $2x/3$ 处。这样,仅由三角形荷载引起的弯矩为

$$-w_0\frac{x^2}{2L}\left(\frac{x}{3}\right), \quad 或 \ -\frac{w_0 x^3}{6L}$$

式中的负号是因为该向下的力产生负弯矩。

由所有的外力,即 M_A,R_A 和三角形分布载荷,引起的任意位置 x 处的弯矩为

$$M = -\frac{5}{6}w_0L^2 + \frac{w_0L}{2}x - \frac{w_0x^2}{2L}\frac{x}{3} + \frac{w_0L^2}{2}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^0 \tag{1}$$

因此梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{5}{6}w_0L^2 + \frac{w_0L}{2}x - \frac{w_0x^3}{6L} + \frac{w_0L^2}{2}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^0 \tag{2}$$

积分一次,得

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{6}w_0L^2x + \frac{w_0L}{2}\frac{x^2}{2} - \frac{w_0}{6L}\frac{x^4}{4} + \frac{w_0L^2}{2}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^1 + C_1 \tag{3}$$

第一个边界条件:在 $x=0$ 处,$dy/dx=0$,将其代入(3)式得 $C_1=0$。再积分一次,得

$$EIy = -\frac{5}{12}w_0L^2x^2 + \frac{w_0L}{4}\frac{x^3}{3} - \frac{w_0}{24L}\frac{x^5}{5} + \frac{w_0L^2}{4}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^2 + C_2 \tag{4}$$

第二个边界条件:在 $x=0$ 处,$y=0$;代入(4)式,得 $C_2=0$,这样,梁的挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{5}{12}w_0L^2x^2 + \frac{w_0L}{12}x^3 - \frac{w_0}{120L}x^5 + \frac{w_0L^2}{4}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^2 + C_2 \tag{5}$$

由(5)式得自由端 $x=L$ 处的挠度为

$$EIy\big|_{x=L} = -0.326w_0L^4$$

题 10.6 如图 10-8 所示,双端外伸梁,B、C 处为简支,且受三角形分布载荷作用。试用奇异函数法求梁的挠曲线方程。

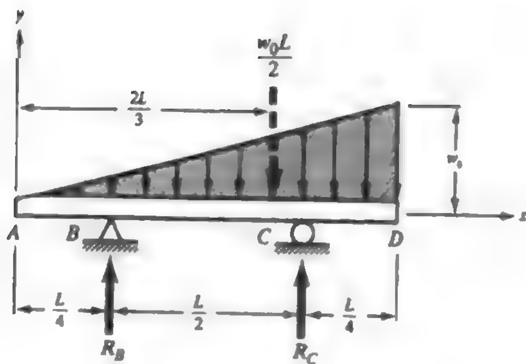


图 10-8

解 ☞ 为了确定点 B 和 C 处的竖向约束反力,把所有分布力用作用于三角形重心的合力来代替。其合力大小为每单位长度的平均荷载 $w_0/2$ 乘以梁长度 L,即 $w_0L/2$。该力作用于距左端 A 为 $2L/3$ 处,如图 10-8 中虚线矢量所示。由静力学平衡方程可知

$$\sum M_B = R_C\cdot\frac{L}{2} - \frac{w_0L}{2}\left(\frac{2}{3}L - \frac{L}{4}\right) = 0$$

因此,可解出

$$R_C = \frac{5w_0L}{12}$$

$$\sum F_y = R_B + \frac{5w_0L}{12} - \frac{w_0L}{2} = 0$$

解出

$$R_B = \frac{w_0 L}{12}$$

在距原点 A 为 x 的任意点处,用奇异函数表示的弯矩,为该点左侧所有外力的力矩之和,考虑水平长度为 x 的部分三角形分布载荷,这部分载荷的合力如图 10-9 虚线矢量所示,为

$$\frac{w}{2} \cdot x = w_0 \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{2}$$

作用点在 A 点右侧 $2x/3$ 处。所以,仅仅由三角形分布载荷引起的弯矩为

$$-w_0 \frac{x^2}{2L} \cdot \frac{x}{3} \quad 或 \quad -\frac{w_0 x^3}{6L}$$

式中的负号是因为根据第 6 章中弯矩的符号规则,向下的力产生负弯矩。

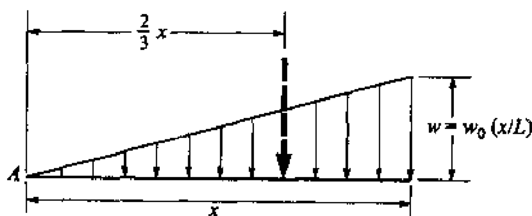


图 10-9

由所有作用力(包括反力)引起的任意点 x 处的弯矩用奇异函数表示为

$$M = -\frac{w_0 \langle x \rangle^3}{6L} + \frac{w_0 L}{12}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^1 + \frac{5w_0 L}{15}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^1 \tag{1}$$

因此,梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{w_0 \langle x \rangle^3}{6L} + \frac{w_0 L}{12}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^1 + \frac{5w_0 L}{12}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^1 \tag{2}$$

积分一边,得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{w_0}{24L}\langle x \rangle^4 + \frac{w_0 L}{24}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^2 + \frac{5w_0 L}{24}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^2 + C_1 \tag{3}$$

再积分一次,得

$$EIy = -\frac{w_0}{120L}\langle x \rangle^5 + \frac{w_0 L}{72}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^3 + \frac{5}{72}w_0 L\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^3 + C_1 x + C_2 \tag{4}$$

边界条件,在 $x = L/4$ 处,$y = 0$,代入(4)式,有

$$0 = -\frac{w_0}{120L}\left\langle \frac{L}{4}\right\rangle^5 + C_1 \frac{L}{4} + C_2 \tag{5}$$

又在 $x = 3L/4$ 处,$y = 0$,代入式(4)式,有

$$0 = -\frac{w_0}{120L}\left(\frac{3L}{4}\right)^5 + \frac{w_0 L}{72}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1 \cdot \frac{3L}{4} + C_2 \tag{6}$$

联立解(5)式和(6)式,得

$$C_1 = 0.0004666 w_0 L^3$$

$$C_2 = -0.0001085 w_0 L^4$$

故梁的挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{w_0}{120L}\langle x \rangle^5 + \frac{w_0 L}{72}\left\langle x - \frac{L}{4}\right\rangle^3 + \frac{5w_0 L}{72}\left\langle x - \frac{3L}{4}\right\rangle^3 + 0.0004666 w_0 L^3 x - 0.0001085 w_0 L^4 \tag{7}$$

题 10.7　在题 10.6 中,截面为 W203×40 工字钢、长度为 $L = 4$ m 的梁受三角形分布载荷作用,最大集度 $w_0 = 80$ kN/m,惯性矩 $I = 39 \times 10^6$ mm^4。试求 D 点的挠度。

解　☞ 运用题 10.6 中的(7)式,有

$$EI[y]_{x=L} = -\frac{w_0 L^4}{120} + \frac{w_0 L}{72}\left\langle \frac{3L}{4}\right\rangle^3 + \frac{5w_0 L}{72}\left\langle \frac{L}{4}\right\rangle^3 + 0.0004666 w_0 L^4 - 0.0001085 w_0 L^4$$

$$= -0.001031 w_0 L^4$$

$$y|_{x=L} = -\frac{0.001031 w_0 L^4}{EI}$$

$$= -\frac{(0.001031)(80,000\ \text{N/m})(4\text{m})^4}{(200\times10^9\ \text{N/m}^2)(39\times10^{-6}\ \text{m}^4)}$$

$$= -0.0027\ \text{m} \quad 或 \quad -2.7\ \text{mm}$$

题 10.8 图 10-10 所示的外伸梁 AD，在 A 和 C 处为铰支，从 B 到 D 承受分布载荷作用，D 处受图示的力偶作用。试用奇异函数法求梁的挠曲线方程。

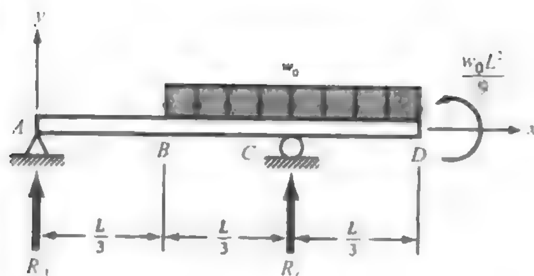


图 10-10

解 ☞ 假设 A 和 C 处的约束反力为 R_A、R_C 如图示。由两个静力学平衡方程得

$$\sum M_A = R_C\left(\frac{2L}{3}\right) - w_0\left(\frac{2L}{3}\right)^2 + \frac{w_0L^2}{9} = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R_A + R_C - w_0\left(\frac{2L}{3}\right) = 0 \tag{2}$$

可解出

$$R_A = \frac{w_0L}{6}, \quad R_C = \frac{w_0L}{2}$$

由奇异函数法写出如下形式的挠曲梁全长上的微分方程

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{6}w_0L\langle x\rangle^1 - \frac{w_0\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^2}{2} + \frac{w_0L}{2}\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^1 \tag{3}$$

外力偶不直接出现在该方程中，但它的作用包含在静力学方程(1)和(2)式中。积分一次，得到

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{w_0L}{6}\cdot\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{w_0}{2}\frac{\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^3}{3} + \frac{w_0L}{2}\frac{\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^2}{2} + C_1 \tag{4}$$

再积分一次，得

$$EIy = \frac{w_0L}{12}\cdot\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{w_0}{6}\frac{\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^4}{4} + \frac{w_0L}{4}\frac{\left\langle x-\frac{2}{3}L\right\rangle^3}{3} + C_1\langle x\rangle^1 + C_2 \tag{5}$$

在边界条件：在 $x=0$ 处，$y=0$，据此由(5)式得 $C_2=0$；在 $x=2L/3$ 处，$y=0$，据此由(5)式得

$$C_1 = -0.01157 w_0L^3$$

故所要求的梁的挠曲线方程为

$$EIy = \frac{w_0L\langle x\rangle^3}{36} - \frac{w_0}{24}\left\langle x-\frac{L}{3}\right\rangle^4 + \frac{w_0L}{12}\left\langle x-\frac{2L}{3}\right\rangle^3 - 0.01157w_0L^3x \tag{6}$$

题 10.9 若题 10.8 中的梁为工字型钢截面 W203 × 51（由第 8 章的表 8-2，查得惯性矩 $I=52.5\times10^6\ \text{mm}^4$），长度为 6 m。$BD$ 段受集度为 22 kN/m 的分布力作用，求 B 点的挠度。

解 ☞ 由挠曲线的一般方程，即题 10.8 中的(6)式，可写出 $x=L/3$ 处的挠度表达式

$$EIy|_{x=L/3} = \frac{w_0L}{36}\cdot\frac{L^3}{27} - 0 + 0 - 0.01157w_0L^2\left\langle\frac{L^2}{3}\right\rangle = -0.002828w_0L^4$$

代入得有关数据

$$y\big|_{x=L/3}=\frac{\dfrac{(22{,}000\ \text{N/m})(6\ \text{m})}{36}\cdot\dfrac{(6\ \text{m})^3}{27}-0.01157\left(\dfrac{22{,}000\ \text{N}}{\text{m}}\right)(6\ \text{m})^3\left(\dfrac{6\ \text{m}}{3}\right)}{(200\times10^9\ \text{N/m}^2)(52.5\times10^{-6}\ \text{m}^4)}$$

$$=-7.68\times10^{-3}\ \text{m}\quad 或\quad =-7.68\ \text{mm}$$

题 10.10　悬臂梁 AD 受力偶M_1 和 $M_1/3$ 作用，如图 10-11 所示，运用奇异函数法求梁的挠曲线方程。

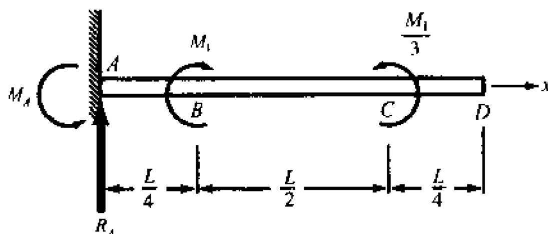


图 10-11

解　☞ 考虑静力平衡可知，A 点必须有一个约束力偶 M_A，还可能有一个约束剪力 R_A，由静力学平衡方程得

$$\sum M_A=M_A-M_1+M_1/3=0,\qquad 故\ M_A=2M_1/3$$

$$\sum F_y=R_A=0$$

在任意 x 处的弯矩为

$$M=-\frac{2}{3}M_1\langle x\rangle^0+M_1\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^0-\frac{M_1}{3}\left\langle x-\frac{3L}{4}\right\rangle^0 \tag{1}$$

因此梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{2}{3}M_1\langle x\rangle^0+M_1\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^0-\frac{M_1}{3}\left\langle x-\frac{3L}{4}\right\rangle^0 \tag{2}$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{2}{3}M_1\langle x\rangle^1+M_1\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^1-\frac{M_1}{3}\left\langle x-\frac{3L}{4}\right\rangle^1+C_1 \tag{3}$$

第一个边界条件：在 $x=0$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$。因此 $C_1=0$。再积分一次，得

$$EIy=-\frac{2}{3}M_1\frac{\langle x\rangle^2}{2}+\frac{M_1}{2}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^2-\frac{M_1}{6}\left\langle x-\frac{3L}{4}\right\rangle^2+C_2 \tag{4}$$

第二个边界条件：在 $x=0$ 处，$y=0$。因此 $C_2=0$。

最后，梁的挠曲线微分方程为

$$EIy=-\frac{M_1\langle x\rangle^2}{3}+\frac{M_1}{2}\left\langle x-\frac{L}{4}\right\rangle^2-\frac{M_1}{6}\left\langle x-\frac{3L}{4}\right\rangle^2 \tag{5}$$

题 10.11　题 10-10 中的悬臂梁，由工字型钢 W254×31 制成，长度为 2 m，截面惯性矩 $I=44.1\times10^{-6}\ \text{m}^4$。若 D 点的挠度为 3 mm，试求力偶矩 M_1。

解　☞ 对于 $x=L$ 处的挠度，运用题 10.10 中的(5)式，并化简后，有

$$EIy\big|_{x=L}=-\frac{M_1L^2}{16}$$

代入已知的数值，得 D 端的挠度为

$$y\big|_{x=L}=-\frac{M_1(2\ \text{m})^2}{(16)(200\times10^9\ \text{N/m}^2)(44.1\times10^{-6}\ \text{m}^4)}=0.003\ \text{m}$$

可解出

$$M_1=106\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

题 10.12　如图 10-12 所示外伸梁，在 B 点承受力偶作用，同时在 CD 区段承受线性变化的分布载荷作用。试用奇异函数法求梁的挠曲线方程。

解　☞ 假设 A 和 C 处的约束反力 R_A、R_C 如图示方向，对于这两个平行力，写出两个静力学

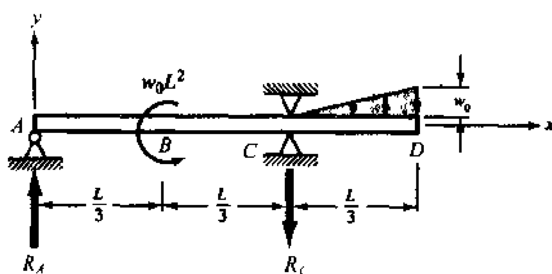


图 10-12

方程，为

$$\sum M_A = w_0L^2 - R_C\left(\frac{2L}{3}\right) - \frac{w_0}{2}\left(\frac{L}{3}\right)\left(\frac{2L}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{L}{3}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R_A - R_C - \frac{w_0}{2}\cdot\frac{L}{3} = 0 \tag{2}$$

可解出，$R_A = 13w_0L/9$，$R_C = 23w_0L/18$，由于结果均为正的，故假设的方向正确。根据奇异函数法，梁的挠曲线微分方程可写为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{13}{9}w_0L\langle x\rangle^1 - w_0L^2\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^0 - \frac{23}{18}w_0L\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^1 - w_0\frac{\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{L}{3}\right)}\cdot\frac{\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle}{3} \tag{3}$$

此处利用题 10.6 中讨论三角形分布荷载的方法和图 10-9，可将 CD 区段三角形分布载荷的影响写作(3)式中的最后一项。

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{13}{9}w_0L\frac{\langle x\rangle^2}{2} - w_0L^2\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^1 - \frac{23}{18}w_0L\frac{\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^2}{2} - \frac{w_0}{2L}\frac{\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^4}{4} + C_1 \tag{4}$$

因为没有关于斜率的边界条件，因此，这时无法确定 C_1。再积分一次，得

$$EIy = \frac{13}{18}w_0L\frac{\langle x\rangle^3}{3} - w_0L^2\frac{\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^2}{2} - \frac{23}{36}w_0L\frac{\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^3}{3} - \frac{w_0}{8L}\frac{\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^5}{5} + C_1x + C_2 \tag{5}$$

边界条件：在 $x = 0$ 处，$y = 0$。由此据(5)式得 $C_2 = 0$；在 $x = 2L/3$ 处，$y = 0$，由此根据(5)式，得

$$0 = \frac{13}{54}w_0L\left(\frac{8L^3}{27}\right) - \frac{w_0L^2}{2}\cdot\frac{L^2}{9} - 0 - 0 + C_1\left(\frac{2L}{3}\right)$$

可解出

$$C_1 = -0.02366w_0L^3$$

于是，此梁的挠曲线方程为

$$EIy = \frac{13}{54}w_0L\langle x\rangle^3 - \frac{w_0L^2}{2}\left\langle x - \frac{L}{3}\right\rangle^2 - \frac{23}{108}w_0L\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^3 - \frac{w_0}{40L}\left\langle x - \frac{2L}{3}\right\rangle^5 - 0.02366w_0L^3\langle x\rangle$$

题 10.13　如图 10-13(a)所示外伸梁，应用奇异函数法求其挠曲线方程。

解　分离体图如图 10-13(b)所示，由静力学平衡方程很容易求得约束反力 $R_1 = 225$ N、$R_2 = 525$ N。

用奇异函数写出与图 10-13(b)对应的弯矩方程后，可有

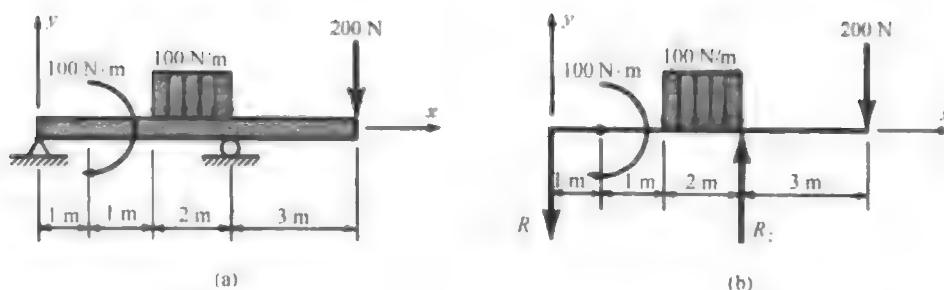


图 10-13

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=-225\langle x\rangle^1+100\langle x-1\rangle^0-\frac{100\langle x-2\rangle^2}{2}$$

$$+\overset{\otimes}{\frac{100\langle x-4\rangle^2}{2}}+525\langle x-4\rangle^1 \quad (1)$$

其中有⊗标记的项用以抵消 $x=4$m 处右侧分布载荷 100N/m，的作用是必要的。

积分(1)式，可得

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{225}{2}\langle x\rangle^2+100\langle x-1\rangle^1-\frac{50}{3}\langle x-2\rangle^3+\frac{50}{3}\langle x-2\rangle^3+\frac{525}{2}\langle x-4\rangle^2+C_1 \quad (2)$$

$$EIy=-\frac{225}{6}\langle x\rangle^3+\frac{100}{2}\langle x-1\rangle^2-\frac{50}{12}\langle x-2\rangle^4+\frac{50}{12}\langle x-4\rangle^4$$

$$+\frac{525}{6}\langle x-4\rangle^3+C_1x+C_2 \quad (3)$$

边界条件：在 $x=0$ 和 $x=4$m 处，$y=0$。将这些条件代入(3)式去确定 C_1 和 C_2，得到 $C_1=504$，$C_2=0$。

因而所要求的梁的挠曲线方程为

$$EIy=-\frac{225}{6}\langle x\rangle^3+\frac{100}{2}\langle x-1\rangle^2-\frac{50}{12}\langle x-2\rangle^4+\frac{50}{12}\langle x-4\rangle^4$$

$$+\frac{525}{6}\langle x-4\rangle^3+504x \quad (4)$$

题 10.14　如图 10-14 所示的外伸梁 AD 在 B 处和 C 处均为简支，A 点处作用一力偶 M_1，外伸部分 CD 作用有均布载荷。求梁的挠曲线方程和 A 点挠度。

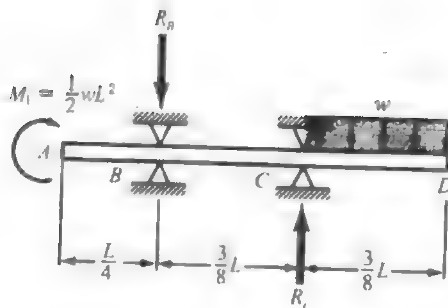


图 10-14

解　由静力学平衡方程得约束反力 R_B 和 R_C 为

$$R_B=\frac{73}{48}wL(\downarrow),\ R_C=\frac{91}{48}wL(\uparrow)$$

运用奇异函数法，可写出梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}wL^2-\frac{73}{48}wL\left\langle x-\frac{1}{4}\right\rangle$$

$$+\frac{91}{48}wL\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle-\frac{w}{2}\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^2 \quad (1)$$

积分一次得

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}wL^2\langle x\rangle-\frac{73}{96}wL\left\langle x-\frac{1}{4}\right\rangle^2+\frac{91}{96}wL\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^2-\frac{w}{6}\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^3+C_1 \quad (2)$$

再积分一次，得

$$EIy=\frac{1}{2}wL^2\frac{\langle x\rangle^2}{2}-\frac{73}{288}wL\left\langle x-\frac{1}{4}\right\rangle^3$$

$$+\frac{91}{288}wL\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^3-\frac{w}{24}\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^4+C_1x+C_2 \quad (3)$$

利用边界条件确定 C_1 和 C_2，有

1. 在 $x=L/4$ 处，$y=0$，代入(3)式，有

$$0=\frac{wL}{4}\cdot\frac{L^2}{16}-0+0-0+C_1\frac{L}{4}+C_2 \tag{4}$$

2. 在 $x=5L/8$ 处，$y=0$，代入(3)式，有

$$0=\frac{wL^2}{4}\cdot\frac{25}{64}L^2-\frac{73}{288}wL\cdot\frac{27L^3}{512}+0+\frac{5}{8}LC_1+C_2 \tag{5}$$

联立求解(4)和(5)式，得

$$C_1=-0.1831wL^3,\quad C_2=0.03015wL^4$$

对于所有 x 值，梁的挠曲线方程为

$$EIy=-\frac{wL^2}{4}\langle x\rangle^2-\frac{73}{288}wL\left\langle x-\frac{1}{4}\right\rangle^3+\frac{91}{288}wL\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^3-\frac{w}{24}\left\langle x-\frac{5}{8}L\right\rangle^4$$
$$-0.1831wL^3x+0.03015wL^4 \tag{6}$$

在左端 $x=0$ 处，A 点的挠度为

$$EIy\big|_{x=0}=0.03015wL^4$$

题 10.15　简支梁承受如图 10-15(a)所示变化的分布载荷作用，用奇异函数法求该梁的挠曲线方程，并求梁中点处的挠度。

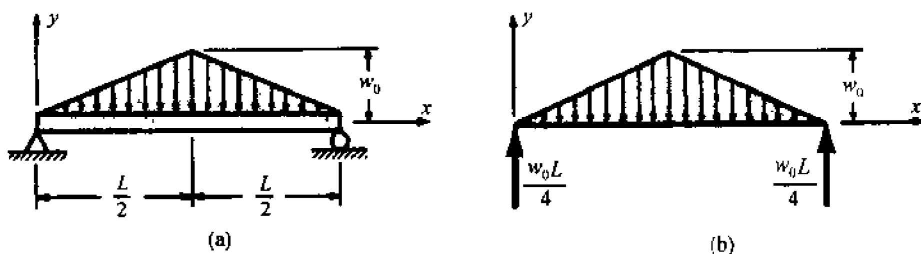


图 10-15

解　梁的分离体图及约束反力如图 10-15(b)所示，约束反力可由静力学平衡方程求得。

参考题 10.6，可以写出任意位置 x 处的弯矩方程为

$$M(x)=+\frac{w_0L}{4}\langle x\rangle^1-\frac{w_0}{3L}\langle x\rangle^3+\frac{2w_0}{3L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^3 \tag{1}$$

此处(1)式中右端的第二项代表图 10-16 中梁全长上的三角形 OAB 所示的分布载荷，为了去掉三角形 ABD 所示的那部分载荷，加上(1)式右端的第三项，这样就只剩下三角形 ODB 所示的那部分真正的载荷了。

因此，

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=\frac{w_0L}{4}\langle x\rangle^1-\frac{w_0}{3L}\langle x\rangle^3+\frac{2w_0}{3L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^3 \tag{2}$$

将上式积分一次，有

$$EI\frac{dy}{dx}=\frac{w_0L}{8}\langle x\rangle^2-\frac{w_0}{12L}\langle x\rangle^4+\frac{w_0}{6L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4+C_1 \tag{3}$$

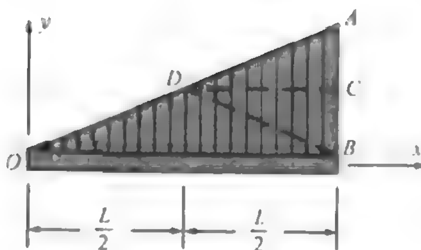


图 10-16

由于对称性，可用边界条件为：在 $x=L/2$ 处，$dy/dx=0$，由(3)式得 $C_1=5w_0L^3/192$。再积分一次，得到所要求的，含积分常数的挠曲线。

$$EIy=+\frac{w_0L}{24}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{60L}\langle x\rangle^5+\frac{w_0}{30L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^5-\frac{5}{192}w_0L^3x+C_2 \tag{4}$$

因为在 $x=0$ 处，$y=0$，故可得 $C_2=0$，由(4)式得梁中点挠度为

$$y = -\frac{w_0L^4}{120EI}$$

10.1.1　静定梁——计算机解法

题 10.1 至题 10.15 展示了用奇异函数法求梁解挠度的有效性，因为用

$$\langle x - a\rangle = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ (x - a) & (x > a) \end{cases}$$

定义的奇异函数 $\langle x - a\rangle$ 与 FORTRAN 语言中的"if"语句之间有直接的对应关系，所以这种方法很适合使用计算机，下面在题 10.16 中计算机化的方法充分地利用了这个特点。

题 10.16　编制 FORTRAN 程序，计算在任意两点处简支、受任意集中力、力偶和分布力作用的等截面梁上任一给定点处的挠度和斜率。

我们用图 10-17 所示的符号术语，见表 10-1。

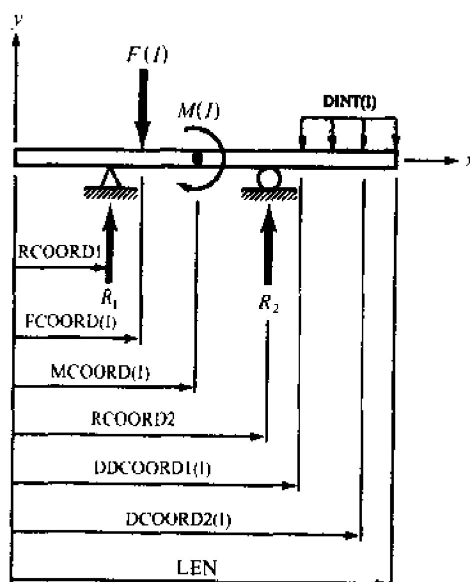


图 10-17

表 10-1

元素	USCS 系统或 SI 系统
E	杨氏模量
I	梁横截面关于中性轴的惯量矩
LEN	梁的长度
NF	集中力的数量(不包括支反力)
ND	均布力的数量
NM	力偶的数量
NUM	梁被分割成的单元数
RCOORD1	约束反力 R_1 作用处的坐标
RCOORD2	约束反力 R_2 作用处的坐标
FCOORD(I)	第 I 集中力作用处的坐标
FMAG(I)	第 I 集中力的数值
MCOORD(I)	第 I 力偶作用处的坐标
MMAG(I)	第 I 力偶的数值
DDCOORD1(I)	第 I 分布力左端作用处的坐标
DDCOORD2(I)	第 I 分布力右端作用处的坐标
DMAG(I)	第 I 均布力的数值(荷载/单位长)

下面运用奇异函数法编制、列出的程序，是基于梁的弯曲方程

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$$

的数值解法。一个完整的程序中,必须引入有关梁的载荷,几何性质和弹性特性的所有参数,然后该程序将打印出沿梁长上(NUM+1)个点中每一点的斜率和挠度(用合适的代数符号表示)、约束反力 R_1 和 R_2 的值。

```
00010*********************************************************************
00020          PROGRAM BEND (INPUT,OUTPUT)
00030*********************************************************************
00040*
00050*          AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00060*          DATE  : JANUARY 29,1989
00070*
00080*   BRIEF DESCRIPTION:
00090*       THIS PROGRAM CONSIDERS THE BENDING OF BEAMS DUE TO CONCENTRATED
00100*   FORCES, CONCENTRATED MOMENTS, AND UNIFORMLY DISTRIBUTED LOADS. FIRST,
00110*   THE PIN REACTION FORCES ARE FOUND, AND THEN THE SLOPE AND DEFLECTION OF
00120*   THE LOADED BEAM AT VARIOUS INCREMENTS ALONG ITS LENGTH ARE DETERMINED.
00130*   NOTE, THIS PROGRAM WAS DEVELOPED TO CONSIDER GENERAL LOADING, AND THE
00140*   PINS DO NOT HAVE TO BE AT THE ENDPOINTS OF THE BEAM.
00150*
00160*   INPUT:
00170*     THE USER MUST FIRST ENTER IF USCS OF SI UNITS ARE DESIRED. THEN,
00180*   THE MOMENT OF INERTIA, YOUNG'S MODULUS, AND THE LENGTH OF THE BEAM
00190*   ARE ENTERED. FINALLY, THE NUMBER, MAGNITUDE, AND LOCATION OF ALL
00200*   LOAD TYPES, AND THE NUMBER OF INCREMENTS TO PERFORM THE SLOPE AND
00210*   DEFLECTION CALCULATIONS  ARE INPUTTED.
00220*
00230*   OUTPUT:
00240*       THE PROGRAM PRINTS THE MAGNITUDE AND SENSE OF THE TWO REACTION
00250*   FORCES, AS WELL AS THE SLOPE AND DEFLECTION AT SUCCESSIVE INTERVALS
00260*   ALONG THE BEAM.
00270*
00280*   VARIABLES:
00290*      E,INER,LEN       ---     YOUNG'S MODULUS, MOMENT OF INERTIA, LENGTH
00300*                               OF BEAM
00310*      NUM              ---     NUMBER OF INCREMENTS TO DO CALCULATIONS ON
00320*   RCOORD1,RCOORD2     ---     LOCATION OF THE PINS
00330*      R1,R2            ---     MAGNITUDE OF THE PIN REACTION FORCES
00340*   FCOORD(I),FMAG(I) ---       LOCATION AND MAGNITUDE OF CONCENTRATED FORCE
00350*   DDCOORD1(I),DCOORD2(I)-     LOCATION OF DISTRIBUTED LOADS
00360*     DINT(I)           ---     INTENSITY OF DISTRIBUTED LOADS
00370*   MCOORD(I),MMAG(I) ---       LOCATION AND MAGNITUDE OF MOMENTS
00380*      DX               ---     INCREMENTAL STEP ALONG BEAM (LENGTH/NUM)
00390*   VV1,VV2,...VV6      ---     THE 'BRACKET TERMS' OF THE SINGULARITY FNCTS
00400*   SLF(I),DF(I),SLM(I),
00410*   DM(I),SLD(I),DD(I)---       THE SUMMING ARRAYS FOR SLOPE AND DEFLECTION
00420*                               DUE TO EACH APPLIED FORCE AT A PARTICULAR PT
00430*   SLR1,SLR2,DR1,DR2 ---       THE EFFECTS OF THE REACTION FORCES AT A POIN
00440*   SLFX,SLMX,SLDX      ---     THE TOTAL SLOPE AND DEFLECTION DUE TO BOTH
00450*   DFX,DMX,DDX                 APPLIED AND REACTIVE FORCES AT A POINT
00460*      C1,C2            ---     THE CONSTANTS OF INTEGRATION
00470*   SL(I),D(I)          ---     THE FINAL SLOPE AND DEFLECTION AT ANY POINT
00480*     NF,NM,ND          ---     THE NUMBER OF CONCENTRATED FORCES (NOT
00490*                               INCLUDING REACTIONS), APPLIED MOMENTS, AND
00500*                               UNIFORMLY DISTRIBUTED LOADS
00510*     FSUM,MSUM         ---     THE SUM OF THE FORCES AND MOMENTS, USED TO
00520*                               COMPUTE THE REACTIVE FORCES
00530*   DDIST(I),LOAD(I)  ---       THE DISTANCE EACH DISTRIBUTED LOAD SPANS, AN
00540*                               THE MAGNITUDE OF THE RESULTING FORCE
00550*      BIG              ---     GIVES THE LARGEST NUMBER OF ALL FORCE TYPES
00560*      ANS              ---     DENOTES IF USCS OR SI UNITS ARE DESIRED
00570*
00580*
00590*********************************************************************
00600**********                  MAIN PROGRAM                 ************
00610*********************************************************************
00620*
00630*         VARIABLE DECLARATIONS
00640*
00650     REAL E,INER,LEN,NUM,RCOORD1,RCOORD2,FCOORD(10),FMAG(10),MCOORD(10)
00660     REAL MMAG(10),DCOORD1(10),DCOORD2(10),DINT(10),DX,X,XX,VV1,VV2

00670     REAL VV3,VV4,VV5,VV6,SLF(10),SLD(10),SLM(10),DF(10),DD(10),DM(10)
00680     REAL SLR1,SLR2,DR1,DR2,R1,R2,SLFX,SLDX,SLMX,DFX,DDX,DMX
00690     REAL C1,C2,FSUM,MSUM,DDIST(10),LOAD(10),SL(100),D(100)
00700     INTEGER NF,ND,NM,BIG,ANS
00710*
00720*         INITIALIZING VARIABLES TO ZERO
00730*
00740     FCOORD(10)=0.0
```

```
00750       FMAG(10)=0.0
00760       MCOORD(10)=0.0
00770       MMAG(10)=0.0
00780       DCOORD1(10)=0.0
00790       DCOORD2(10)=0.0
00800       DINT(10)=0.0
00810       SLF(10)=0.0
00820       SLD(10)=0.0
00830       SLM(10)=0.0
00840       DF(10)=0.0
00850       DD(10)=0.0
00860       DM(10)=0.0
00870       SL(100)=0.0
00880       D(100)=0.0
00890       SLFX=0.0
00900       SLDX=0.0
00910       SLMX=0.0
00920       DFX =0.0
00930       DDX =0.0
00940       DMX =0.0
00950*
00960******      USER INPUT      *****
00970*
00980       PRINT*,'PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:'
00990       PRINT*,'1 - USCS'
01000       PRINT*,'2 - SI'
01010       PRINT*,' '
01020       PRINT*,'ENTER 1,2:'
01030       READ*,ANS
01040       IF (ANS.EQ.1) THEN
01050          PRINT*,'PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF POUND AND/OR INCH...'
01060       ELSE
01070          PRINT*,'PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF NEWTON AND/OR METER...
01080       ENDIF
01090*
01100
01110       PRINT*,' '
01120       PRINT*,'ENTER THE VALUES FOR E,I,LEN,NF,ND,NM,NUM:'
01130       READ(*,*)E,INER,LEN,NF,ND,NM,NUM
01140       PRINT*,' '
01150       PRINT*,'ENTER THE COORDINATES OF THE ALL FORCE TYPES AS DISTANCES'
01160       PRINT*,'FROM THE LEFT END OF THE BEAM...ALSO, CONSIDER FORCES'
01170       PRINT*,'DIRECTED DOWNWARD, AND MOMENTS ACTING CLOCKWISE AS POSITIVE
01180       PRINT*,' '
01190       PRINT*,'ENTER THE COORDINATES OF THE REACTION POINTS:'
01200       READ(*,*)RCOORD1,RCOORD2
01210       IF (NF.GT.0) THEN
01220       PRINT*,'ENTER THE COORDINATE AND MAGNITUDE OF ALL CONCENTRATED '
01230       PRINT*,'FORCES:'
01240       READ(*,*)(FCOORD(I),FMAG(I),I=1,NF)
01250       ENDIF
01260       IF (NM.GT.0) THEN
01270       PRINT*,'ENTER THE COORDINATE AND MAGNITUDE OF ALL CONCENTRATED '
01280       PRINT*,'MOMENTS:'
01290       READ(*,*)(MCOORD(I),MMAG(I),I=1,NM)
01300       ENDIF
01310       IF (ND.GT.0) THEN
01320       PRINT*,'ENTER THE FIRST AND SECOND COORDINATE AND THEN INTENSITY '
01330       PRINT*,'OF ALL DISTRIBUTED LOADS:'
01340       READ(*,*)(DCOORD1(I),DCOORD2(I),DINT(I),I=1,ND)
01350       ENDIF
01360*
01370******      END USER INPUT      *****
01380*
01390       PRINT*,'  '
01400       PRINT*,' THE MAGNITUDES OF THE TWO REACTIVE FORCES (LB OR  NEWTONS)
01410*
01420******      CALCULATIONS      ******
01430*
01440*
01450*            CALCULATING THE MAGNITUDE AND DIRECTION OF THE PIN REACTION
01460*            FORCES
01470*
01480       FSUM=0.0
01490       MSUM=0.0
01500       DO 15 I=1,ND
01510          DDIST(I)= DCOORD2(I) - DCOORD1(I)
01520          LOAD(I) = DINT(I)*DDIST(I)
01530          FSUM = LOAD(I) + FSUM
01540          MSUM =(((0.5*DDIST(I) + DCOORD1(I)) - RCOORD1) * LOAD(I)) + MSUM
01550 15    CONTINUE
01560       DO 20 I = 1,NF
01570          FSUM = FSUM + FMAG(I)
```

```
01580          MSUM =((FCOORD(I) - RCOORD1)*FMAG(I)) + MSUM
01590 20    CONTINUE
01600       DO 30 I = 1,NM
01610          MSUM = MSUM + MMAG(I)
01620 30    CONTINUE
01630       R2 = -(MSUM/(RCOORD2-RCOORD1))
01640       R1 = -(FSUM+R2)
01650*
01660*            PRINTING THE REACTION FORCES
01670*
01680       PRINT*,' '
01690       PRINT*,'R1 = ',R1,'        R2 = ',R2
01700       PRINT*,' '
01710*
01720*            CALCULATING THE LARGEST NUMBER OF EITHER FORCES, DISTRIBUTED
01730*            LOADS, OR MOMENTS
01740*
01750       IF (NF.GE.ND) THEN
01760          IF (NF.GE.NM) THEN
01770             BIG=NF
01780          ELSE
01790             BIG=NM
01800          ENDIF
01810       ELSE
01820          IF (ND.GE.NM) THEN
01830             BIG=ND
01840          ELSE
01850             BIG=NM
01860          ENDIF
01870       ENDIF
01880*
01890*
01900*       THE FOLLOWING SECTION OF THIS PROGRAM PERFORMS THE CALCULATIONS
01910*       THAT DETERMINE THE SLOPE AND DEFLECTION AT SEVERAL INTERVALS ALONG
01920*       THE BEAM. THE METHOD OF SINGULARITY FUNCTIONS AND INTEGRATION IS
01930*       EMPLOYED, AND THE PRINCIPAL OF SUPERPOSITION ALLOWS EACH TYPE OF
01940*       FORCE TO BE CONSIDERED SEPARATELY AND THEN SUMMED TO PRODUCE
01950*       THE NET EFFECT ON THE BEAM.
01960*
01970       DX=LEN/NUM
01980       J=1
01990 10    DO 50 XX=0,LEN,DX
02000          X=XX
02010*
02020*       THE FUNCTIONS ARE FIRST SOLVED FOR THE INITIAL CONDITIONS OF ZERO
02030*       DISPLACEMENT AT THE TWO PIN REACTION POINTS, RCOORD1 AND RCOORD2,
02040*       THAT THE CONSTANTS OF INTEGRATION MAY BE DETERMINED.
02050*
02060          IF (J.EQ.1) X=RCOORD1
02070          IF (J.EQ.2) X=RCOORD2
02080*
02090*    EVALUATING THE 'BRACKET TERMS' USED WITH THE SINGULARITY FUNCTIONS
02100*
02110          DO 60 I=1,BIG
02120             VV1=X-FCOORD(I)
02130             VV2=X-DCOORD1(I)
02140             VV3=X-DCOORD2(I)
02150             VV4=X-RCOORD1
02160             VV5=X-RCOORD2
02170             VV6=X-MCOORD(I)
02180*
02190*          RECALL, WITH SINGULARITY FUNCTIONS IF THE QUANTITY IN THE
02200*          BRACKETS IS LESS THAN OR EQUAL TO ZERO, THAT TERM MAKES NO
02210*          CONTRIBUTION TO THE SLOPE AND/OR DEFLECTION AT THAT POINT.
02220*
02230             IF (VV1.LE.0) VV1=0
02240             IF (VV2.LE.0) VV2=0
02250             IF (VV3.LE.0) VV3=0
02260             IF (VV4.LE.0) VV4=0
02270             IF (VV5.LE.0) VV5=0
02280             IF (VV6.LE.0) VV6=0
02290*
02300*         DETERMINING THE SLOPE AND DISPLACEMENT DUE TO EACH FORCE AT A
02310*         PARTICULAR POINT ON THE BEAM
02320*
02330             SLF(I) = FMAG(I)/2*(VV1**2)
02340             DF(I)  = FMAG(I)/6*(VV1**3)
02350
02360             SLD(I) = (DINT(I)/6*(VV2**3)) - (DINT(I)/6*(VV3**3))
02370             DD(I) = (DINT(I)/24*(VV2**4)) - (DINT(I)/24*(VV3**4))
02380
02390             SLM(I) = MMAG(I)*VV6
02400             DM(I)  = MMAG(I)/2*(VV6**2)
02410 60       CONTINUE
```

```
02420*
02430*      DETERMINING THE SLOPE AND DISPLACEMENT DUE TO THE REACTION FORCE
02440*      AT A PARTICULAR POINT ON THE BEAM
02450*
02460       SLR1 = R1/2 * (VV4**2)
02470       SLR2 = R2/2 * (VV5**2)
02480       DR1  = R1/6 * (VV4**3)
02490       DR2  = R2/6 * (VV5**3)
02500*
02510*      SUMMING THE EFFECTS OF ALL FORCE CONTRIBUTIONS OF THE SLOPE AND
02520*      DISPLACEMENT AT A PARTICULAR POINT ON THE BEAM
02530*
02540       DO 40 I=1,BIG
02550          SLFX= SLFX+ SLF(I)
02560          SLDX= SLDX+ SLD(I)
02570          SLMX= SLMX+ SLM(I)
02580          DFX = DFX + DF(I)
02590          DDX = DDX + DD(I)
02600          DMX = DMX + DM(I)
02610 40    CONTINUE
02620
02630       SL(J) = SLFX + SLDX + SLMX + SLR1 + SLR2
02640       D(J)  = DFX + DDX + DMX + DR1 + DR2
02650       J =J+1

02660*
02670*      SETTING THE SLOPE AND DISPLACEMENT SUMS BACK TO ZERO BEFORE
02680*      MOVING TO NEXT POINT ON BEAM
02690*
02700       SLFX=0.0
02710       SLDX=0.0
02720       SLMX=0.0
02730       DFX =0.0
02740       DDX =0.0
02750       DMX =0.0
02760       IF (J.EQ.3) GO TO 10
02770*
02780*      REPEAT THIS PROCEDURE FOR NEXT POINT ON BEAM
02790 50  CONTINUE
02800*
02810*         CALCULATING THE CONSTANTS OF INTEGRATION FROM THE INITIAL
02820*         CONDITIONS OF ZERO DISPLACEMENT AT THE PINS.
02830*
02840     C1 = (D(2) - D(1))/(RCOORD1 - RCOORD2)
02850     C2 =(-D(1) - (C1*RCOORD1))
02860
02870     X=0.0
02880*
02890*         FINALLY, DETERMINING THE SLOPE AND DISPLACEMENT AT EVERY POIN
02900*         BY CONSIDERING ALL THE FORCE CONTRIBUTIONS AT EACH RESPECTIVE
02910*         POINT, AND THE CONSTANTS OF INTEGRATION.
02920*
02930     DO 80 I=3,J-1
02940        SL(I) =(SL(I) + C1)/(E*INER)
02950        D(I)  =(D(I) + (C1*X) + C2)/(E*INER)
02960*       PRINT*,SL(I),D(I)
02970        X=X+DX
02980 80  CONTINUE
02990*
03000*       PRINTING THE SLOPE AND DELECTION AT INCREMENTS ALONG THE BEAM
03010*
03020     PRINT 82,'NODE','LOCATION','SLOPE','DEFLECTION'
03030     IF (ANS.EQ.1) THEN
03040        PRINT 83
03050     ELSE
03060        PRINT 84
03070     ENDIF
03080     X=0.0
03090*
03100     DO 85 I=3,J-1
03110        PRINT 90,I-2,X,SL(I),D(I)
03120        X=X+DX
03130 85  CONTINUE
03140*
03150*       FORMAT STATEMENTS
03160*
03170 82  FORMAT(//,2X,A4,5X,A8,5X,A5,6X,A10)
03180 83  FORMAT(3X,'NO',9X,'IN',8X,'IN/IN',10X,'IN')
03190 84  FORMAT(3X,'NO',9X,'M',9X,' M/M ',10X,'M')
03200 90  FORMAT(3X,I2,6X,F8.3,3X,E10.3,4X,E10.3)
03210     STOP
03220     END
```

题 10.17 如图 10-18 所示梁长 12 m，由两对刀口型支座支承，受集中力偶 8000 N·m和集中力 8500 N 作用。用题 10.16 的FORTRAN程序，将梁分为 25 段，计算梁的挠度。此梁截面为宽 60 mm、高280 mm 的矩形，材料的杨氏模量 $E=200$ GPa。

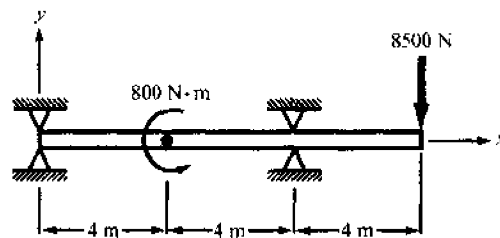


图 10-18

解 ☞ 程序输入数据如表 10-2 所示，

表 10-2

元素	SI 系统
E	200×10^{9}
I	$(0.06)(0.28)^3/12=109\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$
LEN	12
NF	1
ND	0
NM	1
NUM	25
RCOORD1	0
RCOORD2	8
FCOORD(I)	12
FMAG(I)	8500
MCOORD(I)	4
MMAG(I)	8000
DDCOORD1(I)	0
DDCOORD2(I)	0
DMAG(I)	0

输入这些参数后，程序运行结果如下：

```
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI

 ENTER 1.2:
? 2
 PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF NEWTON AND/OR METER...

 ENTER THE VALUES FOR E,I,LEN,NF,ND,NM,NUM:
? 200E+9,109E-6,12,1,0,1,25

 ENTER THE COORDINATES OF ALL THE FORCE TYPES AS DISTANCES
 FROM THE LEFT END OF THE BEAM...ALSO, CONSIDER FORCES
 DIRECTED DOWNWARD, AND MOMENTS ACTING CLOCKWISE AS POSITIVE.

 ENTER THE COORDINATES OF THE REACTION POINTS:
? 0,8

 ENTER THE COORDINATE AND MAGNITUDE OF ALL CONCENTRATED
 FORCES:
? 12,8500
 ENTER THE COORDINATE AND MAGNITUDE OF ALL CONCENTRATED
 MOMENTS:
? 4,8000

  THE MAGNITUDES OF THE TWO REACTIVE FORCES (LB OR NEWTONS):

 R1 = 5250.          R2 = -13750.

  NODE      LOCATION      SLOPE       DEFLECTION
   NO          M           M/M            M
```

```
 1        .000    -.294E-02     .000E+00
 2        .480    -.291E-02    -.140E-02
 3        .960    -.282E-02    -.278E-02
 4       1.440    -.269E-02    -.411E-02
 5       1.920    -.249E-02    -.535E-02
 6       2.400    -.224E-02    -.649E-02
 7       2.880    -.194E-02    -.750E-02
 8       3.360    -.158E-02    -.834E-02
 9       3.840    -.116E-02    -.900E-02
10       4.320    -.571E-03    -.943E-02
11       4.800     .132E-03    -.954E-02
12       5.280     .891E-03    -.929E-02
13       5.760     .171E-02    -.867E-02
14       6.240     .257E-02    -.765E-02
15       6.720     .350E-02    -.619E-02
16       7.200     .448E-02    -.428E-02
17       7.680     .552E-02    -.188E-02
18       8.160     .660E-02     .103E-02
19       8.640     .763E-02     .445E-02
20       9.120     .856E-02     .833E-02
21       9.600     .941E-02     .127E-01
22      10.080     .102E-01     .174E-01
23      10.560     .108E-01     .224E-01
24      11.040     .114E-01     .277E-01
25      11.520     .119E-01     .333E-01
26      12.000     .123E-01     .391E-01

SRU       1.284 UNTS.

RUN COMPLETE.
```

由输出结果，可知在力 8500 N·m 作用处挠度为 0.0391 m 或 39.1 mm；在力偶8000 N·m作用处，即在编号 9 和 10 之间，挠度大约为 − 0.0092 m或 − 9.2 mm。

题 10.18　如图 10-19 所示，惯性矩 $I = 3.375\ \text{in}^4$ 的矩形截面梁，长 100 in，截荷及支承如图。用题 10.16 的 FORTRAN 程序，将梁分为 50 段，试求其挠度。取 $E = 30 \times 10^6\ \text{lbf/in}^2$。

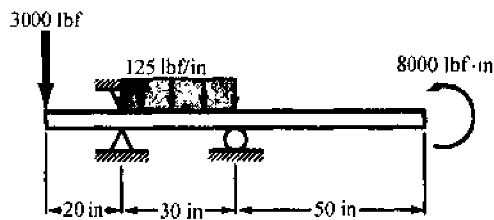


图 10-19

解　☞ 程序输入如表 10-3。

表 10-3

元素	SI 系统
E	30×10^6
I	3.375
LEN	100
NF	1
ND	1
NM	1
NUM	50
RCOORD1	20
RCOORD2	50
FCOORD(I)	0
FMAG(I)	3000
MCOORD(I)	100
MMAG(I)	−8000
DDCOORD1(I)	20
DDCOORD2(I)	50
DMAG(I)	125

输入这些参数后程序运行结果如下：

```
run
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 — USCS
 2 — SI

 ENTER 1.2:
? 1
 PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF POUND AND/OR INCH...

 ENTER THE VALUES FOR E,I,LEN,NF,ND,NM,NUM:
? 30E6,3.375,100,1,1,1,50

 ENTER THE COORDINATES OF ALL THE FORCE TYPES AS DISTANCES
 FROM THE LEFT END OF THE BEAM...ALSO, CONSIDER FORCES
 DIRECTED DOWNWARD, AND MOMENTS ACTING CLOCKWISE AS POSITIVE.

 ENTER THE COORDINATES OF THE REACTION POINTS:
? 20,50
 ENTER THE COORDINATE AND MAGNITUDE OF ALL CONCENTRATED
 FORCES:
? 0,3000
 ENTER THE COORDINATE AND MAGNITUDE OF ALL CONCENTRATED
 MOMENTS:
? 100,-8000
 ENTER THE FIRST AND SECOND COORDINATE AND THEN MAGNITUDE
 OF ALL DISTRIBUTED LOADS:
? 20,50,125

   THE MAGNITUDES OF THE TWO REACTIVE FORCES (LB OR NEWTONS):

 R1 = -7141.666666667          R2 = 391.6666666667
  NODE      LOCATION      SLOPE      DEFLECTION
   NO          IN         IN/IN          IN
    1          .000     -.101E-01      .162E+00
    2         2.000     -.100E-01      .142E+00
    3         4.000     -.983E-02      .122E+00
    4         6.000     -.953E-02      .103E+00
    5         8.000     -.912E-02      .838E-01
    6        10.000     -.859E-02      .661E-01
    7        12.000     -.793E-02      .496E-01
    8        14.000     -.716E-02      .345E-01
    9        16.000     -.628E-02      .210E-01
   10        18.000     -.527E-02      .943E-02
   11        20.000     -.414E-02      .000E+00
   12        22.000     -.304E-02     -.715E-02
   13        24.000     -.209E-02     -.123E-01
   14        26.000     -.128E-02     -.156E-01
   15        28.000     -.605E-03     -.175E-01
   16        30.000     -.556E-04     -.181E-01
   17        32.000      .380E-03     -.178E-01
   18        34.000      .710E-03     -.166E-01
   19        36.000      .946E-03     -.150E-01
   20        38.000      .110E-02     -.129E-01
   21        40.000      .117E-02     -.106E-01
   22        42.000      .119E-02     -.826E-02
   23        44.000      .114E-02     -.592E-02
   24        46.000      .106E-02     -.371E-02
   25        48.000      .933E-03     -.172E-02
   26        50.000      .784E-03      .000E+00
   27        52.000      .626E-03      .141E-02
   28        54.000      .468E-03      .250E-02
   29        56.000      .310E-03      .328E-02
   30        58.000      .152E-03      .374E-02
   31        60.000     -.617E-05      .389E-02
   32        62.000     -.164E-03      .372E-02
   33        64.000     -.322E-03      .323E-02
   34        66.000     -.480E-03      .243E-02
   35        68.000     -.638E-03      .131E-02
   36        70.000     -.796E-03     -.123E-03
   37        72.000     -.954E-03     -.187E-02
```

38	74.000	-.111E-02	-.394E-02
39	76.000	-.127E-02	-.632E-02
40	78.000	-.143E-02	-.902E-02
41	80.000	-.159E-02	-.120E-01
42	82.000	-.174E-02	-.154E-01
43	84.000	-.190E-02	-.190E-01
44	86.000	-.206E-02	-.230E-01
45	88.000	-.222E-02	-.273E-01
46	90.000	-.238E-02	-.319E-01
47	92.000	-.253E-02	-.368E-01
48	94.000	-.269E-02	-.420E-01
49	96.000	-.285E-02	-.475E-01
50	98.000	-.301E-02	-.534E-01
51	100.000	-.317E-02	-.596E-01

SRU　　1.305 UNTS.

RUN COMPLETE.

10.2 习　题

题 10.19　如图 10-20 所示悬臂梁 ABC，在梁的右半部分受集度为 w 的均布荷载作用，用奇异函数法求梁的挠曲线方程及 C 点的挠度。（答案：$EIy=\frac{wL}{12}\langle x\rangle^3-\frac{3}{8}wL^2\frac{\langle x\rangle^2}{2}-\frac{w}{24}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4$，$EIy\big|_{x=L}=\frac{41}{384}wL^4$）

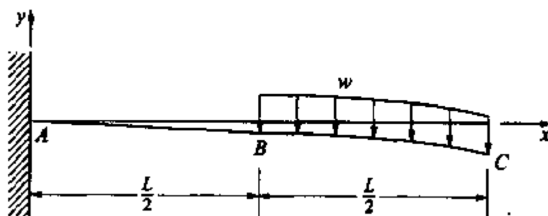


图 10-20

题 10.20　考虑如图 10-21 所示的简支梁，在梁的一部分作用有均布载荷。用奇异函数法确定挠曲线方程。（答案：$EIy=\frac{wb}{6L}\left(\frac{b}{2}+c\right)\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4+\frac{w}{24}\langle x-a-b\rangle^4+\left\{\frac{w}{24L}\left[(L-a)^4-(L-c)^4\right]-\frac{wbL}{6}\left(\frac{b}{2}+c\right)\right\}\langle x\rangle$）

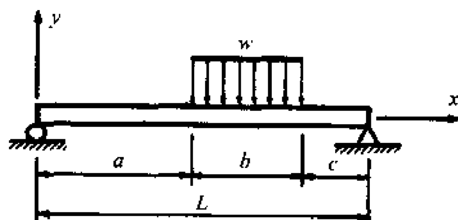


图 10-21

题 10.21　如图 10-22 所示梁 $ABCD$ 在 B 点为铰链、在 C 点为铰辊支承，每端各作用一力 P。用奇异函数法确定梁的挠曲线（挠曲线关于梁中点对称），并求 A 点的挠度。

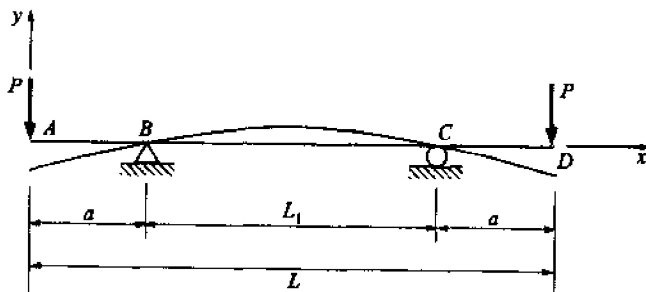


图 10-22

(答案：$EIy=-\frac{P}{6}\langle x\rangle^3+\frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3+\frac{P}{6}\langle x\cdot(a+L_1)\rangle^3+\left(\frac{PLa}{2}-\frac{Pa^2}{2}\right)\langle x\rangle$

$EIy|_{x=0}=\frac{2}{3}Pa^3-\frac{PLa^2}{2}$)

用奇异函数法求题 10.22 至题 10.25 中各梁的挠曲线方程。

题 10.22 见图 10-23。(答案：$EIy=-\frac{wa}{24}\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x\rangle^4+\frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4+\frac{wa^2}{2}\langle x-a\rangle^2+\frac{9}{24}wa\langle x-2a\rangle^3-\frac{wa}{6}\langle x-3a\rangle^3+\frac{11}{48}wa^3\langle x\rangle^1$)

题 10.23 见图 10-24。(答案：$EIy=\frac{wL}{24}\langle x\rangle^3-\frac{w}{24}\langle x\rangle^4+\frac{w}{12}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4+\frac{wL^3}{192}\langle x\rangle^1$)

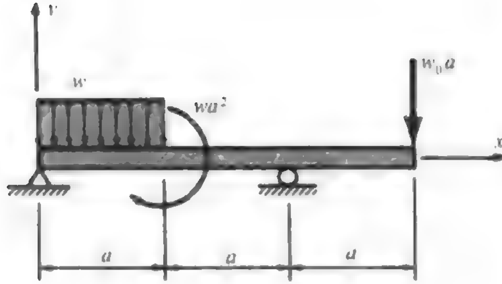


图 10-23

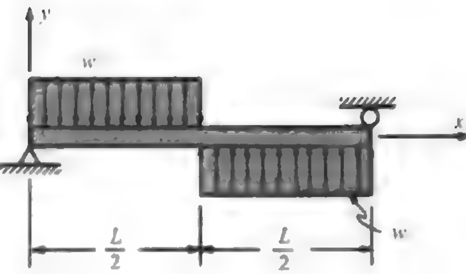


图 10-24

题 10.24 见图 10-25。(答案：$EIy=\frac{w_0L}{24}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4+\frac{w_0}{60L}\langle x\rangle^5-\frac{w_0}{10L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^5-\frac{3}{192}w_0L^3x$)

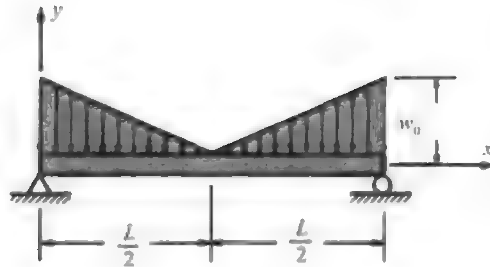


图 10-25

题 10.25 见图 10-26。(答案：$EIy=-\frac{850}{3}\langle x\rangle^3+3300\langle x-3\rangle^2-\frac{500}{12}\langle x-6\rangle^4+\frac{500}{12}\langle x-9\rangle^4+\frac{2350}{3}\langle x-9\rangle^3+10175x$)

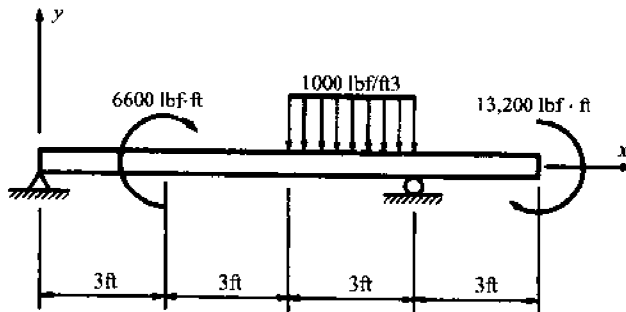


图 10-26

题 10.26 如图 10-27 所示梁 AC，长 15 ft，矩形截面为 3 in × 4 in，作用有均布力 120 lbf/ft；$E=30\times10$ lbf/in²。用题 10.16 的 FORTRAN 程序求(a)梁左端的挠度(b)梁的最大挠度。(答案：(a)0.065 in，(b)在 $x=110$ in 处，-0.10 in。)

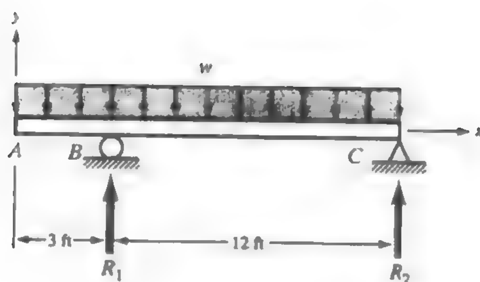


图 10-27

题 10.27　如图 10-28 所示，外伸梁 *ABC* 在 *B* 处和 *C* 处铰支，承受三角形分布载荷作用。用奇异函数法求挠曲线方程。（答案：$EIy=-\dfrac{w_0\langle x\rangle^5}{180L}+\dfrac{w_0L}{16}\left\langle x-\dfrac{L}{2}\right\rangle^3-0.02050w_0L^3x+0.01042w_0L^4$）

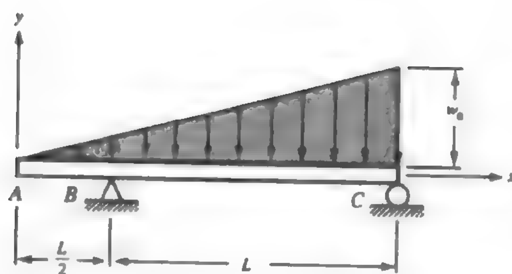


图 10-28

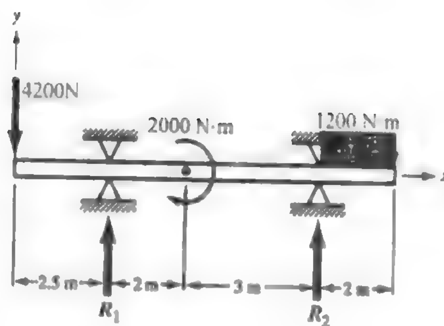


图 10-29

题 10.28　如图 10-29 所示简支外伸梁，作用有集中力、力偶和分布力。材料的杨氏模量 $E=200$ GPa，梁横截面 $I=20\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$。用题 10.16 的 FORTRAN 程序求在集中力 4200 N 作用点处的挠度。（答案：19.8 mm）

第 11 章 超静定弹性梁

11.1 静定梁

第 8、9 和 10 章中，曾经求解了各种载荷条件、各种支承与约束条件梁的挠度和应力。在所处理的情况中，总是只依据静力学平衡方程就可以完全确定作用于梁上的约束反力。这些情况下的梁称为静定的。

11.2 超静定梁

在本章中，我们将考虑那些未知约束反力数目多于系统有效平衡方程数目的梁。这种情况下，就必须使用基于梁形变的附加方程来补充平衡方程。此种情况的梁称为超静定的。

11.3 超静定梁的分类

下面将列举常见的几种超静定梁，尽管在实际中有各种各样的超静定结构，但是下面的四个简图将能说明超静定梁的本质特征。对于下面列举的梁，每一种情况的约束反力都构成一个平行力系，因此只有两个有效的静力学平衡方程。因此，对于每种情况要确定约束反力，就必须使用根据梁的形变得出的附加方程。

对于一端固定、另端铰支的情况（如图 11-1 所示），有时称之为简支悬臂梁，未知的约束反力有 R_1、R_2 和 M_1，必须用一个基于形变的方程，补充两个静力学平衡方程。作为应用，见题 11.1 和题 11.3。

在图 11-2 中，梁的一端固定，另一端用可伸缩的弹簧支承，对于这类简单的线性弹簧，弹性支座的约束反力与该支座处的挠度成比例。未知反力也是 R_1、R_2 和 M_1，必须用一个基于形变的方程来补充两个静力学平衡方程。作为应用见题 11.2 和 11.16。

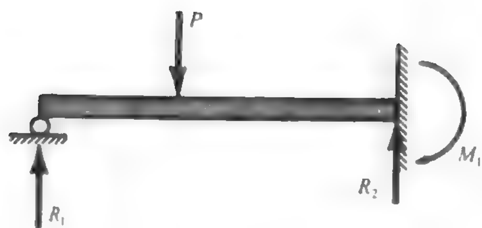


图 11-1

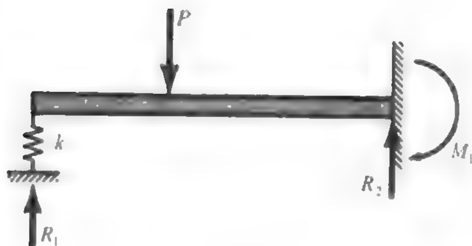


图 11-2

在图 11-3 中，两端固支或夹支梁的约束反力为 R_1、R_2、M_1 和 M_2。必须用两个基于形变的方程来补充两个静力平衡方程。作为应用，见题 11.4，题 11.6 和题 11.12。

图 11-4 的梁在同一水平线上三点支承，未知反力有 R_1、R_2 和 R_3，必须用一个基于形变的方程来补充两个静力平衡方程，这种多于两个支承的梁称为连续梁。

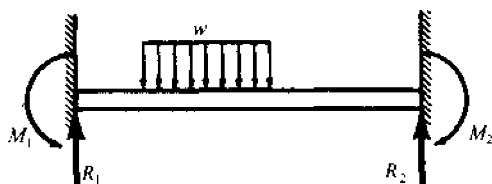


图 11-3

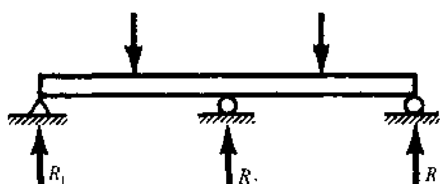


图 11-4

11.4 例　题

题 11.1　一梁 A 处固支、B 处简支，承受如图 11-5 所示的集中力作用。试求所有的约束反力。

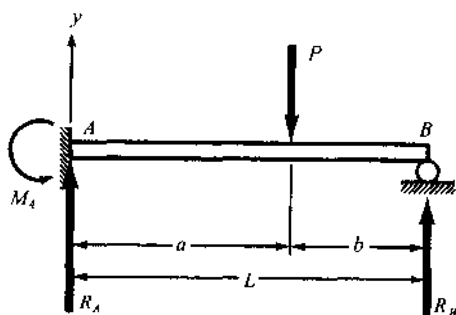


图 11-5

解 ☞ 约束反力有 R_A、R_B 和 M_A，由静力学平衡方程，有

$$\sum M_A = M_A - P_a + R_bL = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = R_A + R_B - P = 0 \qquad (2)$$

于是，有三个未知数 R_A、R_B 和 M_A，但只有两个方程。因此必须补充一个基于形变的方程，用奇异函数法来写出梁的挠曲线微分方程，即

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = R_A\langle x\rangle - M_A\langle x\rangle^0 - P\langle x-a\rangle^1 \qquad (3)$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - M_A\langle x\rangle - \frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_1 \qquad (4)$$

第一个边界条件，在 $x=0$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，因此 $C_1=0$。再积分一次得

$$EIy = \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{P}{2}\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} + C_2 \qquad (5)$$

第二个边界条件，在 $x=0$ 处，$y=0$，因此有 $C_2=0$。

第三个边界条件，在 $x=L$ 处，$y=0$。将此条件代入(5)式，有

$$0 = \frac{R_AL^3}{6} - \frac{M_AL^2}{2} - \frac{Pb^3}{6} \qquad (6)$$

联立求解三个方程(1)式，(2)式和(6)式，可以得到

$$R_A = \frac{Pb}{2L^3}(3L^2 - b^2)$$

$$R_B = \frac{Pa^2}{2L^3}(2L + b)$$

$$M_A = \frac{Pb}{2L^2}(L^2 - b^2)$$

题 11.2　如图 11-6 所示，梁 AB 在 A 处固定，B 处为弹簧支承，并承受集度为 w 的均布载荷作用。在载荷作用前，弹簧是自由的。弹簧的劲度系数为 345 kN/m 。为了确定梁的弯曲刚度 EI，做一个实验：对于既没有均布载荷 w，也没有弹簧的情况，若 B 处作用一铅直力 1000 N，则在该点产生 50 mm 的挠度。然后在 B 处安装弹簧，并在 A 与 B 之间承受集度为 5 kN/m 的均布载荷。求此种条件下 B 点的挠度。

解 ☞ 当梁作用有均布载荷并在 B 端有弹簧支承时，作用于梁上的反力如图 11-6 所示。反力 R_B 表示由弹簧施加于梁上的力，用奇异函数表示的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -M_A\langle x\rangle^0 + R_A\langle x\rangle^1 - \frac{w}{2}\langle x\rangle^2 \qquad (1)$$

积分一次,得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A\langle x\rangle^1 + \frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{w}{6}\langle x\rangle^3 + C_1 \quad (2)$$

引入边界条件,在 $x=0$ 处,$dy/dx=0$,由(2)式可得 $C_1=0$。再积分一次得

$$EIy = -\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle x\rangle^4 + C_2 \quad (3)$$

图 11-6

第二个边界条件,在 $x=0$ 处,$y=0$,由(3)式得 $C_2=0$。由(3)式还可得到由于均布载荷作用和弹簧支承在 B 点处的挠度为

$$EIy|_{x=L} = -\frac{M_AL^2}{2} + \frac{R_AL^3}{6} - \frac{wL^4}{24} \quad (4)$$

由于弹簧线性作用,可得一般关系式,为

$$R_B = -ky|_{x=L} = +k\Delta B \quad (5)$$

而且,对于该平行力系有两个平衡方程

$$\sum M_A = M_A + R_BL - \frac{wL^2}{2} = 0 \quad (6)$$

$$\sum F_y = R_A + R_B - (5000\ \text{N/m})(3\ \text{m}) = 0 \quad (7)$$

联立求解(4)、(6)和(7)式,得

$$R_A\left(\frac{EI}{k} + \frac{L^3}{3}\right) = \frac{EIwL}{k} + \frac{5wL^4}{24} \quad (8)$$

利用试验结果很容易求得梁的弯曲刚度 EI。注意到悬臂梁在自由端集中力作用下,自由端处的挠度为 $PL^3/(3EI)$,对于该实验,有

$$0.050\ \text{m} = \frac{(10000\ \text{N})(3\ \text{m})^3}{3EI}$$

由此得

$$EI = 1.8\times10^6\ \text{N}\cdot\text{m}^2 \quad (9)$$

将此值及劲度系数 345000 N/m 一起代入(8)式,得 $R_A=11440$ N。

由(7)式得 $R_B=3560$ N。因此由弹簧方程(5)式得 B 点的挠度为

$$\Delta_B = \frac{3560\ \text{N}}{345000\ \text{N/m}} = 0.01032\ \text{m}, \quad 或 \quad 10.3\ \text{mm} \quad (10)$$

题 11.3　考虑图 11-7 所示的悬臂梁,求 B 处的约束反力。

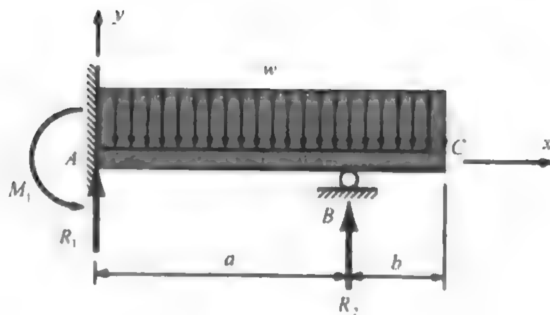


图 11-7

解　☞ 有两个静力学平衡方程

$$\sum M_A = M_1 + R_2a - \frac{w(a+b)^2}{2} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = R_1 + R_2 - w(a+b) = 0 \quad (2)$$

用奇异函数法写出梁的挠曲线微分方程

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_1\langle x\rangle^0 + R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w}{2}\langle x\rangle^2 + R_2\langle x-a\rangle^1 \tag{3}$$

注意，在(3)式中 M_1 前的负号，是因为从原点 A 开始自左向右计算时，约束反力矩 M_1 使 A 点右侧部分的梁产生向下的凹形弯曲。根据第 6 章的弯矩符号规则，这种弯矩应是负的。

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_1\langle x\rangle^1 + \frac{R_1}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{w}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{R_2}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_1 \tag{4}$$

在 $x=0$ 处，$dy/dx=0$，因此 $C_1=0$。再积分一次，有

$$EIy = -\frac{M_1}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{R_1}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{w}{24}\langle x\rangle^4 + \frac{R_2}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_2 \tag{5}$$

在 $x=0$ 处，$y=0$；故 $C_2=0$。

因为 B 处的支座不沉降，所以(5)式中 $x=a$ 时，应有 $y=0$；将此条件代入(5)式，有

$$0 = -\frac{M_1a^2}{2} + \frac{R_1a^3}{6} - \frac{wa^4}{24},\quad 由此得\quad M_1 = R_1\frac{a}{3} - \frac{wa^2}{12}$$

将此方程与静力学平衡方程联立求解，有

$$R_1 = \frac{5}{8}wa - \frac{3wb^2}{4a}$$

$$R_2 = \frac{3}{8}wa + wb + \frac{3wb^2}{4a}$$

题 11.4　两端固支梁如图 11-8 所示，作用一力偶 M_0，求所有的约束反力。

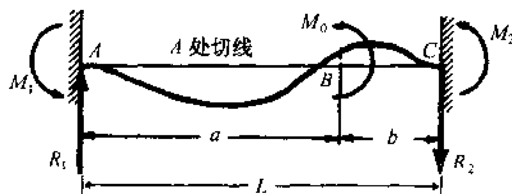


图 11-8

解 ☞ 在此力偶作用下，原始直梁弯曲成如图所示的曲线形状，挠曲后 A 点和 C 点处的切线仍为水平，而且在这两点处铅直位移为零。根据竖向平衡条件，知由此引起图示两端铅直约束反力(剪力)的数值是相等的。因此只有一个静力学平衡方程，即

$$\sum M_A = -M_1 - M_2 - M_0 + R_1(a+b) = 0 \tag{1}$$

此式中包含未知数 R_1、M_1 和 M_2。由于已没有可利用的静力学平衡方程，所以必须对(1)式补充两个基于体系形变的附加方程。利用奇异函数法写出梁上任一点的弯矩方程为

$$M = -M_1\langle x\rangle^0 + R_1\langle x\rangle - M_0\langle x-a\rangle^0 \tag{2}$$

梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_1\langle x\rangle^0 + R_1\langle x\rangle - M_0\langle x-a\rangle^0 \tag{3}$$

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_1\langle x\rangle^1 + R_1\frac{\langle x\rangle^2}{2} - M_0\langle x-a\rangle^1 + C_1 \tag{4}$$

第一个边界条件：在 $x=0$ 处，$dy/dx=0$；因此由(4)式得 $C_1=0$。再积分一次，有

$$EIy = -M_1\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_1}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - M_0\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} + C_2 \tag{5}$$

第二个边界条件：在 $x=0$ 处，$y=0$；将其代入(5)式，得 $C_2=0$。

第三个边界条件：在 $x=L$ 处，$dy/dx=0$，由(4)式得

$$0 = -M_1L + \frac{R_1L^2}{2} - M_0b \tag{6}$$

第四个即最后一个边界条件：在 $x=L$ 处，$y=0$。由(5)式得

$$0 = -\frac{M_1}{2}L^2 + \frac{R_1}{2}\cdot\frac{L^3}{6} - M_0\frac{b^2}{2} \tag{7}$$

现在可以联立求解(1)、(6)和(7)式，得所要求的约束反力为

$$R_1 = \frac{6M_0ab}{L^3}$$

$$M_1 = \frac{M_0(2ab - b^2)}{L^2}$$
$$M_2 = \frac{M_0(2ab - a^2)}{L^2} \tag{8}$$

可能想当然地认为在力偶作用点 B 处的挠度为零，事实上没有理由作出这样的判断。再返回到挠度方程(5)式，并计算在 $x = a$ 处的挠度，为

$$EI[y]_{x=a} = \frac{M_0a^2(2ab - a^2)}{2L^2} + \frac{M_0a^2b}{L^3} \tag{9}$$

显然 B 点处的挠度不等于零。

题 11.5 如图 11-9(a)所示水平简支梁，在其中点处与一铅直的，由铜和铝制成的组合弹性杆相连，组合杆下端支承在基础上。梁支座和铜杆的顶部初始时在同一水平线上，且当时梁也是水平的。然后竖直杆的温度降低 40℃，求每根竖直杆的应力。忽略梁和杆的重量。铜杆的横截面积为 500 mm^2，$E_{Cu} = 100$ GPa，$\alpha_{Cu} = 20 \times 10^{-6}$/℃，铝杆的横截面积为 1000 mm^2，$E_{Al} = 70$ GPa，$\alpha_{Al} = 25 \times 10^{-6}$/℃。对于梁，$E = 10$ GPa，$I = 400 \times 10^6$ mm^4。

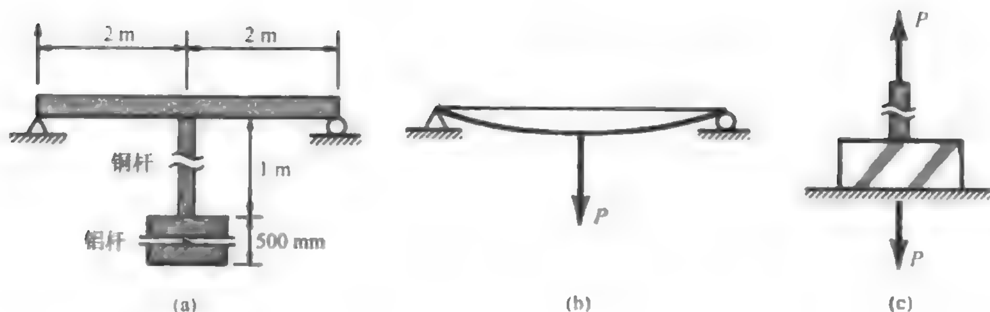


图 11-9

解 ☞ 水平梁的分离体简图如图 11-9(b)所示。图中 P 表示铜杆作用于梁上的力，开始时该力为未知，所以梁上作用有三个力，但平行力系只有两个平衡方程。因此本题是超静定的，必须考虑体系的形变。最简单的方法就是暂时切断梁与铜杆的连接，让竖直杆自由收缩，组合竖直杆的自由体简图如图 11-9(c)所示。如果没有水平梁的约束，因为温度降低铜杆的缩短为

$$\Delta_{Cu} = (20 \times 10^{-6})(10^3)(40) = 0.8(\text{mm})$$

铝杆的缩短为

$$\Delta_{Al} = (20 \times 10^{-6})(500)(40) = 0.5(\text{mm})$$

但是，梁给铜杆作用一张力 P，同时铝杆也受到同样的力作用；如图 11-9(c)所示。该张力使铅直杆伸长，伸长量(见题 1.1)为

$$\frac{P(10^3)(10^6)}{500(100 \times 10^9)} + \frac{P(500)(10^6)}{10^3(70 \times 10^9)}$$

水平梁受铜杆向下的力 P 作用产生一铅直挠度，在题 9.12 中知该梁中点挠度为 $\Delta = PL^3/48EI$。

当然，在实际问题中铜杆和水平梁间的连接并未切断，因而铅直杆的总缩短量应等于梁中点向下的铅直挠度。铅直杆长度的改变一部分由温度的下降引起，一部分由作用于它上的轴力引起。根据铅直杆的缩短等于梁的挠度，可有

$$(0.8 + 0.5) - \left[\frac{P(10^3)(10^6)}{500(100 \times 10^9)} + \frac{P(500)(10^6)}{10^3(70 \times 10^9)}\right] = \frac{P(4 \times 10)^3(10^6)}{48(10 \times 10^9)(400 \times 10^6)}$$

解得，$P = 3.61$ kN。那么铜杆中的应力为

$$\sigma_{Cu} = 3.61 \times 10^3/500 = 7.22(\text{MPa})$$

铝杆中的应力为

$$\sigma_{Al} = 3.61 \times 10^3/1000 = 3.61(\text{MPa})$$

题 11.6 如图 11-10 所示梁，两端固支，弯曲刚度为 EI。在 BC 区段上作用有均布载荷 w，

BC 区段长度为 $0.6L$。求所有的约束反力。

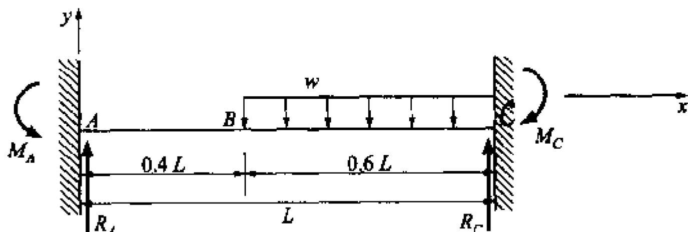


图 11-10

解 ☞ 在 A 和 C 端支座处作用有图示的弯矩 M_A、M_C 和剪力 R_A、R_C。本题的平行力系只有两个静力学平衡方程，因而要补充一个基于梁形变的附加条件。

用奇异函数法可以很方便地写出梁 ABC 上的弯矩方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -M_A\langle x\rangle^0 + R_A\langle x\rangle - \frac{w\langle x-0.4L\rangle^2}{2} \tag{1}$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -M_A\langle x\rangle^1 + R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{w}{2}\frac{\langle x-0.4L\rangle^3}{3} + C_1 \tag{2}$$

式中 C_1 为积分常数，作为第一个边界条件，在 $x=0$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$。将之代入(2)式，得到

$$0 = -0+0-0+C_1, \qquad 即\ C_1 = 0$$

第二个边界条件，在 $x=L$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，代入式(2)，得到

$$0 = -M_AL + \frac{R_AL^3}{2} - \frac{w}{6}(0.6L)^3 \tag{3}$$

然后对(2)式再积分一次，得到

$$EIy = -M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{w}{6}\frac{\langle x-0.4L\rangle^4}{4} + C_2 \tag{4}$$

第三个边界条件，在 $x=0$ 处，$y=0$。故由(4)式得 $C_2=0$。第四个边界条件，在 $x=L$ 处，$y=0$。故由(4)式得

$$0 = -\frac{M_AL^2}{2} + \frac{R_AL^3}{6} - \frac{w}{24}(0.6L)^4 \tag{5}$$

令由(3)式和(5)式得出的 M_A 相等，即得到一个仅含未知量 R_A 的方程。解该方程得

$$R_A = wL\left\{(0.6)^3 - \frac{(0.6)^4}{2}\right\} = 0.1512wL$$

将此值代入(3)式，得 $M_A = 0.0396wL^2$

由静力学平衡方程知

$$\sum F_y = (0.6L)w + 0.1512wL + R_C = 0, \quad 解出\ R_C = 0.4488wL$$

$$\sum M_A = -0.0396wL^2 - M_C + (0.4488wL)(L) - [w(0.6L)](0.7L) = 0$$

解出：

$$M_C = 0.0684wL^2$$

题 11.7　如图 11-11 所示，弯曲刚度为 EI 的梁在 A 端为固支，B 端为刀口支座支承，在 C 点作用一铅直力 P。求 C 点的挠度。

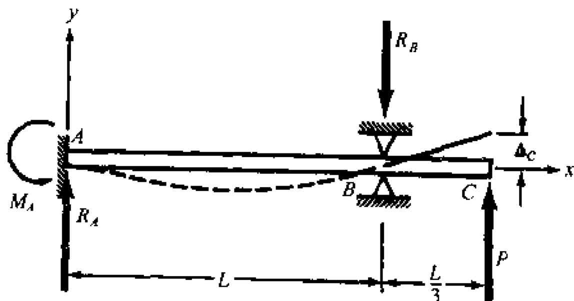


图 11-11

解 ☞ A 处的约束反力有力矩 M_A 和剪力 R_A，如图 11-11 所示，由静力学平衡方程，有

$$\sum M_A = M_A + P\left(\frac{4L}{3}\right) - R_B(L) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R_A + P - R_B = 0 \tag{2}$$

这两个方程中包含三个未知数 M_A、R_A 和 R_B，因此必须补充一个基于梁形变的方程。利用图示的 xy 坐标系，用奇异函数法写出梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_A\langle x\rangle^0 + R_A\langle x\rangle^1 - R_B\langle x-L\rangle^1 \tag{3}$$

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A\langle x\rangle^1 + R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - R_B\frac{\langle x-L\rangle^2}{2} + C_1 \tag{4}$$

式中 C_1 为积分常数，作为第一个边界条件：在 $x=0$ 处，$dy/dx=0$。故由(4)式得 $C_1=0$，再积分一次，得

$$EIy = -M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{R_B}{2}\frac{\langle x-L\rangle^3}{3} + C_2 \tag{5}$$

式中常数 C_2 由第二个边界条件确定，即在 $x=0$ 处，$y=0$；所以 $C_2=0$。

根据在 B 点处挠度为零引出第三个边界条件，即在 $x=L$ 处，$y=0$，代入(5)式，有

$$0 = -\frac{M_AL^2}{2} + \frac{R_AL^3}{6} - 0 \tag{6}$$

联立求解(1)、(2)和(6)式，有

$$R_A = \frac{3M_A}{L} = \frac{P}{2},\quad M_A = \frac{PL}{6},\quad R_B = \frac{3P}{2} \tag{7}$$

将这些值代入(5)式，并令 $x=4L/3$(C 点)，有

$$EI\Delta_C = 0.0401PL^3 \tag{8}$$

题 11.8 在题 11.7 中，若梁为工字型截面 W6×5 $\frac{1}{2}$，长为 10 ft，欲使自由端 C 处的挠度为 0.2 in，求所需要的力 P。

解 ☞ 由题 11.7 中的(8)式，可有自由端 C 的挠度 Δ_C

$$EI\Delta_C = 0.0401PL^3$$

对于该截面型号，由表 8-1 查得 $I=28.1\text{in}^4$，代入上式有

$$(30\times10^6\ \text{lbf/in}^2)(28.1\ \text{in}^4)(0.2\ \text{in}) = 0.0401P(120\ \text{in})^3$$

解得 $P=2430$ lbf

题 11.9 如图 11-12 所示，弯曲刚度为 EI 的梁，在 A 端固定，C 端简支，B 处作用一力偶，同时 BC 区段上作用有均布荷载 w。求所有的约束反力。

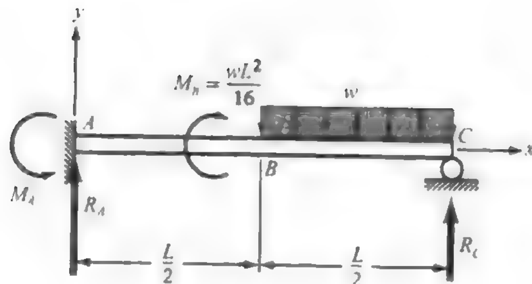


图 11-12

解 ☞ 固定端 A 处的约束反力有力偶 M_A 和剪力 R_A，由静力学平衡方程，可知对于该平行力系有两个平衡方程

$$\sum M_A = M_A - \frac{wL^2}{16} - \left(w\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3L}{4}\right) + R_C(L) = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R_A + R_C - \frac{wL}{2} = 0 \tag{2}$$

这两个方程包含三个未知数 M_A、R_A 和 R_C，因此必须补充一个基于系统形变的方程。

对于图示 $x\,y$ 坐标系，用奇异函数法写出梁的挠曲线微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_A\langle x\rangle^0 + R_A\langle x\rangle^1 + M_B\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^0 - \frac{w}{2}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^2 \tag{3}$$

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A\langle x\rangle^1 + R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} + M_B\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^1 - \frac{w}{2}\frac{\langle x-L/2\rangle^3}{3} + C_1 \tag{4}$$

式中 C_1 为积分常数，第一个边界条件：在 $x=0$ 处，$dy/dx=0$。将此条件代入(4)式，得 $C_1=0$，再积分一次，得

$$EIy = -M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} + M_B\frac{\langle x-L/2\rangle^2}{2} - \frac{w}{6}\frac{\langle x-L/2\rangle^4}{4} + C_2 \tag{5}$$

式中 C_2 为另一积分常数，第二个边界条件：A 点处，即在 $x=0$ 处，$y=0$。由(5)式得 $C_2=0$。第三个边界条件：C 点处，即 $x=L$ 处，$y=0$。将其代入(5)式，得

$$-\frac{M_AL^2}{2} + \frac{R_AL^3}{6} + \frac{M_B}{2}\cdot\frac{L^2}{4} - \frac{w}{24}\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^4 = 0 \tag{6}$$

联立求解(1)、(2)和(6)式，得

$$M_A = \frac{3}{64}wL^2,\quad R_A = \frac{7}{64}wL,\quad R_C = \frac{25}{64}wL \tag{7}$$

题 11.10　若题 11.9 中梁的材料为钛，杨氏模量为 110 GPa，矩形截面为 200 mm×30 mm，梁长 2 m，BC 段作用有均布力 960 N/m。求中点 B 处的挠度。

解　☞ 由题 11.9 中的(5)式，中点 B 的挠度为

$$\begin{aligned} EIy\big|_{x=L/2} &= -\frac{M_A}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{R_A}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 \\ &= -\frac{3}{64}wL^2\left(\frac{L^2}{8}\right) + \frac{7}{64}wL\left(\frac{L^3}{48}\right) \\ &= -\frac{11}{(48)(64)}wL^4 = -0.00358wL^4 \end{aligned} \tag{1}$$

对于该梁

$$I = \frac{1}{12}(0.020\ \text{m})(0.030\ \text{m})^3 = 0.045\times10^{-6}\ \text{m}^4$$

因此(1)式成为

$$(110\times10^9\ \text{N/m}^2)(0.045\times10^{-6}\ \text{m}^4)[y]_{x=L/2} = -0.00358(960\ \text{N/m})\ (2\ \text{m})^4$$

解得

$$y\big|_{x=L/2} = -11.1\ \text{mm}$$

题 11.11　梁 AB 的弯曲刚度为 EI，A 端铰支，B 端固定。受图 11-13 所示的均匀变化分布载荷作用。试用奇异函数法求 A 和 B 端的约束反力。

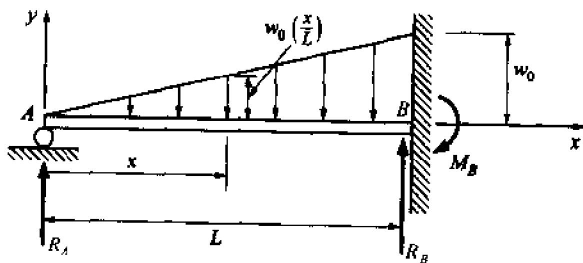


图 11-13

解　☞ 我们用 R_A 表示 A 端的铅直反力，用 R_B 表示 B 端的铅直反力，用 M_B 表示固定端作用于梁的弯矩，如图 11-13 所示。本书中与此相关的问题有题 10.5，那里曾按下面的过程讨论：

首先写出由分布力引起的距 A 支座为 x 的任意点处弯矩为

$$M = R_A\langle x\rangle - w_0\left(\frac{x}{L}\right)(x)\left(\frac{1}{2}\right)\left\langle\frac{x}{3}\right\rangle$$

因此

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = R_A\langle x\rangle - \frac{w_0\langle x\rangle^3}{6L} \tag{1}$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{w_0}{6L}\frac{\langle x\rangle^4}{4} + C_1 \tag{2}$$

在 $x=L$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，故由(2)式得

$$0 = R_A\frac{L^2}{2} - \frac{w_0L^3}{24} + C_1 \tag{3}$$

再积分一次，得

$$EIy = \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{w_0}{24L}\frac{\langle x\rangle^5}{5} + C_1\langle x\rangle + C_2 \tag{4}$$

在 $x=L$ 处，$y=0$，故由(4)式，得

$$0 = \frac{R_AL^3}{2} - \frac{w_0L^4}{120} + C_1L + C_2 \tag{5}$$

而且，在 $x=0$ 处，$y=0$，所以由(4)式有 $C_2=0$。

由(3)和(5)式，有

$$C_1 = \frac{w_0L^3}{24} - \frac{R_AL^2}{2} = -\frac{R_AL^2}{6} + \frac{w_0L^3}{120} \tag{6}$$

解得，

$$R_A = \frac{1}{10}w_0L \tag{7}$$

对于该力系有两个静力学平衡方程

$$\sum F_y = R_A + R_B - \frac{w_0L}{2} = 0$$

$$\sum M_B = -R_AL - M_B + \left(\frac{w_0}{2}\right)(L)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

解得

$$R_B = \frac{2}{5}w_0L,\quad M_B = \frac{1}{15}w_0L^2$$

题 11.12 梁 AC 如图 11-14 所示，两端均为固支，在 B 点作用一集中力 P。求所有的约束反力，B 处的挠度以及 B 点左侧区段内的最大挠度值。($a>b$)

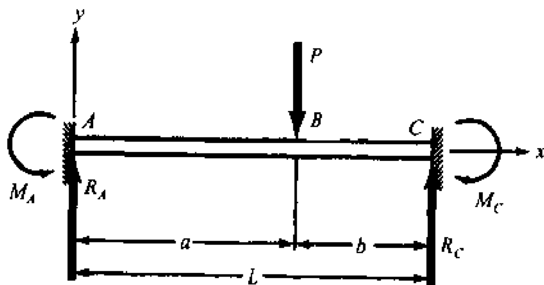


图 11-14

解 A、C 两端的反力偶及反力如图 11-14 所示，根据静力学有两个平衡方程

$$\sum M_A = M_A - Pa + R_CL - M_C = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_y = R_A + R_C - P = 0 \tag{2}$$

然后用奇异函数法写出梁挠曲线微分方程，

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_A\langle x\rangle^0 + R_A\langle x\rangle^1 - P\langle x-a\rangle^1 \tag{3}$$

积分一次,得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A\langle x\rangle^1 + R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{P\langle x-a\rangle^2}{2} + C_1 \tag{4}$$

第一个边界条件:在 $x=0$ 处,斜率 $dy/dx=0$;将其代入(4)式,得 $C_1=0$。

再积分一次,得

$$EIy = -M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{P}{2}\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} + C_2 \tag{5}$$

第二个边界条件:在 $x=0$ 处,$y=0$;将其代入(5)式,得 $C_2=0$。因此梁的挠曲线方程为

$$EIy = -\frac{M_A}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{R_A}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 \tag{6}$$

现在运用 C 点处斜率为零的条件,由(4)式得方程

$$-M_AL + \frac{R_A}{2}L^2 - \frac{Pb^2}{2} = 0 \tag{7}$$

在 $x=L$ 处,挠度 $y=0$,由(6)式得关系式

$$-\frac{M_A}{2}L^2 + \frac{R_A}{6}L^3 - \frac{Pb^3}{6} = 0 \tag{8}$$

联立求解方程(1)、(2)、(7)和(8)式,得两端约束反力为

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{Pb^2}{L^3}(3a+b), \qquad M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \\ R_C &= \frac{Pa^2}{L^3}(a+3b), \qquad M_C = \frac{Pa^2b}{L^2} \end{aligned} \tag{9}$$

在(6)式中,令 $x=a$;得到力 P 作用点 B 处的挠度

$$EI[y]_{x=a} = -\frac{M_A}{2}a^2 + \frac{R_A}{6}a^3 = -\frac{Pa^3b^3}{3L^3} \tag{10}$$

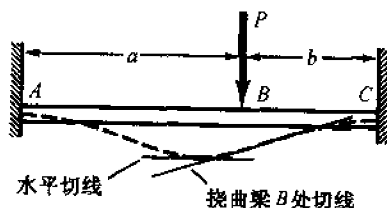


图 11-15

欲求当 $a>b$ 时梁的最大挠度值,可考虑图 11-15 所示的挠曲梁,从图中很显然可见梁的水平切线点在 B 的左侧,因此可以考虑(4)式中 $x<a$ 的情况,AB 段的斜率可由式

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A\langle x\rangle^1 + \frac{R_A}{2}\langle x\rangle^2 \tag{11}$$

求得。令上式等于 0 来求 x_1 的值,亦即

$$x_1 = \frac{2aL}{(3a+b)} \tag{12}$$

处的切线是水平的。将 x_1 值代入(6)式,且 $x<a$,可以得到

$$EI[y]_{max} = -\frac{2Pa^3b^2}{3(3a+b)^2} \tag{13}$$

题 11.13　若题 11.12 中的梁为圆形截面,且直径为 2.5 in, $a=6$ ft, $b=3$ ft, 作用力 $P=6000$ lbf。求力作用点处的挠度和梁的最大挠度。取 $E=30\times10^6$ lbf/in²。

解　此梁横截面的惯性矩为

$$I = \frac{\pi}{64}D^4 = \frac{\pi}{64}(2.5\ \text{in})^4 = 1.917\ \text{in}^4$$

根据题 11.12 的(10)式,得力 P 作用点处的挠度为

$$[y]_{x=a} = -\frac{Pa^3b^3}{3EIL^3}$$

将有关数据代入上式,有

$$[y]_{x=a} = -\frac{-(6000\ \text{lbf})(72\ \text{in})^3(36\ \text{in})^3}{3(30\times10^6\ \text{lbf/in}^2)(1.917\ \text{in}^4)(108\ \text{in})^3} = -0.480\ \text{in}$$

由(12)式可知最大挠度值位于

$$x_1 = \frac{2aL}{3a+b} = \frac{2(6\ \text{ft})(9\text{ft})}{18\text{ft}+3\text{ft}} = 514\text{ft}$$

由(13)式得到所要求的最大挠度值为

$$[y]_{x=a} = -\frac{2Pa^3b^3}{3(3a+b)^2EI}$$

$$= -\frac{2(6000\ \mathrm{lbf})(72\ \mathrm{in})^3(36\ \mathrm{in})^3}{3[(3)(72\ \mathrm{in})+(36\ \mathrm{in})]^2(30\times10^6\ \mathrm{lbf/in^2})(1.917\ \mathrm{in^4})}$$

$$= -0.522\ \mathrm{in}$$

题 11.14 如图 11-16 所示，初始水平的梁 ABC，在 C 处固定，在 B 处为光滑滚动支座，梁全长上作用有集度为 w 的均布力。力作用后，B 处人为地发生一向上的位移 Δ，从而使梁形变成为图中虚线所示。求强加位移后，B 处约束反力 R_B。

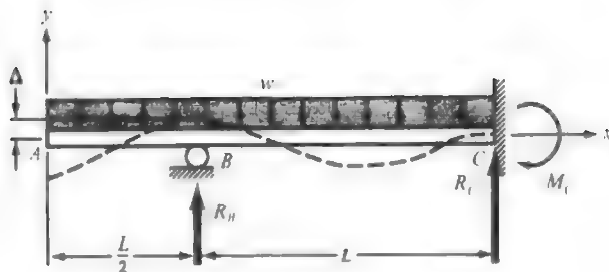


图 11-16

解 ☞ 梁的约束反力有 R_B、R_C 和力偶 M_C。运用奇异函数法写出梁的挠曲线微分方程，为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -w\frac{\langle x\rangle^2}{2} + R_B\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle \tag{1}$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{w}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} + \frac{R_B}{2}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^2 + C_1 \tag{2}$$

第一个边界条件：在 $x=3L/2$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，代入(2)式，有

$$0 = -\frac{w}{6}\left(\frac{27L^3}{8}\right) + R_B\frac{L^2}{2} + C_1$$

由此得

$$C_1 = \frac{9}{16}wL^3 - \frac{R_BL^2}{2} \tag{3}$$

再积分一次，得

$$EIy = -\frac{w}{6}\frac{\langle x\rangle^4}{4} + \frac{R_B}{2}\frac{\langle x-L/2\rangle^3}{3} + \left(\frac{9}{16}wL^3 - R_B\frac{L^2}{2}\right)\langle x\rangle + C_2 \tag{4}$$

第二个边界条件：在 $x=3L/2$ 处，$y=0$；代入(4)式，有

$$wL^4\left[-\frac{27}{(8)(16)}+\frac{27}{32}\right] + R_B\left[\frac{L^3}{6}-\frac{3L^3}{4}\right] + C_2 = 0$$

由此得

$$C_2 = -\frac{81}{128}wL^4 + \frac{7}{12}R_BL^3$$

在点 B 处的强加位移为第三个、也是最后一个边界条件，即在 $x=L/2$ 处，有 $y=\Delta$，将其代入(4)式，有

$$EI\Delta = -\frac{w}{24}\left(\frac{L^4}{16}\right) + 0 + \left(\frac{9}{16}wL^3 - R_B\frac{L^2}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{81}{128}wL^4 + \frac{7}{12}R_BL^3$$

从中可解出 R_B 为

$$R_B = \frac{3EI\Delta}{L^3} - \frac{17}{16}wL$$

题 11.15 如图 11-17 所示水平梁 AB，A 处固定，B 处的支座可在竖直方向自由移动，但不能旋转。受集度为 w 均布载荷作用，若梁发生图中虚线所示的挠曲后，求 B 点的铅直位移。

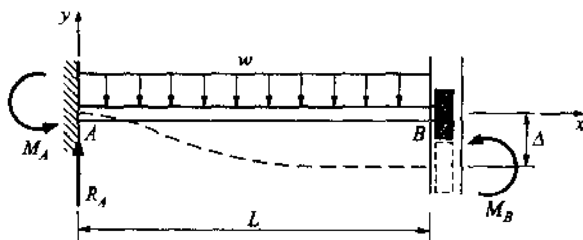


图 11-17

解 ☞ 此题梁的挠曲线方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-M_A\langle x\rangle^0+R_A\langle x\rangle^1-\frac{w\langle x\rangle^2}{2} \tag{1}$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-M_A\langle x\rangle^1+R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2}-\frac{w}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3}+C_1 \tag{2}$$

第一个边界条件：在 $x=0$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，将其代入(2)式，得 $C_1=0$。再积分一次，有

$$EIy=-M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2}+\frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3}-\frac{w}{6}\frac{\langle x\rangle^4}{4}+C_2 \tag{3}$$

在 $x=0$ 处，$y=0$，这为另一个边界条件，由此得 $C_2=0$。

第三个边界条件：在 $x=L$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$。将此值代入(2)式，得方程

$$0=-M_AL+\frac{R_AL^2}{2}-\frac{wL^3}{6} \tag{4}$$

根据静力学有两个平衡方程

$$\sum M_A=M_A+M_B-\frac{wL^2}{2}=0 \tag{5}$$

$$\sum F_y=R_A-wL=0 \tag{6}$$

联立求解方程(4)、(5)和(6)式，得

$$R_A=wL$$
$$M_A=2wL^2/3$$
$$M_B=wL^2/6$$

将上列各值代入(3)式，得

$$EI[y]_{x=L}=-\frac{wL^2}{3}\cdot\frac{L^2}{2}+\frac{wL}{2}\cdot\frac{L^3}{3}-\frac{wL^4}{24}$$

即

$$[y]_{x=L}=-\frac{wL^4}{24EI}$$

题 11.16 如图 11-18 所示的悬臂梁 AB，在 B 处固定，A 处用铰链支承在部分浸没在水中的

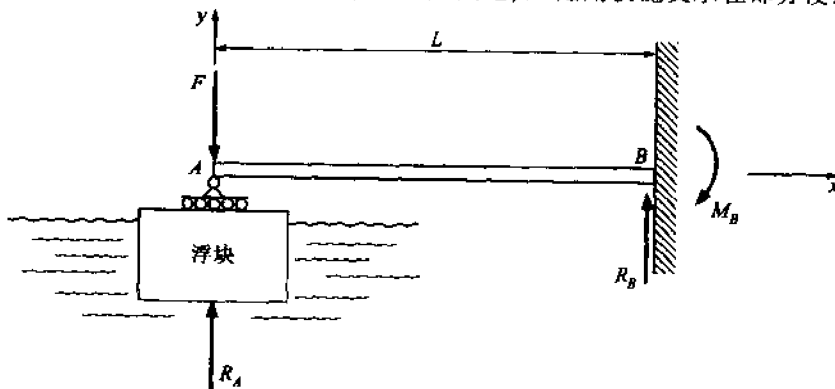


图 11-18

浮块上，梁的弯曲刚度为 EI，长度为 L，A 处作用一竖向集中荷载。求 B 处的约束反力矩。

解 ☞ 当有作用力 F 后，浮块下沉距离 Δ，根据阿基米德定理，浮块受到的浮力 R_A 等于下沉 Δ 时排开水的重量。若浮块的横截面积为 A_0，水的比重为 γ，那么

$$A_0\Delta\gamma = -R_A \tag{1}$$

对于图示的坐标系统，有

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = R_Ax - Fx \tag{2}$$

积分一次，得

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = R_A\frac{x^2}{2} - F\frac{x^2}{2} + C_1 \tag{3}$$

第一个边界条件：在 $x=L$ 处，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=0$，因此由(3)式，得

$$C_1 = \frac{FL^2}{2} - \frac{R_AL^2}{2}$$

再积分一次，得，

$$EIy = \frac{R_A}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{F}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \left(\frac{FL^2}{2} - \frac{R_AL^2}{2}\right)x + C_2 \tag{4}$$

另一个边界条件：在 $x=L$ 处，$y=0$，由(4)式，得

$$C_2 = \frac{R_AL^3}{2} - \frac{FL^3}{3}$$

所以梁 AB 的挠曲线方程为

$$EIy = \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{F}{6}x^3 + \left(\frac{FL^2}{2} - \frac{R_AL^2}{2}\right)x + \frac{R_AL^3}{3} - \frac{FL^3}{3} \tag{5}$$

现在求 $x=0$ 处的挠度。由(1)式，得

$$y = \Delta = -\frac{R_A}{A_0\gamma}$$

在 $x=0$ 处，根据(5)式，得

$$-\frac{R_AEI}{A_0\gamma} = \frac{R_AL^3}{3} - \frac{FL^3}{3}$$

可解出

$$R_A = \frac{\left(\frac{FL^3}{3}\right)}{\frac{L^3}{3} + \frac{EI}{A_0\gamma}} \tag{6}$$

根据静力学平衡方程，有

$$\sum M_B = R_AL - FL + M_B = 0 \tag{7}$$

将(6)式代入(7)式，得到

$$M_B = \frac{3FLEI}{L^2A_0\gamma + 3EI}$$

11.5 习　题

题 11.17 左端固定、右端铰支的梁如图 11-19 所示，受两个集中力 P 的作用，试求梁两端的约束反力。(答案：左端：$4P/3(\uparrow)$，$PL/3(\circlearrowleft)$；右端：$2P/3(\uparrow)$)

题 11.18 求题 11.17 中所述梁在距右端支座 $L/3$ 处力 P 作用点处的挠度。(答案：$7PL^3/486EI$)

题 11.19 题 11.17 中梁的材料为钛合金 Ti－4Al－3M_0－IV，室温下其拉伸强度极限为 175000 lbf/in²，若横截面为 2 in×5 in 的矩形，安全系数为 1.4。试求每个力 P 的最大许可值。(答案：17400 lbf)

题 11.20 左端固定的梁在距固定端 L 处铰支，外伸自由端受集中力 P 作用，如图 11-20 所示。求所有的约束反力。(答案：左端：$\frac{5}{8}wL - \frac{3}{4}P(\uparrow)$，$\frac{1}{8}wL^2 - \frac{1}{4}PL(\circlearrowleft)$；铰支点处 $\frac{3}{8}wL + \frac{7}{4}P(\uparrow)$。)

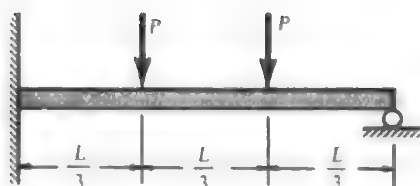


图 11-19

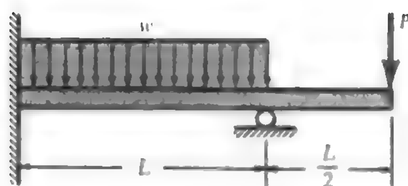


图 11-20

题 11.21 如图 11-21 所示，左端固支、右端铰支的梁，承受均匀变化的分布载荷作用。求支座作用于梁上的力偶矩。(答案：$7wL^2/120$)



图 11-21

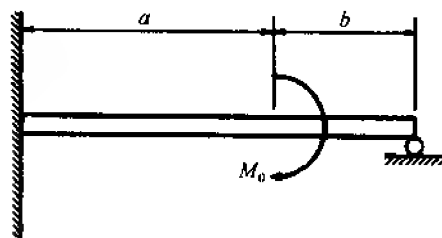


图 11-22

题 11.22 如图 11-22 所示，左端固定，右端铰支的梁，受力偶 M_0 作用。求右支座处的约束反力。
(答案：$3M_0a(a+2b)/(2(a+b)^3)$)

题 11.23 如图 11-22 所示梁，求其在力偶 M_0 作用点处的挠度。(答案：$M_0a^2b(a^2+2b^2)/(4(a+b)^3EI)$)

题 11.24 如图 11-23 所示，悬臂梁 AB 和 CD 在末端处用铰链 E 连接，受图示 5 kN 集中力作用，两段梁均为钢材，$E=200$ GPa，对于梁 AB，$I=20\times10^6$ mm^4；对于梁 CD，$I=30\times10^6$ mm^4。求 E 处的作用力。(答案：398 N)

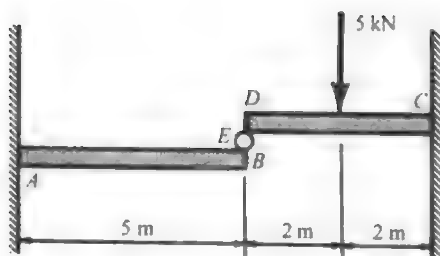


图 11-23

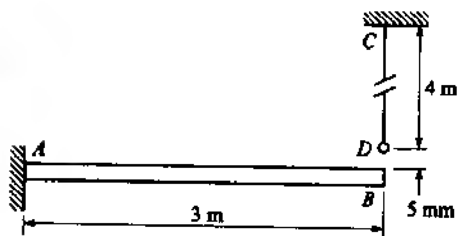


图 11-24

题 11.25 图 11-24 中的弹性直梁 AB，截面为工字形 W152×23，$I=11.7\times10^6$ mm^4。CD 为长 4 m 的圆截面铅直钢杆，直径为 3 mm，梁和钢杆的杨氏模量均为 $E=200$ GPa。

由于制造误差，钢杆的 D 端在梁上面 5 mm 处，如若将钢杆的 D 点和梁的 B 点强行连接起来，且无其它任何载荷作用，求杆 CD 的轴向应力。(答案：106 MPa)

题 11.26 一两端固支梁，在其右半部分作用有均布荷载，如图 11-25 所示，求所有的约束反力。
(答案：左端：$3wL/32$(↑)，$5wL^2/192$(↺)；右端：$13wL/32$(↑)，$11wL^2/192$(↻)。)

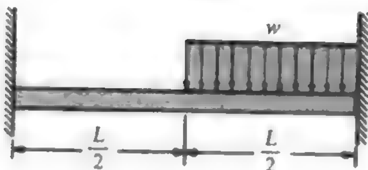


图 11-25

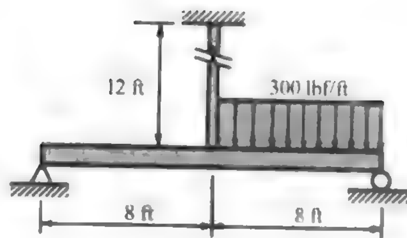


图 11-26

题 11.27 求题 11.26 所述梁中点处的挠度。(答案：$wL^4/768EI$)

题 11.28　一长 16 ft 的梁，在其右半跨内承受均布荷载作用，跨中同一铅直杆连接，如图 11-26 所示。铅直杆为钢材，长 12 ft，横截面积为 0.5 in^2，$E_s=30\times10^6$ lbf/in^2；梁为木材，横截面为 4 in×8 in 矩形，$E_w=1.5\times10^6$ lbf/in^2。求铅直钢杆的应力。（答案：2960 lbf/in^2）

题 11.29　如图 11-27 所示梁，弯曲刚度为 EI，在 A 处固支，B 处用刀口支座支承，自由端 C 处作用力偶 M_0。求 C 点的挠度。（答案：$M_0L^2/4EI$）

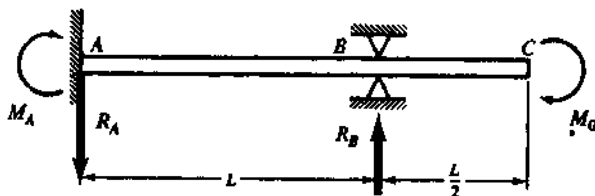


图 11-27

题 11.30　如图 11-28 所示，长 3 m 的悬臂梁，其截面为 100 mm×200 mm 的矩形，材料为钛合金，$E=110$ GPa，自由端（未受力时）位于一劲度系数为 15 kN/m 的弹簧顶端以上 3 mm 处，在梁末端作用一向下的力 $P=7000$ N。求在该力作用下弹簧顶端的形变。（答案：4.72 mm）

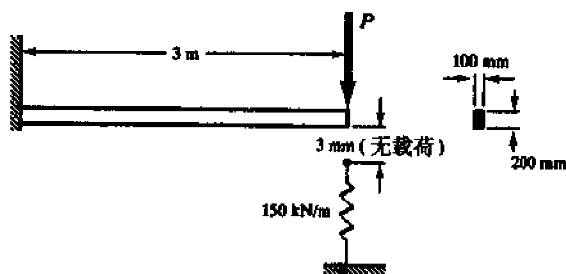


图 11-28

题 11.31　如图 11-29 所示，梁 AB 两端固支，承受均匀变集度的分布载荷作用，求梁两端的约束反力偶矩。（答案：A 端：$wL^2/30$（↺）；B 端：$wL^2/20$（↻））

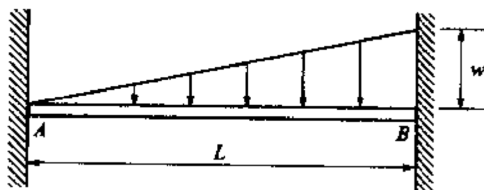


图 11-29

题 11.32　梁 AB 在左端铰支，右端固定，部分梁段上作用有均匀变集度的分布载荷，如图 11-30 所示。求 A 处的铅直反力。（答案：$R_1=\frac{w_0L_2}{240L^3}[\{10L_2L_3+5L_3^2+15(L_2+L_3)^2\}L-L_3^3-2L_3^2(L_2+L_3)-3L_3(L_2+L_3)^2-4(L_2+L_3)^3]$）

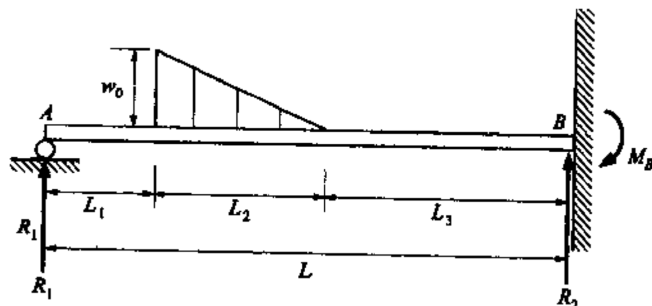


图 11-30

题 11.33　如图 11-31 所示两跨连续梁，作用有图示的两个集中力。求所有的约束反力。（答案：$R_A = 668$ lbf, $R_B = 12061$ lbf, $R_C = 7271$ lbf）

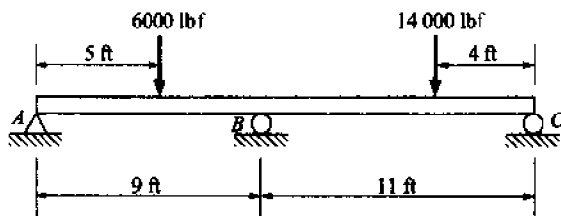


图 11-31

题 11.34　如图 11-32 所示三跨连续梁，在左跨和中跨内承受均布载荷作用，右跨内无作用力。求 A、B、C 和 D 处的约束反力。（答案：$R_A = 0.383wL$（↑），$R_B = 1.20wL$（↑），$R_C = 0.450wL$（↑），$R_D = -0.033wL$（↓））

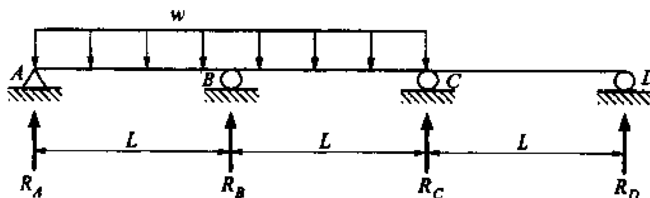


图 11-32

题 11.35　如图 11-33 所示梁，左端 A 及右端 B 均为铰支，中点 B 处用弹簧支承。如若要求弹簧支承处的弯矩为零，试求弹簧的劲度系数。（答案：$k = 16EI/L^3$）

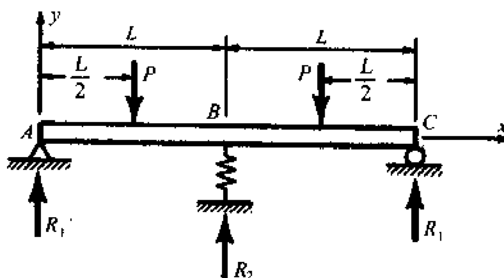


图 11-33

第 12 章 弹性梁理论的特殊问题

12.1 剪切中心

在题 8.1 中建立的简单弯曲公式 $\sigma = My/I$，只是在引起弯曲的横向载荷作用在梁横截面的对称面内时才是正确的。很明显，在这种载荷作用下，梁是没有扭转的。然而，更一般的情况下梁的横截面没有对称轴，但还要求使梁在横向力作用下只产生弯曲而不产生扭转。每个弹性梁的横截面都存在这样一个点，横向力通过这点作用时梁只产生弯曲，而不产生扭转，该点被称为剪切中心。通常，确定剪切中心的位置是很困难的，并且需要应用弹性理论。但是，本章中我们仅考虑只有一个对称轴的薄壁开口截面梁，且作用力作用在垂直于该对称轴的平面内。因而将能在梁的这个对称轴上找到剪切中心的位置。作为应用见题 12.1～题 12.4。

12.2 非对称弯曲

通常梁的横截面是非对称的，或即使横截面是对称的，但是载荷并不在对称轴上。以上两种情况的任何一种情况，用题 8.1 中所得到的表达式 $\sigma = My/I$ 来计算弯曲应力都是不恰当的。一种方便的方法是把弯矩在横截面上分解为沿 y 和 z 轴方向上的分量，如图 12-1 中双箭头矢量表示的弯矩分量。

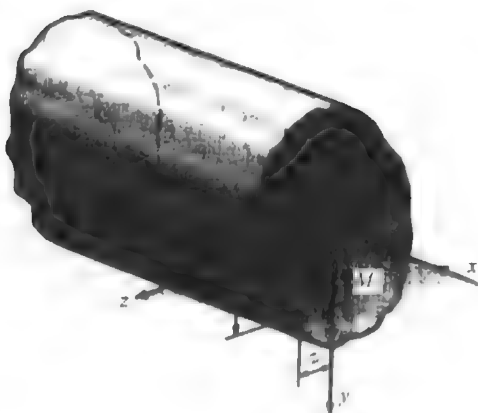


图 12-1

在题 12.5 中由坐标 y、z 确定的一点处，弯曲应力为

$$\sigma = \frac{(M_z I_y + M_y I_{yz})y + (-M_y I_z - M_z I_{yz})z}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{12.1}$$

式中 I_y 和 I_z 分别代表关于 y 和 z 轴的惯性矩，I_{yz} 为惯性积，这些数值可以根据第 7 章的方法确定。另外梁上有一个中性轴，该轴上的纵向纤维不受任何法向应力，而且中性轴通常既不垂直于作用力平面，也不和任何一个主轴重合。作为应用，见题 12.6 和题 12.7。题 12.8 提出了一种确定弯曲应力的计算机方法，并在题 12.9 和题 12.10 中举例应用。

12.3 曲　　梁

在机械设计或其它领域中有时会遇到初始曲梁。这里，我们仅仅考虑这样的弹性梁，对于

它们,曲率平面就是每一横截面的对称面,并且弯曲载荷作用在该对称面内。与初始直梁不同的是,中性轴不再经过横截面的形心,而是向梁的曲率中心移动一个用 $\bar{y}$ 表示的距离。整个横截面上的弯曲应力分布实际上是双曲线形的。在题 12.11 中将说明,这些应力可由公式

$$\sigma = \frac{My}{A\bar{y}(r+y)} \tag{12.2}$$

给出,式中 M 是弯矩,A 是横截面面积,r 是中性轴的曲率半径,y 表示由中性轴到任意纤维的距离。作为应用,见题 12.12。由于计算曲梁的弯曲问题较繁琐,因此这类问题适合用计算机计算,在题 12.13 中编制了一个 FORTRAN 程序并在题 12.14 和题 12.15 中作为例子应用。

12.4 例 题

12.4.1 剪切中心

题 12.1 确定如图 12-2 放置的、承受铅直力作用的半个薄壁圆环截面的剪切中心。

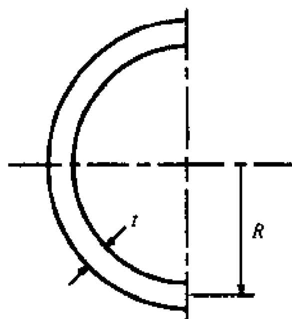


图 12-2

解 由于梁仅产生弯曲而不产生扭转,所以整个横截面上的法应力按照弯曲公式 $\sigma = My/I$ 分布。因此,根据题 8.19,将有垂直于横截面的水平剪应力沿圆柱母线作用,并可由下式

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{C} y\mathrm{d}a$$

确定。

如题 8.19 中所述,由于存在这些水平剪应力,所以在垂直于轴线的横截面上一定有相同集度的剪应力。在图 12-3(a)中将这些剪应力表示为沿着横截面的中心线切线作用,而且习惯上认为剪应力沿薄壁截面壁厚 t 均匀分布,垂直于圆截面中心线的剪应力可略去不计。在图 12-3(a)中,V 表示分布剪应力的合力,显然它沿铅直方向作用。因为水平对称轴上、下 1/4 环形剪应力的水平分量可以互相抵消。

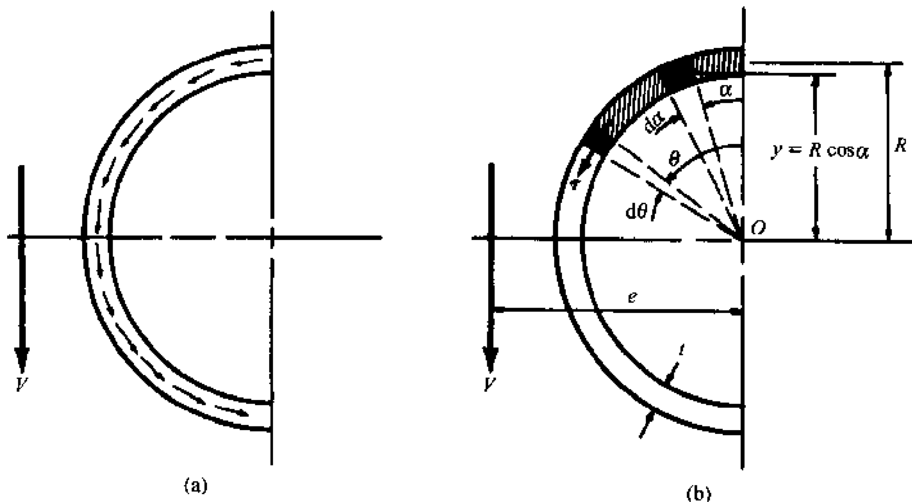


图 12-3

我们来考查用 θ 表示的任一点处的剪应力 τ,如图 12-13(b)所示,若要由关系式

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{C} y\mathrm{d}a \tag{a}$$

确定该剪应力,必须计算 I 和上式中的积分。按第 7 章中的解释,该积分表示阴影面积关于对称轴的一次矩。可以引入一个如图 12-3(b)所示的辅助变量 $\alpha(0<\alpha<\theta)$ 来完成上述积分运算。于是

$$\int_{y_0}^{C} y\mathrm{d}a = \int_0^{\theta}(R\cos\alpha)t(R\mathrm{d}\alpha) = R^2 t\sin\theta \tag{b}$$

另外,整个横截面关于对称轴的惯性矩为

$$I = \int y^2\mathrm{d}a = \int_0^{\pi}(R\cos\theta)^2 tR\mathrm{d}\theta = \frac{\pi R^3 t}{2} \tag{c}$$

现在可以由(a)、(b)和(c)式求得由 θ 表示的任一点处的剪应力,为

$$\tau = \frac{V}{(\pi R^3 t/2)}[R^2 t\sin\theta] = \frac{2V}{\pi Rt}\sin\theta \tag{d}$$

这些分布剪应力对任一点,比如说 O 的力矩一定等于合力 V 对同一点的力矩。这样,由于 τ 作用在面积 $t(R\mathrm{d}\theta)$,于是可有

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\left(\frac{2V}{\pi Rt}\sin\theta\right)(Rt\mathrm{d}\theta)R = Ve$$

因此,求得剪切中心的位置为

$$e = \frac{4R}{\pi}$$

题 12.2 试求图 12-4 所示"帽形"薄壁截面的剪切中心。设整个梁的截面厚度 t 为常数。

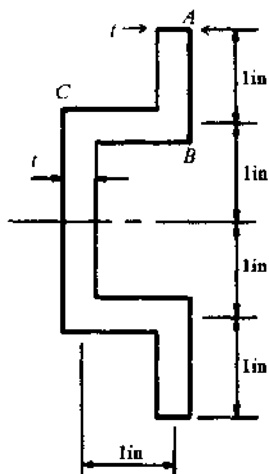


图 12-4

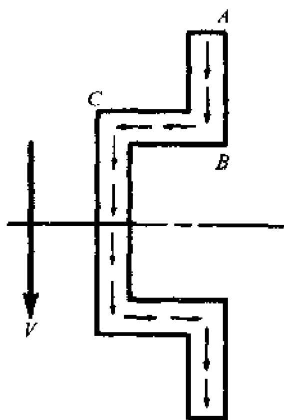


图 12-5

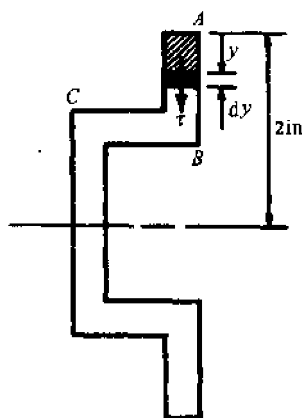


图 12-6

解 ☞ 根据题 12.1 给出的推理,整个截面上的剪应力分布如图 12-5 所示,因为"帽形"截面上两段水平部分的剪应力水平合力为零。分布剪应力的合力用 V 表示,沿铅直方向作用,首先考查上部竖直部分 AB 的剪应力,如图 12-6 所示。在顶点 A 以下、距离为 y 处的剪应力由下式

$$\tau = \frac{V}{It}\int_{y_0}^{C} y\mathrm{d}a \tag{a}$$

给出。式中积分表示阴影面积关于对称轴的一次矩,它可以根据阴影面积 yt、阴影面积形心到对称轴的距离,也就是$(2-y/2)$的乘积来计算。所以 y 处的剪应力为

$$\tau = \frac{V}{It}\left(2-\frac{y}{2}\right)yt \tag{b}$$

此处要注意,V 和 I 分别是作用在整个横截面上的剪力和整个横截面的惯性矩。作用于竖直区段 AB 上的合剪力 V_1,如图 12-7 所示,可以由积分

$$V_1 = \int_{y=0}^{y=1}\tau t\mathrm{d}y = \frac{Vt}{I}\int_0^1\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{5}{6}\frac{Vt}{I} \tag{c}$$

求得

其次,考查在上部水平区段 BC 的剪应力。如图 12-8 所示,与点 B 相距为x 处的剪应力由式(a)给出,此时式中的积分表示图 12-8 中阴影面积关于对称轴的一次矩。经观察积分值为$(1)(t)(1.5)+(x)(t)(1)$,因此 x 处的剪应力为

$$\tau = \frac{V}{It}[1.5t + xt] \tag{d}$$

式中，V 和 I 分别是整个横截面的剪应力合力和惯性矩。如图 12-7 所示的剪应力合力 V_2 为

$$V_2 = \int_{x=0}^{x=1} \tau t\,\mathrm{d}x = \frac{Vt}{I}\int_0^1 (1.5 + x)\mathrm{d}x = \frac{3Vt}{2I} \tag{e}$$

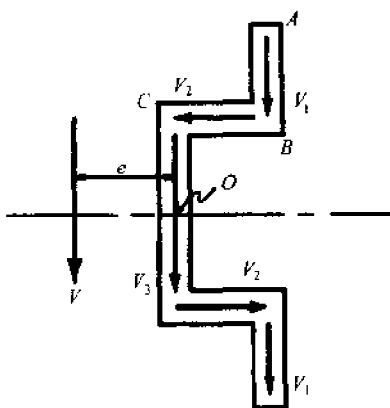


图 12-7

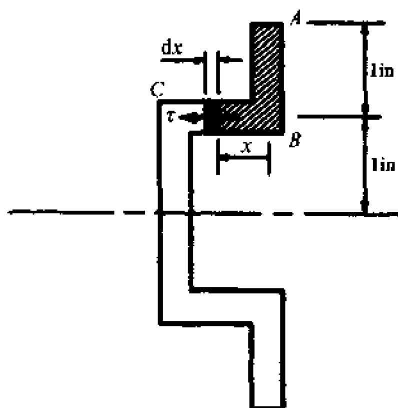


图 12-8

由于全部截面是薄壁的，所以计算时习惯上仅用名义尺寸，并忽略在不同部分交叉处的微小重叠面积。

因为对称，所以下部有关区段截面的力与上面求得的这些力相等。这些力对任一点，例如图 12-7 中的 O 点的矩一定等于合力 V 对同一点之矩。因此，有 $-2V_1(1) + 2V_2(1) = Ve$，即

$$e = \frac{4t}{3I} \tag{f}$$

最后，I 可以根据第 7 章的方法求得，为

$$I = \frac{1}{12}(t)(4)^3 + 2[(1)(t)(1)^2] = \frac{22t}{3} \tag{g}$$

因此根据(f)式，剪切中心为

$$e = \frac{4t}{3(22t/3)} = \frac{4}{22} = 0.182\ \text{in} \tag{h}$$

值得指出的是，由于选择 O 点为矩心所以不必计算 V_3。

题 12.3　如图 12-9 所示，薄壁矩形截面有一个狭小的切口，且宽度 t 为常数。试求其剪切中心。

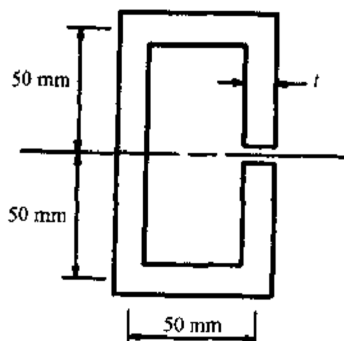


图 12-9

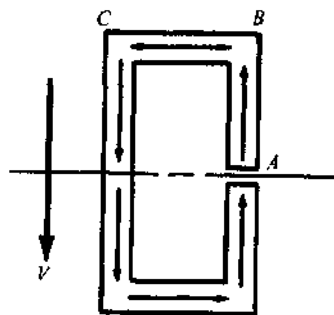


图 12-10

解　☞ 可将本题截面看作题 12-2 中的“帽形”截面的突出外缘向下弯向对称轴。剪应力分布如图 12-10 所示，竖向力 V 表示这些分布剪应力的合力。首先考查竖直部分 AB 的剪应力，见图 12-11。在对称轴上方距离 z 处(假设切口的宽度忽略不计)的剪应力仍可用公式

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{C} y\mathrm{d}a \tag{a}$$

计算，此处最重要的是积分代表截面纤维a-a(欲求该处的剪应力)和截面的末端纤维b-b之间面积的一次矩，即使纤维b-b比a-a离对称轴更近，这也是正确的。这种解释的依据源于第 7 章中上述

公式的推导过程。上述积分可以用面积 zt 与其形心到对称轴的距离 $z/2$ 的乘积计算。因此在 z 处的剪应力为

$$\tau = \frac{V}{It}\left[zt\ \frac{z}{2}\right] = \frac{Vz^2}{2I} \quad \text{(b)}$$

如图 12-12 所示，作用在竖直区段 AB 上的剪应力的合力 V_1 可由下述积分

$$V_1 = \int_{z=0}^{z=50} \tau t \mathrm{d}z = \int_0^{50} \frac{Vz^2}{2I} t \mathrm{d}z = 2.08 \times 10^4 \frac{Vt}{I} \quad \text{(c)}$$

求得。

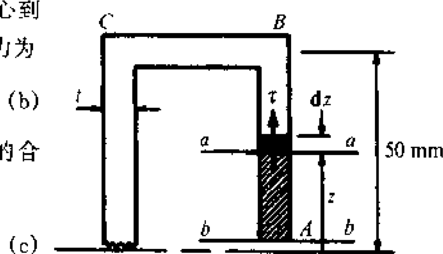


图 12-11

其次考查上部水平区段 BC 的剪应力。如图 12-13 所示，与 B 点相距 x 处的剪应力仍可由(a)式计算。此时(a)式的积分代表图 12-13 中的阴影面积关于对称轴的一次矩，由(a)式，得

$$\tau = \frac{V}{It}[(x)(t)50 + (50)(t)(25)] = \frac{50V}{I}(x + 25) \quad \text{(d)}$$

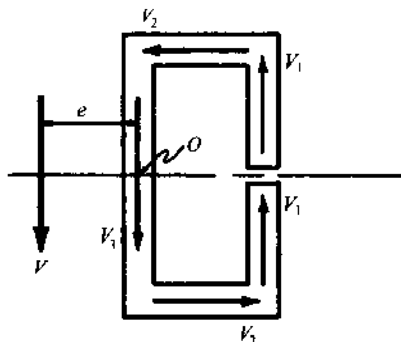


图 12-12

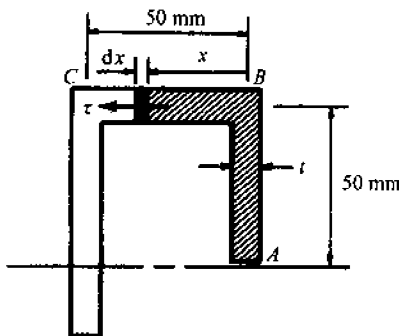


图 12-13

作用在水平区段 BC 上的剪应力合力 V_2，如图 12-12 所示。可由下述积分：

$$V_2 = \int_{x=0}^{x=50} \tau t \mathrm{d}x = \int_0^{50} \frac{50V}{I}(x + 25)\mathrm{d}x = 1.25 \times 10^5 \frac{Vt}{I} \quad \text{(e)}$$

求得。由图 12-12 可知，剪力 V_1、V_2 和 V_3 对任一点，例如 O 点的力矩之和一定等于合力 V 对该点的力矩，因此 $2(50V_1) + 2(50V_2) = Ve$。将(c)式的 V_1 和(e)式的 V_2 代入，有

$$2.1 \times 10^6 \frac{Vt}{I} + 1.25 \times 10^7 \frac{Vt}{I} = Ve \quad \text{(f)}$$

$$e = 1.46 \times 10^7 \frac{t}{I} \quad \text{(g)}$$

面积的二次矩为

$$I = 2\left[\frac{1}{12}(t)(100)^3\right] + 2[50t(50)^2] = 4.167 \times 10^5 t$$

因此，可有

$$e = \frac{1.46 \times 10^7 t}{4.167 \times 10^5 t} = 35 \text{ mm}$$

这样就确定了剪切中心的位置

题 12.4 图 12-14 薄壁截面的厚度 t 为常数，求其剪切中心的位置。

解 ☞ 剪应力的分布如图 12-15 所示，图中的铅直力 V 表示分布剪应力的合力。首先求水平区段 AB 的剪应力。如图 12-16 所示，与 A 相距 x 处的剪应力仍可由下式计算：

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{C} y \mathrm{d}a \quad \text{(a)}$$

即

$$\tau = \frac{V}{It}[(x)(t)(3)] = \frac{3Vx}{I} \quad \text{(b)}$$

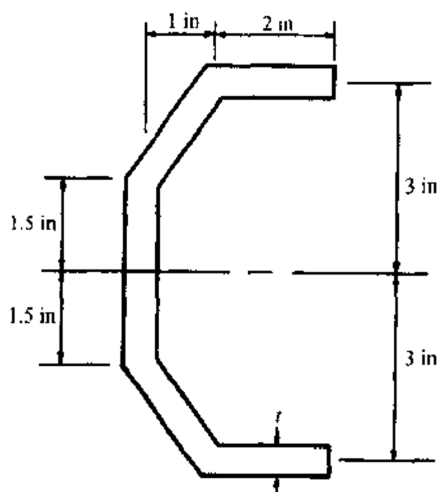


图 12-14

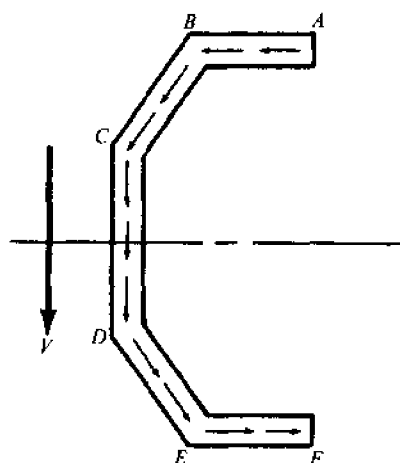


图 12-15

作用于 AB 区段上的 V_1，如图 12-17 示，可以由积分

$$V_1 = \int_{x=0}^{x=2} \tau t \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{3Vxt}{I}\mathrm{d}x = \frac{6Vt}{I} \tag{c}$$

求得。

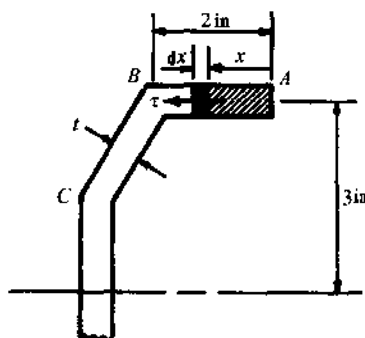


图 12-16

如图 12-18 所示，在倾斜区段 BC 与 B 相距 y 处的剪应力仍可由式(a)给出。此时(a)式的积分表示图 12-18 所示的阴影面积关于对称轴的一次矩。对于阴影面积的倾斜部分，引入图示的辅助变量 u 来计算积分是最简单的，因此

$$\tau = \frac{V}{It}\left[(2)(t)(3) + \int_{u=0}^{u=y}[1.5 + (1.80 - u)\sin 56°20']t\mathrm{d}u\right] = \frac{V}{I}(6 + 3y - 0.416y^2) \tag{d}$$

图 12-17 中作用在整个倾斜区段 BC 上剪应力的合力 V_2 为

$$V_2 = \int_{y=0}^{y=1.80} \tau t \mathrm{d}y = \int_0^{1.80} \frac{Vt}{I}(6 + 3y - 0.416y^2)\mathrm{d}y = \frac{14.85Vt}{I} \tag{e}$$

由图 12-17 可知，力 V_1、V_2 和 V_3对任一点，例如 O 点的力矩之和一定等于合力 V 对该点的力矩，因此

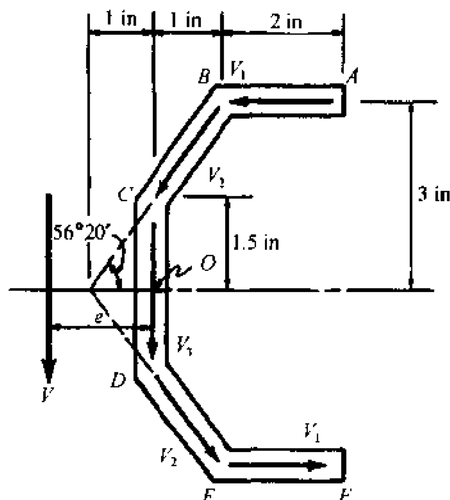


图 12-17

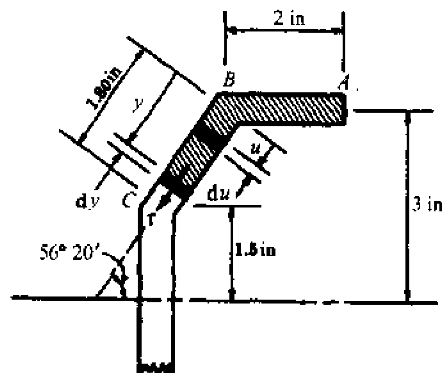


图 12-18

$$2(3V_1)+2(V_2\sin 56°20')=Ve$$

将(c)式和(e)式代入上式,得到

$$e=\frac{60.8t}{I} \tag{f}$$

惯性矩由

$$I=\frac{1}{12}(t)(3)^3+2[(2)(t)(3)^2]+2\int_{u=0}^{u=1.80}[1.5+(1.80-u)\sin 56°20']^2 t\,du$$

求得,且有 $I=57.2t$,于是

$$e=\frac{60.8t}{57.2t}=1.06\text{ in}$$

这样就确定了剪切中心的位置。

12.4.2 非对称弯曲

题 12.5 考虑一个承受纯弯曲的任意非对称截面梁,如图 12-19(a)所示。推导截面内任意一点处弯曲应力和弯矩之间的关系式。假定胡克定律是适用的。

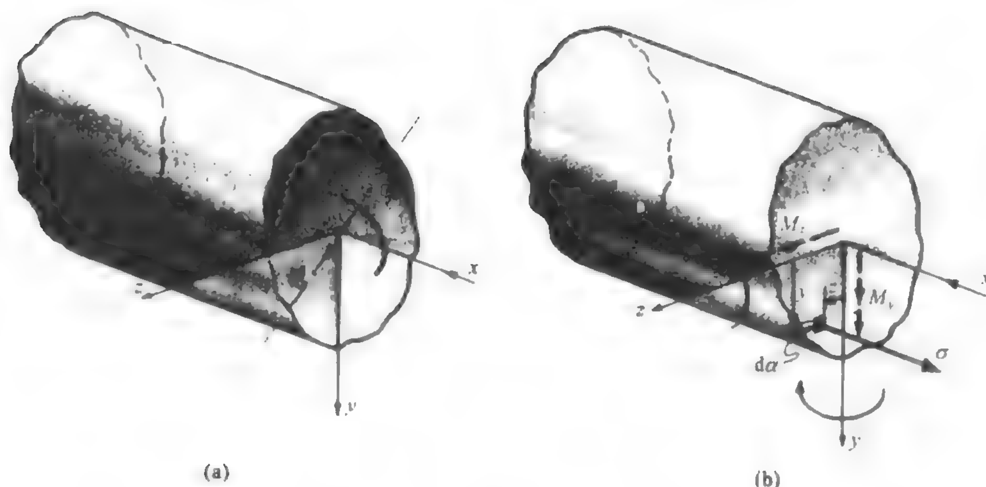


图 12-19

解 假设力矩 M 作用在与 y 轴和 z 轴均斜交、过形心的平面之内。将力矩 M 按 y、z 轴进行分解,记作 M_y 和 M_z 将是最方便的,它们的正向用双箭头矢量表示,如图 12-19(b)。

根据题 8.1,假设弯曲之前为平面的横截面在受力后仍保持平面是合理的。但是,此处所考虑的一般情况是:在 xy 平面内有一曲率半径ρ_z,并在 xz 平面内有曲率半径ρ_y。因此,与题 8.1 中的(1)式类似,对于图 12-19(b)中所示的面积 da 内的纵向纤维,其法向应变为

$$\varepsilon=\frac{y}{\rho_z}+\frac{z}{\rho_y} \tag{1}$$

因为胡克定律是成立的,应有

$$\sigma=\frac{Ey}{\rho_z}+\frac{Ez}{\rho_y} \tag{2}$$

此法向应力或弯曲应力表示在图 12-19(b)中。

作用在整个横截面上的法向应力的合力为零(对于纯弯曲情况)这个条件将表达为

$$\int_A\sigma da=0 \quad 或 \quad \int_A\left(\frac{Ey}{\rho_z}+\frac{Ez}{\rho_y}\right)da=0$$

积分在整个横截面 A 上进行。因为整个横截面上 ρ_y 和 ρ_z 为常数,所以有

$$\frac{E}{\rho_z}\int_A y\,da+\frac{E}{\rho_y}\int_A z\,da=0 \tag{3}$$

若上述积分为零则该等式(法向应力合力为零)即可成立,这就意味着应将 yz 坐标系的原点选在横截面的形心处。

由图 12-19(b)显然应有

$$M_z=\int_A \sigma y\mathrm{d}a=\int_A\left(\frac{Ey^2}{\rho_z}+\frac{Eyz}{\rho_y}\right)\mathrm{d}a$$
$$=\frac{E}{\rho_z}\int_A y^2\mathrm{d}a+\frac{E}{\rho_y}\int_A yz\mathrm{d}a$$

式中第一个积分表示横截面面积对 z 轴的惯性矩,第二个积分(正如第 7 章中所提到的)表示横截面积对 y 和 z 轴的惯性积。应用第 7 章的符号记法,上述最后一式成为

$$M_z=\frac{EI_z}{\rho_z}+\frac{EI_{yz}}{\rho_y}\tag{4}$$

由图 12-19(b)显然也会有

$$M_y=-\int_A \sigma z\mathrm{d}a=-\int_A\left(\frac{Eyz}{\rho_z}+\frac{Ez^2}{\rho_y}\right)\mathrm{d}a$$
$$=-\frac{EI_{yz}}{\rho_z}+\frac{EI_y}{\rho_y}\tag{5}$$

联立求解方程(4)式和(5)式,得到

$$\frac{1}{\rho_y}=\frac{-M_yI_z-M_zI_{yz}}{E(I_yI_z-I_{yz}^2)}\tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho_z}=\frac{M_zI_y+M_yI_{yz}}{E(I_yI_z-I_{yz}^2)}\tag{7}$$

将(6)式和(7)式代入(2)式,得到弯曲应力为

$$\sigma=\frac{(M_zI_y+M_yI_{yz})y+(-M_yI_z-M_zI_{yz})z}{I_yI_z-I_{yz}^2}\tag{8}$$

(8)式叫做广义弯曲应力公式,它对任意形状截面的弹性梁承受位于任意平面内的弯曲载荷均是适用的,对于特殊情况 $M_y=I_{yz}=0$(表示 y 轴和 z 轴为主轴,并且仅在 z 轴方向弯曲)。由(8)式导出 $\sigma=M_zy/I_z$,与题 8.1 中的(9)式相同。

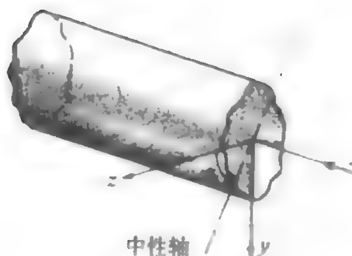


图 12-20

根据定义,沿中性轴的纵向纤维不受纵向应力,所以令(8)式中的应力等于零就很容易得出中性轴的方程,因此

$$\frac{y}{z}=\frac{M_yI_z+M_zI_{yz}}{M_zI_y+M_yI_{yz}}=\tan\alpha\tag{9}$$

式中 α 表示中性轴的倾斜角度,如图 12-20 所示。通常,中性轴既不与外力矩的作用平面垂直,也不与任一主轴重合。

题 12.6　如图 12-21 所示,矩形截面梁受外力作用,该力产生一个数值为 2000 lbf·ft 的弯矩,且弯矩作用在与 y 轴成 30° 的平面内,求梁上的最大拉、压应力。

解　☞ 将 2000 lbf·ft 的弯矩用双箭头的实线矢量表示在图 12-22 中,且沿 y 和 z 方向的弯矩分量(虚线矢量)也表示在图中。这种简单的矢量表示方法使可求得分量为

$$M_y=2000\sin30^\circ=1000(\mathrm{lbf\cdot ft}),$$
$$M_z=2000\cos30^\circ=1732(\mathrm{lbf\cdot ft})$$

由题 7.3,可有

$$I_y=\frac{1}{12}(6)(3)^3=13.5(\mathrm{in}^4)$$

$$I_z=\frac{1}{12}(3)(6)^3=54(\mathrm{in}^4)$$

此外,由于 y 轴和 z 轴均是对称轴,所以它们是横截面的主轴,而且由第 7 章知,关于这两轴的惯性积为零,即 $I_{yz}=0$。

根据题 12.5 中的(9)式可得到中性轴(通过形心)的倾斜角为

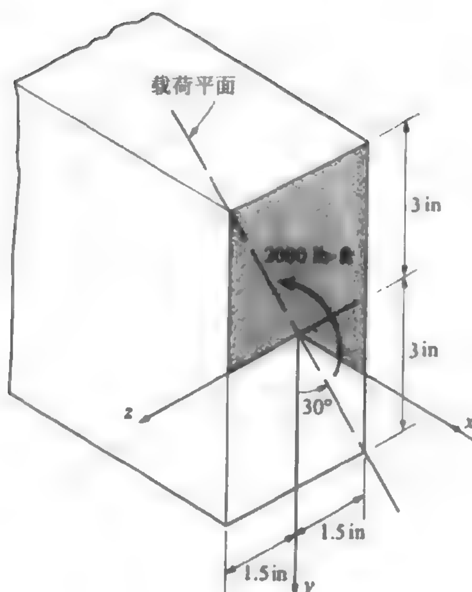


图 12-21

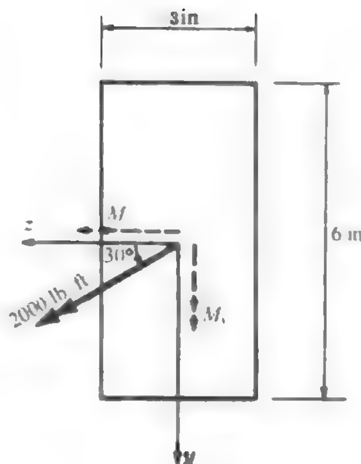


图 12-22

$$\tan\alpha = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{M_z I_y + M_y I_{yz}}$$
$$= \frac{(1000)(54)+(1732)(0)}{(1732)(13.5)+(1000)(0)} = 2.31$$
$$\alpha = 66°40'$$

根据题 12.5 所述,没有理由认为中性轴是载荷平面的法线,如图 12-23 所示。

在题 12.5 中,假设发生弯曲时平截面仍保持为平面,所以初始平截面绕中性轴旋转,如图 12-23 所示。由于应力和应变因与中性轴的距离不同而变化,显然最大拉应力产生在 B 点、最大压应力产生在 A 点,亦即均为离中性轴最远的点。将这些点的坐标和弯矩分量代入题 12.5 的(8)式,得

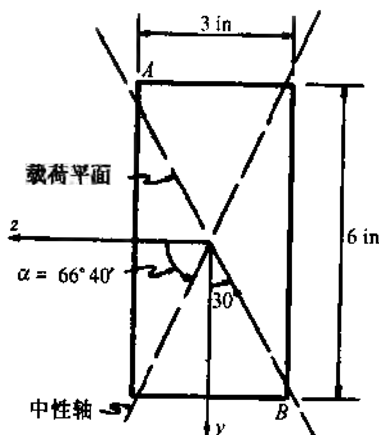


图 12-23

$$\sigma_B = \frac{[(1732)(12)(13.5)+0](3)+[-(1000)(12)(54)-0](-15)}{(13.5)(54)-0}$$
$$= 2480 \text{ lbf/in}^2$$
$$\sigma_A = \frac{[(1732)(12)(13.5)+0](-3)+[-(1000)(12)(54)-0](1.5)}{(13.5)(54)-0}$$
$$= 2480 \text{ lbf/in}^2$$

题 12.7 角钢 L 127×127×22.2 的截面尺寸和形心如图 12-24 所示,截面关于形心轴 y、z 的几何特性为:$I_y = I_z = 7.41\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$, $I_{yz} = -4.201\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4$。载荷 $M_y = 0$, $M_z = 10\ \mathrm{kN\cdot m}$。求中性轴的倾斜角和 A 点处的弯曲应力。

解 ☞ 根据题 12.5 中的(9)式,得出中性轴的倾斜角为

$$\tan\alpha = \frac{0 + M_z(-4.201\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4)}{M_z(7.41\times10^{-6}\ \mathrm{m}^4)+0}$$
$$= -0.567$$
$$\alpha = -29.5°$$

如图 12-24 所示。其中负号表示从 z 轴的正方向顺时针旋转,因为按照图 12-20 所示,α 的正方向取为逆时针方向。

点 A 的坐标为 $y = z = -39.9$ mm,因此由题 12.5 中的(8)式知 A 点处的应力为

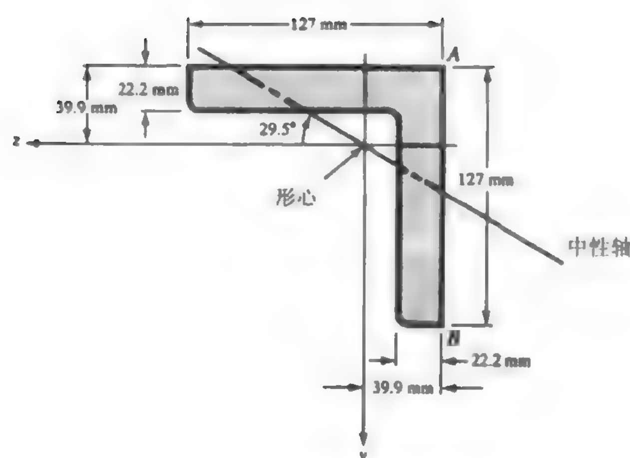


图 12-24

$$\sigma = [(10000\ \text{N}\cdot\text{m})(7.41\times10^{-6}\ \text{m}^4) - 0](-0.0399\ \text{m}) + [0 - (10{,}000\ \text{N}\cdot\text{m})(-4.201\times10^{6}\ \text{m}^4)](-0.0399\ \text{m})\Big/[(7.41\times10^{6}\ \text{m}^4)(7.41\times10^{-6}\ \text{m}^4) - (-4.201\times10^{6}\ \text{m}^4)^2] = -124\ \text{MPa}$$

题 12.8　编一 FORTRAN 计算机程序，求图 12-19 所示纯弯曲非对称截面梁的弹性弯曲应力和中性轴的方向。

解　☞ 题 12.5 中的(8)式给出了待求的应力、(9)式给出了中性轴的方向角。弯矩分量 M_y 和 M_z 的正方向如图 12-19 所示，其它的符号如题 12.5 中定义。编制的程序如下：

```
00010*************************************************************************
00020                          PROGRAM BEND (INPUT,OUTPUT)
00030*************************************************************************
00040*
00050*         AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00060*         DATE  : JANUARY 27,1989
00070*
00080*  BRIEF DESCRIPTION:
00090*      THIS PROGRAM CONSIDERS A BEAM OF ARBITRARY UNSYMMETRIC CROSS
00100*  SECTION SUBJECTED TO PURE BENDING. THE GENERALIZED FLEXURE FORMULA
00110*  HOLDS FOR THIS CASE, AND PROVIDES A RELATIONSHIP BETWEEN THE BENDING
00120*  MOMENT AND THE BENDING STRESS AT ANY POINT IN THE SECTION. ALSO,
00130*  THE ANGLE OF INCLINATION OF THE NEUTRAL AXIS CAN BE CALCULATED AS A
00140*  FUNCTION OF THE BENDING MOMENTS.
00150*
00160*  INPUT:
00170*      THE USER IS FIRST ASKED IF USCS OR SI UNITS WILL BE USED. THEN,
00180*  THE SECTIONAL PROPERTIES (MOMENTS OF INERTIA IY,IZ,IYZ) ARE INPUTTED,
00190*  AS WELL AS THE BENDING MOMENTS. FINALLY, THE COORDINATES OF THE POINT
00200*  WHERE THE BENDING STRESS IS DESIRED ARE ENTERED.
00210*
00220*  OUTPUT:
00230*      THE BENDING STRESS AT ANY POINT ON THE CROSS SECTION MAY BE
00240*  OBTAINED, AS WELL AS THE ANGLE OF INCLINATION OF THE NEUTRAL AXIS.
00250*
00260*  VARIABLES:
00270*    IY,IZ,IYZ    ---     SECTIONAL PROPERTIES (MOMENTS OF INERTIA)
00280*      MY,MZ      ---     BENDING MOMENTS
00290*      SIGMA      ---     BENDING STRESS AT THE DESIRED POINT ON THE SECTI
00300*    TALPHA      ---    THE TANGENT OF THE ANGLE OF INCLINATION OF THE
00310*                       NEUTRAL AXIS
00320*     ALPHA      ---    THE ANGLE OF INCLINATION OF THE NEUTRAL AXIS
00330*     Y,Z          ---    COORDINATE OF THE POINT WHERE STRESS DETERMINATI
00340*                         IS DESIRED
00350*     ANS          ---    DENOTES IF USCS OR SI UNITS ARE TO BE USED
00360*     UNIT         ---    GIVES THE USCS OR SI UNIT FOR STRESS
00370*
00380*************************************************************************
00390******                          MAIN PROGRAM                       ******
00400*************************************************************************
00410*
00420*          VARIABLE DECLARATIONS
```

```
00430*
00440      REAL IY,IZ,IYZ,SIGMA,MY,MZ,TALPHA,ALPHA
00450      INTEGER ANS
00460      CHARACTER UNIT*4
00470*
00480*           USER INPUT
00490*
00500      PRINT*,'PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:'
00510      PRINT*,'1 - USCS'
00520      PRINT*,'2 - SI'
00530      PRINT*,' '
00540      PRINT*,'ENTER 1,2'
00550      READ*,ANS
00560      PRINT*,' '
00570      PRINT*,' '
00580      PRINT*,'NOTE, THE COORDINATE SYSTEM USED HAS THE X-AXIS ORIENTED'
00590      PRINT*,'SO THAT IT IS POSITIVE INTO THE PAGE AND ACTING AS THE'
00600      PRINT*,'NEUTRAL AXIS OF THE SECTION. THE POSITIVE Y-AXIS IS DIRECTED'
00610      PRINT*,'DOWNWARD, WHILE THE POSITIVE Z-AXIS IS TO THE LEFT AS ONE'

00620      PRINT*,'FACES THE SECTION. (IT IS A RIGHT HANDED SYSTEM.)'
00630      PRINT*,' '
00640      PRINT*,' '
00650      IF (ANS.EQ.1) THEN
00660         PRINT*,'PLEASE ENTER THE SECTION PROPERTIES IY,IZ,IYZ ,(IN^4):'
00670         READ*,IY,IZ,IYZ
00680         PRINT*,' '
00690         PRINT*,'PLEASE ENTER THE MAGNITUDE OF THE BENDING MOMENTS MY,MZ'
00700         PRINT*,'FOLLOWING THE SIGN CONVENTION STATED (LB-FT):'
00710         READ*,MY,MZ
00720         MY = MY*12
00730         MZ = MZ*12
00740      ELSE
00750         PRINT*,'PLEASE ENTER THE SECTION PROPERTIES IY,IZ,IYZ ,(MM^4):'
00760         READ*,IY,IZ,IYZ
00770         PRINT*,' '
00780         PRINT*,'PLEASE ENTER THE MAGNITUDE OF THE BENDING MOMENTS MY,MZ'
00790         PRINT*,'FOLLOWING THE SIGN CONVENTION STATED (KN-M):'
00800         READ*,MY,MZ
00810         MY = MY*1E6
00820         MZ = MZ*1E6
00830      ENDIF
00840*
00850      PRINT*,' '
00860      PRINT*,'ENTER THE Y AND Z COORDINATES OF THE POINT WHERE STRESS '
00870      PRINT*,'DETERMINATION IS DESIRED.(FOLLOW THE SIGN CONVENTION STATED
00880      IF(ANS.EQ.1) THEN
00890         PRINT*,'Y AND Z ARE DISTANCES IN INCHES FROM THE NEUTRAL AXIS:'
00900      ELSE
00910         PRINT*,'Y AND Z ARE DISTANCES IN MILLIMETERS FROM NEUTRAL AXIS:'
00920      ENDIF
00930      READ*,Y,Z
00940*
00950*            END USER INPUT
00960*************************************************************
00970*            CALCULATIONS FOR BENDING STRESS AND THE ANGLE OF INCLINATION
00980*            AS FUNCTIONS OF THE APPLIED BENDING MOMENTS AND THE SECTION
00990*            PROPERTIES
01000*
01010      SIGMA=(((MZ*IY + MY*IYZ)*Y) +((-MY*IZ - MZ*IYZ)*Z))/(IY*IZ - IYZ**2
01020      TALPHA =((MY*IZ + MZ*IYZ)/(MZ*IY + MY*IYZ))
01030      ALPHA  = ATAN(TALPHA)
01040      ALPHA = ALPHA*180/3.14159
01050*
01060*           PRINTING OUTPUT
01070*
01080      IF (ANS.EQ.1) THEN
01090         UNIT = ' PSI'
01100      ELSE
01110         UNIT = ' MPA'
01120      ENDIF
01130     PRINT 10,'THE BENDING STRESS AT (',Y,',',Z,') IS',SIGMA,UNIT,'.'
01140     PRINT 20,'THE ANGLE OF INCLINATION OF THE NEUTRAL AXIS IS',ALPHA,'DEG.'
01150*
01160*           FORMAT STATEMENTS
01170*
01180 10   FORMAT(//,2X,A23,F6.1,A1,F6.1,A4,F10.1,A4,A1)
01190 20   FORMAT(/,2X,A,F8.2,1X,A)
01200*
01210      STOP
01220      END
```

题 12.9 利用题 12.8 中的 FORTRAN 程序重解题 12.6。

解 ☞ 使用该程序需输入题 12.6 中的弯矩分量和截面的几何性质。关于弯矩分量方向的考

虑指出:峰值应力将发生在图 12-23 中的 B 点,该点的坐标是 $y=3$、$z=-1.5$。程序运行的输出如下:

```
run
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI

 ENTER 1,2
? 1


 NOTE, THE COORDINATE SYSTEM USED HAS THE X-AXIS ORIENTED
 SO THAT IT IS POSITIVE INTO THE PAGE AND ACTING AS THE
 NEUTRAL AXIS OF THE SECTION. THE POSITIVE Y-AXIS IS DIRECTED
 DOWNWARD, WHILE THE POSITIVE Z-AXIS IS TO THE LEFT AS ONE
 FACES THE SECTION. (IT IS A RIGHT HANDED SYSTEM.)


 PLEASE ENTER THE SECTION PROPERTIES IY,IZ,IYZ ,(IN^4):
? 13.5,54,0

 PLEASE ENTER THE MAGNITUDE OF THE BENDING MOMENTS MY,MZ
 FOLLOWING THE SIGN CONVENTION STATED (LB-FT):
? 1000,1732

 ENTER THE Y AND Z COORDINATES OF THE POINT WHERE STRESS
 DETERMINATION IS DESIRED.(FOLLOW THE SIGN CONVENTION STATED)
 Y AND Z ARE DISTANCES IN INCHES FROM THE NEUTRAL AXIS:
? 3,-1.5


  THE BENDING STRESS AT (    3.0,   -1.5) IS     2488.0 PSI.

  THE ANGLE OF INCLINATION OF THE NEUTRAL AXIS IS   66.59 DEG.

SRU        0.895 UNTS.

 RUN COMPLETE.
```

题 12.10　利用题 12.8 中的 FORTRAN 程序重解题 12.7。

解　☞ 向该程序输入题 12.7 中的截面几何性质、弯矩分量和 A 点的坐标,可得到如下的输出结果,这些结果是与题 12.7 结果一致的。

```
run
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI

 ENTER 1,2
? 2


 NOTE, THE COORDINATE SYSTEM USED HAS THE X-AXIS ORIENTED
 SO THAT IT IS POSITIVE INTO THE PAGE AND ACTING AS THE

 NEUTRAL AXIS OF THE SECTION. THE POSITIVE Y-AXIS IS DIRECTED
 DOWNWARD, WHILE THE POSITIVE Z-AXIS IS TO THE LEFT AS ONE
 FACES THE SECTION. (IT IS A RIGHT HANDED SYSTEM.)


 PLEASE ENTER THE SECTION PROPERTIES IY,IZ,IYZ ,MM^4):
? 7.41E+6,7.41E+6,-4.201E+6

 PLEASE ENTER THE MAGNITUDE OF THE BENDING MOMENTS MY, MZ
 FOLLOWING THE SIGN CONVENTION STATED (KN-M):
? 0.10

 ENTER THE Y AND Z COORDINATES OF THE POINT WHERE STRESS
 DETERMINATION IS DESIRED. (FOLLOW THE SIGN CONVENTION STATED)
 Y AND Z ARE DISTANCES IN MILLIMETERS FROM NEUTRAL AXIS:
```

```
? -39.9,-39.9
 THE BENDING STRESS AT ( -39.9, -39.9) IS    -124.3 MPA.
 THE ANGLE OF INCLINATION OF THE NEUTRAL AXIS IS  -29.55 DEG.
```

12.4.3 曲梁

题 12.11 考虑一初始曲梁的弹性弯曲问题，该梁轴曲线平面也是各横截面的对称面，弯曲载荷作用在该对称面内。推导横截面上任意点弯曲应力和弯矩之间的关系表达式。假定材料是服从胡克定律的。

解 ☞ 曲梁如图 12-25 所示，R 表示从曲率中心 C 到（各横截面形心组成的）曲梁轴线的距离。弯矩 M 取图示方向为正向，亦即它使曲率趋于增大（使曲率半径减小）时为正。

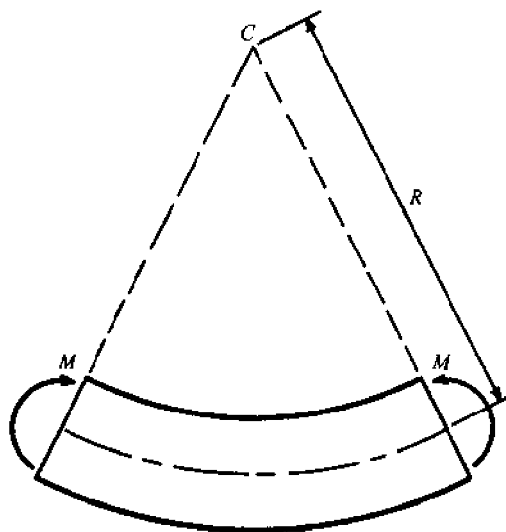


图 12-25

考查形变前相应于中心角 $d\theta$ 一段曲梁的行为，形变后，这个角变为 $d\theta+\Delta d\theta$，如图 12-26 所示。正如在题 8.1 中研究过的初始直梁的情况，假定初始垂直于梁轴线的平截面弯曲后仍为平面。因此，加载前的法向截面 CD 加载之后移动到 $C'D'$。为方便考虑，可以假设 AB 在空间上保持固定，这毫不影响所得结果。我们仍然假定有一个轴线，即中性轴。中性轴上的纵向纤维的长

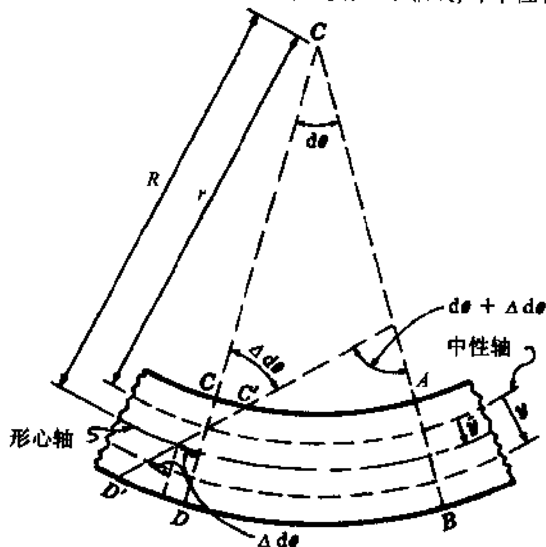


图 12-26

度不变，因此把截面 CD 看作绕中性轴旋轴，如图 12-26 所示。但是并无理由认为中性轴通过横截面的形心，就像题 8.1 中的初始直梁那样。在当前的曲梁问题中，图 12-26 表明：纵向纤维的总体伸长会随着与中性轴距离 y 的不同而变化，坐标 y 远离曲率中心时为正。很明显，这些纵向纤维在加载前的长度是不同的，因此，单位伸长，即法向应变与离中性轴的距离不成正比，这一点就是曲梁行为与题 8.1 中讨论的初始直梁行为之间最基本的不同。因为假定该曲梁服从胡克定律，所以这些纤维的应力也不与至中性轴的距离成正比。

现在考虑距中性轴为 y 纤维的伸长。由图 12-26 可知，这段伸长就是 $y(\Delta d\theta)$ 。将此段伸长除以纤维的初始长度 $(r+y)d\theta$，得到法向应变。

$$\varepsilon = \frac{y(\Delta d\theta)}{(r+y)d\theta} \tag{a}$$

式中 r 表示中性层的曲率半径。注意到材料服从胡克定律，故法向应力为

$$\sigma = \frac{Ey(\Delta d\theta)}{(r+y)d\theta} \tag{b}$$

现在通过令整个截面上的法向合力为零来确定中性轴的位置，即

$$\int_A \sigma da = \int_A \frac{Ey(\Delta d\theta)da}{(r+y)d\theta} = \frac{E(\Delta d\theta)}{d\theta}\int_A \frac{y da}{(r+y)} = 0 \tag{c}$$

上式积分是在整个横截面面积 A 上进行的。如果 $u = r + y$（即从曲率中心 C 到任意纤维的距离），那么(c)式就成为

$$\int_A \frac{(u-r)da}{u} = 0 \quad 即 \quad r = \frac{A}{\int_A da/u} \tag{d}$$

式中分母上的积分表示横截面面积的数学特性，它类似于直梁弯曲问题中的惯性矩。

此外，纤维上法应力的力矩之和一定等于弯矩：

$$M = \int_A \sigma y da = \int_A \frac{Ey^2(\Delta d\theta)da}{(r+y)d\theta} = \frac{E(\Delta d\theta)}{d\theta}\int \frac{y^2 da}{r+y}$$

将上式化简，有

$$\int_A \frac{y^2 da}{r+y} = \int_A y da - r\int_A \frac{y da}{r+y}$$

第一个积分表示横截面面积关于中性轴的一次矩或静矩，根据(c)式第二个积分等于零，于是

$$M = \frac{E(\Delta d\theta)}{d\theta}[A\bar{y}] \tag{e}$$

式中 $\bar{y}$ 是由形心轴到中性轴的距离。联合(b)式和(e)式可以得到任意纤维上的法应力是

$$\sigma = \frac{My}{A\bar{y}(r+y)} \tag{f}$$

由(f)式显然可知，应力沿曲梁的高度呈双曲线分布，最大应力将永远发生在梁凹面侧的外层纤维处，而且中性层位于形心轴和曲率中心之间。

题 12.12　U 形杆为矩形截面，尺寸为 40 mm × 60 mm，受一对共线、方向相反的集中力 9680 N 作用，如图 12-27 所示。力的作用线距 U 底横截面形心 120 mm。求点 A 和点 B 处的法应力。

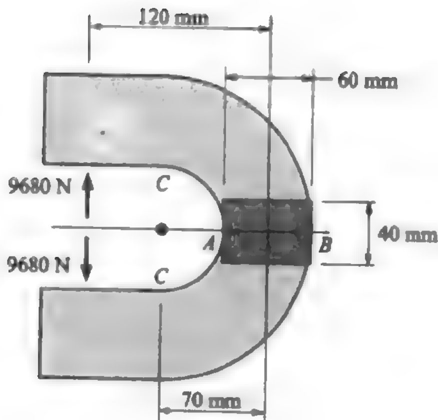


图 12-27

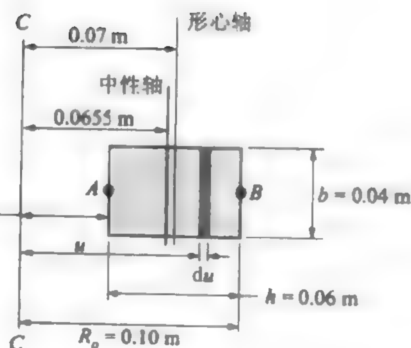


图 12-28

解 ☞ 首先必须运用题 12.11 中的(d)式确定中性轴的位置，与 A 点及 B 点重合的水平截面如图 12-28 所示，图中引入变量 u 计算题 12.11(d)式的积分，亦即曲率中心至中性轴的距离为

$$r = \frac{bh}{\int b(\mathrm{d}u)/u} = \frac{h}{(\ln)_{R_0}^{R_0}} = \frac{0.6\ \mathrm{m}}{\ln(0.1\ \mathrm{m}/0.004\ \mathrm{m})} = 0.0655\ \mathrm{m}$$

因此变量 $\bar{y} = 0.07\ \mathrm{m} - 0.0655\ \mathrm{m} = 0.0045\ \mathrm{m}$。

题 12.11 中的(f)式给出了弯曲应力，这里，由于载荷趋于使曲率减小，故 $M = -(9680\ \mathrm{N})(0.12\ \mathrm{m})$，称之为负弯矩。在图 12-28 中的 A 点处，$y = -0.0255\ \mathrm{m}$，故 A 处的弯曲应力为

$$\sigma_A = \frac{(-1162\ \mathrm{N\cdot m}) + (-0.0255\ \mathrm{m})}{(0.06\ \mathrm{m})(0.04\ \mathrm{m})(0.0045\ \mathrm{m})[0.0655\ \mathrm{m} - 0.0255\ \mathrm{m}]} = 68.6\ \mathrm{MPa}$$

在 B 点处，$y = 0.0345$，故 B 处的弯曲应力为

$$\sigma_B = \frac{(-1162\ \mathrm{N\cdot m}) + (-0.0345\ \mathrm{m})}{(0.06\ \mathrm{m})(0.04\ \mathrm{m})(0.0045\ \mathrm{m})[0.0655\ \mathrm{m} + 0.0345\ \mathrm{m}]} = -37.1\ \mathrm{MPa}$$

除了这些弯曲应力之外，施加载荷的拉伸作用在 A-B 截面内产生均匀的拉应力，为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{9680\ \mathrm{N}}{(0.04\ \mathrm{m})(0.06\ \mathrm{m})} = 4.03\ \mathrm{MPa}$$

因此 A 点处的法向合应力为

$$\sigma'_A = 68.6\ \mathrm{MPa} + 4.03\ \mathrm{MPa} - 72.63\ \mathrm{MPa}$$

B 点处的法向合应力为

$$\sigma'_B = -37.1\ \mathrm{MPa} + 4.03\ \mathrm{MPa} = -33.07\ \mathrm{MPa}$$

题 12.13 编制一计算机 FORTRAN 程序，求曲梁纯弯曲时最外层纤维的弯曲应力，如图 12-25所示。

解 ☞ 根据题 12.11 中给出的一般理论，首先必须确定中性层的位置，亦即图 12-26 中中性层与曲率中心的距离 r。由题 12.11 的(d)式可知，距离 r 被看作是截面形状的函数，从一般表达式(d)出发，我们编制一计算机程序，它适合于三种常用的横截面：(a)矩形，(b)圆形，(c)梯形。下面的程序对三种截面的每一种都计算了全截面上(题 12.11)的(d)式积分。然后根据(f)式计算了图 12-25 所示的、在纯弯矩 M 作用下外层纤维的应力，这里应注意，若弯矩作用使梁的曲率减小则弯矩为负。程序如下：

```
00010*************************************************************************
00020                          PROGRAM CRVBEAM
00030*************************************************************************
00040*
00050*          AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00060*          DATE  : FEBRUARY 5, 1989
00070*
00080*   BRIEF DESCRIPTION:
00090*      THE FOLLOWING PROGRAM CONSIDERS THE BENDING OF AN INITIALLY
00100*   CURVED ELASTIC BEAM FOR WHICH THE PLANE OF CURVATURE IS ALSO A
00110*   PLANE OF SYMMETRY AT EVERY CROSS SECTION. THE BENDING LOAD ACTS IN
00120*   THIS PLANE OF SYMMETRY. THE MAXIMUM BENDING STRESS OCCURS AT THE
00130*   EXTREME FIBERS OF THE SECTION, AND CAN BE DETERMINED FOR A RECTANGULA
00140*   CIRCULAR, OR TRAPEZOIDAL CROSS SECTION. NOTE, THE RELATIONSHIP BETWEE
00150*   THE BENDING MOMENT AND BENDING STRESS INVOLVES TAKING THE NATURAL
00160*   LOGARITHM OF THE RATIO BETWEEN THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURV-
00170*   ATURE TO THE OUTER AND INNER EXTREME FIBERS. FOR EXTREMELY THIN
00180*   CROSS SECTIONS, THIS RATIO MAY BE QUITE CLOSE TO UNITY, IN WHICH
00190*   CASE THE CALCULATION REQUIRES PRECISION BEYOND THE CAPABILITIES OF
00200*   MOST COMPUTERS. TO AVOID THIS PROBLEM, A SERIES EXPANSION HAS BEEN
00210*   EMPLOYED TO APPROXIMATE THE LOGARITHMIC FUNCTION. FOR THE CASE OF
00220*   THE TRAPEZOIDAL CROSS SECTION, THE LOGARITHMIC FUNCTION IS USED,
00230*   ASSUMING THAT IF THE BEAM WERE SUFFICIENTLY THIN TO CAUSE PROBLEMS
00240*   IN THE CALCULATIONS, THE USER COULD APPROXIMATE THE CROSS SECTION
00250*   AS RECTANGULAR WITH CONSIDERABLE ACCURACY.
00260*
00270*   INPUT:
00280*      THE USER IS FIRST ASKED IF USCS OR SI UNITS ARE DESIRED, AND THEN
00290*   FOR THE SHAPE OF THE BEAM CROSS SECTION. THEN, DEPENDING ON THE SHAPE
00300*   OF THE SECTION, THE PHYSICAL DIMENSIONS AND THE DISTANCE FROM THE
00310*   CENTER OF CURVATURE TO THE INNER FIBERS OF THE SECTION ARE INPUTTED.
00320*   FINALLY, AFTER THE PROGRAM FINDS THE CENTRAL AXIS LOCATION, THE USER
00330*   MUST DETERMINE AND ENTER THE BENDING MOMENT BASED ON THE LOADING.
00340*
00350*   OUTPUT:
00360*      THE PROGRAM INITIALLY WILL DETERMINE THE LOCATION OF THE CENTRAL
00370*   AXIS FOR THE PARTICULAR CROSS-SECTION. (FROM THIS INFORMATION, THE
00380*   USER THEN MUST DETERMINE THE BENDING MOMENT BASED ON THE LOADING.)
```

```
00390*  ULTIMATELY, THE BENDING STRESS AT THE EXTREME FIBERS OF THE CROSS
00400*  SECTION IS GIVEN.
00410*
00420*  VARIABLES:
00430*    ANS          ---   USER INPUT FOR CHOICE OF UNITS
00440*    SHAPE        ---   USER INPUT FOR CHOICE OF X-SECTIONAL SHAPE

00450*    B,H          ---   DIMENSIONS OF BASE, HEIGHT FOR RECTANGULAR SECTION
00460*    D            ---   DIAMETER OF CIRCULAR SECTION
00470*    B1,B2,H      ---   DIMENSIONS OF INNER BASE, OUTER BASE, AND HEIGHT
00480*                       FOR TRAPEZOIDAL SECTION
00490*    RI,RO        ---   DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE INNER
00500*                       AND OUTER FIBERS OF THE SECTION RESPECTIVELY
00510*    A            ---   AREA OF THE SECTION
00520*    RR           ---   DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE CENTRA
00530*                       AXIS OF THE SECTION
00540*    YBAR         ---   DISTANCE FROM THE CENTRAL AXIS TO THE NEUTRAL AXIS
00550*    R            ---   THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE
00560*                       NEUTRAL AXIS (THE DIFFERENCE BETWEEN RR AND YBAR)
00570*    K            ---   A CONSTANT USED FOR THE CASE OF THE CIRCULAR SECTIO
00580*    YI,YO        ---   THE DISTANCES FROM THE NEUTRAL AXIS TO THE INNER AN
00590*                       OUTER FIBERS RESPECTIVELY
00600*    M            ---   THE BENDING MOMENT ACTING ON THE SECTION
00610*  SIGMAI,SIGMAO---   THE BENDING STRESSES AT THE INNER AND OUTER FIBERS
00620*  A1,A2,YJ,YK, ---   VARIABLES USED TO FIND THE CENTROID OF TRAPEZOIDAL
00630*  SUMAY,SUMA,HOLD    SECTION
00640*   UNIT        ---   CHARACTER VARIABLE DENOTING THE APPROPRIATE UNITS
00650*
00660*************************************************************************
00670**********                  MAIN PROGRAM                    ***********
00680*************************************************************************
00690*
00700*          VARIABLE DECLARATION
00710*
00720      REAL B,H,D,B1,B2,RI,RO,A,RR,YBAR,R,K,YI,YO,M,SIGMAI,SIGMAO
00730      REAL A1,A2,YJ,YK,SUMAY,SUMA,HOLD
00740      INTEGER ANS,SHAPE
00750      CHARACTER UNIT*7
00760*
00770*          USER INPUT
00780*
00790      PRINT*,'PLEASE INPUT YOUR CHOICE OF UNITS:'
00800      PRINT*,'1 - USCS'
00810      PRINT*,'2 - SI'
00820      PRINT*,' '
00830      PRINT*,'ENTER 1,2 :'
00840      READ*,ANS
00850      PRINT*,' '
00860*
00870      PRINT*,' '
00880 10   PRINT*,'PLEASE INPUT THE SHAPE OF THE BEAM CROSS SECTION:'
00890      PRINT*,'1 - RECTANGULAR'
00900      PRINT*,'2 - CIRCULAR'
00910      PRINT*,'3 - TRAPEZOIDAL'
00920      PRINT*,' '
00930      PRINT*,'ENTER 1,2,3:'
00940      READ*,SHAPE
00950*
00960      IF(ANS.EQ.1) THEN
00970         PRINT*,'PLEASE INPUT THE FOLLOWING DIMENSIONS IN INCHES...'
00980         UNIT='INCHES.'
00990      ELSE
01000         PRINT*,'PLEASE INPUT THE FOLLOWING DIMENSIONS IN METERS...'
01010         UNIT ='METERS.'
01020      ENDIF
01030*
01040*                PROMPTS FOR THE DIMENSIONS OF THE APPROPRIATE SECTION
01050*
01060     PRINT*,' '
01070     IF (SHAPE.EQ.1) THEN
01080         PRINT*,'PLEASE INPUT THE DIMENSIONS OF THE BASE AND HEIGHT, '
01090         PRINT*,'AND THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE  '
01100         PRINT*,'INNER FIBERS OF THE X-SECTION: (B,H,RI)'
01110         READ*,B,H,RI
01120         PRINT*,' '
01130     ELSEIF (SHAPE.EQ.2) THEN
01140         PRINT*,'PLEASE INPUT THE DIAMETER AND DISTANCE FROM THE CENTER O
01150         PRINT*,'CURVATURE TO THE INNER FIBERS OF THE X-SECTION: (D,RI)'
01160         READ*,D,RI
01170         PRINT*,' '
01180     ELSEIF (SHAPE.EQ.3) THEN
01190         PRINT*,'PLEASE INPUT THE DIMENSIONS OF THE INSIDE, THEN OUTSIDE'
01200         PRINT*,'BASES, THE HEIGHT, AND THE DISTANCE FROM THE CENTER OF'
01210         PRINT*,'CURVATURE TO THE INNER FIBERS OF THE X-SECTION:(B1,B2,H,RI)'
```

```
01220        READ*,B1,B2,H,RI
01230        PRINT*,' '
01240     ELSE
01250        PRINT*,'YOU MUST ENTER A 1,2 OR 3!'
01260        GO TO 10
01270     ENDIF
01280*
01290*          END USER INPUT
01300*
01310*     CALCULATIONS --- IN EACH CASE, THE DISTANCE FROM THE CENTER OF
01320*                      CURVATURE TO THE CENTRAL AND NEUTRAL AXIS IS
01330*                      FOUND (RR AND  R) ,AND THEN THE DISTANCE FROM
01340*                      THE NEUTRAL AXIS TO THE EXTREME FIBERS (YI,YO) IS
01350*                      DETERMINED.
01360*
01370      IF (SHAPE.EQ.1) THEN
01380*
01390*              IF SHAPE EQUALS ONE, THEN THE SECTION IS RECTANGULAR
01400*
01410        A = B*H
01420        RO = RI + H
01430        RR = (H)/2 + RI
01440        YBAR = H**2/(12*RR)
01450        R = RR-YBAR
01460        YI = YBAR -(H/2)
01470        YO = YBAR +(H/2)
01480      ELSEIF (SHAPE.EQ.2) THEN
01490*
01500*              IF SHAPE EQUALS TWO, THEN THE SECTION IS CIRCULAR
01510*
01520        A = (3.14159/4)*D**2
01530        RR = RI + (D/2.)
01540        K = ((D/(2*RR))**2)/4  + ((D/(2*RR))**4)/8
01550        YBAR = (K*RR)/(1-K)
01560        R = RR - YBAR
01570        YI = YBAR -(D/2)
01580        YO = YBAR +(D/2)
01590      ELSEIF (SHAPE.EQ.3) THEN
01600*
01610*              IF SHAPE EQUALS THREE, THEN THE SECTION IS TRAPEZOIDAL
01620*
01630        A = ((B1 + B2)/2)*H
01640        RO = RI + H
01650        HOLD = 0.0
01660*
01670*              FIRST, THE CENTROID OF THE TRAPEZOIDAL SECTION IS FOUND
01680*
01690 20     IF (B1.GT.B2) THEN
01700           A1 = (H/4)*(B1-B2)
01710           A2 = B2*H
01720           YJ = H/3.
01730           YK = H/2.
01740           SUMA = (2*A1) + A2
01750           SUMAY = (A1*YJ*2) + (A2*YK)
01760        ELSE
01770           HOLD = B2
01780           B2 = B1
01790           B1 = HOLD
01800           GO TO 20
01810        ENDIF
01820        IF (HOLD.EQ.0.) THEN
01830           RR = RI + (SUMAY/SUMA)
01840        ELSE
01850           RR = RI + (H - (SUMAY/SUMA))
01860        ENDIF
01870*
01880        R = ((H**2)*(B1 + B2))/2.
01890        R = R/(((B1*RO) - (B2*RI))*(LOG(RO/RI)) - H*(B1 - B2))
01900        YBAR = RR-R
01910        YI = YBAR - (SUMAY/SUMA)
01920        YO = YBAR + (H-(SUMAY/SUMA))
01930      ENDIF
01940*
01950*              ONCE THE CENTRAL AXIS HAS BEEN DETERMINED, THE USER
01960*              IS PROMPTED FOR THE BENDING MOMENT WHICH THEY MUST
01970*              CALCULATE BASED ON THIS DIMENSION AND THE GIVEN LOAD
01980*
01990      PRINT*,'THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE CENTRAL'
02000      PRINT 15,'AXIS OF THE CURVED SECTION IS:',RR,UNIT
02010      PRINT*,' '
02020      PRINT*,'GIVEN THIS DIMENSION, THE USER MUST NOW CALCULATE THE'
02030      PRINT*,'MOMENT ACTING ON THE CROSS SECTION...THE MOMENT IS THE'
02040      PRINT*,'PRODUCT OF THE APPLIED LOAD AND THE DISTANCE TO THE CENTRAL'
02050      PRINT*,'AXIS FROM THE POINT OF APPLICATION. NOTE, THE MOMENT IS '
02060      PRINT*,'NEGATIVE IF IT ACTS TO REDUCE THE CURVATURE!'
02070      PRINT*,' '
```

```
02080      PRINT*,'PLEASE ENTER THE MOMENT (IN N-M OR LB-IN):'
02090      READ*,M
02100      PRINT*,' '
02110*
02120*           CALCULATING THE BENDING STRESS AT THE INNER AND OUTER FIBERS
02130*
02140      SIGMAI = (M*YI)/(A*YBAR*(R+YI))
02150      SIGMAO = (M*YO)/(A*YBAR*(R+YO))
02160*
02170      IF (ANS.EQ.1) THEN
02180         UNIT = ' PSI.'
02190      ELSE
02200         SIGMAI = SIGMAI/1E6
02210         SIGMAO = SIGMAO/1E6
02220         UNIT = ' MPA.'
02230      ENDIF
02240*
02250*               PRINTING OUTPUT
02260*
02270      PRINT*,' '
02280      PRINT 15,'THE BENDING STRESS AT THE INNER FIBERS IS :',SIGMAI,UNIT
02290      PRINT 15,'THE BENDING STRESS AT THE OUTER FIBERS IS :',SIGMAO,UNIT
02300*
02310 15   FORMAT(1X,A,F11.3,1X,A)
02320*
02330      STOP
02340      END
```

题 12.14　运用题 12.13 的 FORTRAN 程序，重解题 12.12，求 A 点处的弯曲应力。

解　☞ 运用题 12.12 中的弯矩和几何性质，程序计算得到 A 点处的弯曲应力为 68.58 MPa，和题 12.12 中求得的值非常一致。要注意一点，若要求 A 点处的法向合成应力，还必须加上均匀法应力 4.03 MPa。下面的计算机程序仅仅求得弯曲作用的结果。

```
run
 PLEASE INPUT YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI

 ENTER 1,2 :
? 2


 PLEASE INPUT THE SHAPE OF THE BEAM CROSS SECTION:
 1 - RECTANGULAR
 2 - CIRCULAR
 3 - TRAPEZOIDAL

 ENTER 1,2,3:
? 1
 PLEASE INPUT THE FOLLOWING DIMENSIONS IN METERS...

 PLEASE INPUT THE DIMENSIONS OF THE BASE AND HEIGHT,
 AND THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE
 INNER FIBERS OF THE X-SECTION: (B,H,RI)
? 0.04,0.06,0.04

 THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE CENTRAL
 AXIS OF THE CURVED SECTION IS:        .070 METERS.

 GIVEN THIS DIMENSION, THE USER MUST NOW CALCULATE THE
 MOMENT ACTING ON THE CROSS SECTION...THE MOMENT IS THE
 PRODUCT OF THE APPLIED LOAD AND THE DISTANCE TO THE CENTRAL
 AXIS FROM THE POINT OF APPLICATION. NOTE, THE MOMENT IS
 NEGATIVE IF IT ACTS TO REDUCE THE CURVATURE!

 PLEASE ENTER THE MOMENT (IN N-M OR LB-IN):
? -1162


 THE BENDING STRESS AT THE INNER FIBERS IS :
 68.58
```

题 12.15 考虑一承受 5000 lbf 铅直力作用的起重钩，其横截面为梯形，如图 12-29 所示。应用题 12.13 的计算机程序求 A 点的拉应力。

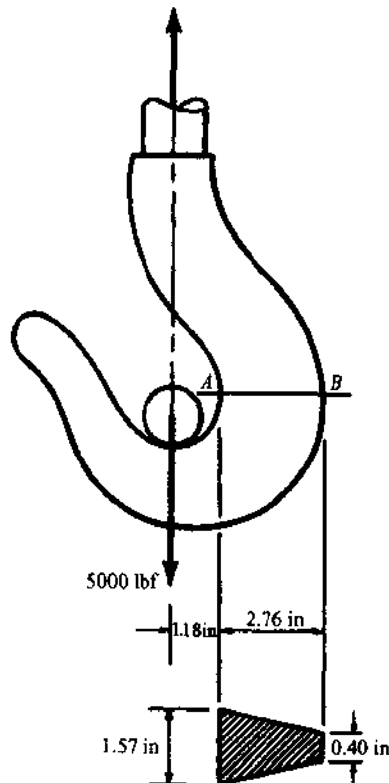


图 12-29

解 ☞ 在这里，题 12.11 的理论是适用的，但是该题中(d)式的积分计算较繁琐，因此对题 12.13 中的 FORTRAN 程序输入图 12-29 所示的几何性质。程序首先输出从曲率中心到形心轴的距离，为 2.287 in。由此可以计算出作用力矩为

$$M = (1.18\ \text{in} + 2287\ \text{in})(5000\ \text{lbf}) = -17335\ \text{lbf} \cdot \text{in}$$

现在再把这个力矩输入程序，就可得到内、外层纤维的应力，它们在最后两行输出。

```
run
 PLEASE INPUT YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI
 ENTER 1,2 :
? 1
 PLEASE INPUT THE SHAPE OF THE BEAM CROSS SECTION:
 1 - RECTANGULAR
 2 - CIRCULAR
 3 - TRAPEZOIDAL
 ENTER 1,2,3:
? 3
 PLEASE INPUT THE FOLLOWING DIMENSIONS IN INCHES...
 PLEASE INPUT THE DIMENSIONS OF THE INSIDE, THEN OUTSIDE
 BASES, THE HEIGHT, AND THE DISTANCE FROM THE CENTER OF
 CURVATURE TO THE INNER FIBERS OF THE X-SECTION:(B1,B2,H,RI)
? 1.57,0.40,2.76,1.18

 THE DISTANCE FROM THE CENTER OF CURVATURE TO THE CENTRAL
 AXIS OF THE CURVED SECTION IS:      2.287 INCHES.

 GIVEN THIS DIMENSION, THE USER MUST NOW CALCULATE THE
 MOMENT ACTING ON THE CROSS SECTION...THE MOMENT IS THE
```

```
 PRODUCT OF THE APPLIED LOAD AND THE DISTANCE TO THE CENTRAL
 AXIS FROM THE POINT OF APPLICATION. NOTE, THE MOMENT IS
 NEGATIVE IF IT ACTS TO REDUCE THE CURVATURE!
 PLEASE ENTER THE MOMENT (IN N-M OR LB-IN):
? -17335

 THE BENDING STRESS AT THE INNER FIBERS IS :  19878.782 PSI.
 THE BENDING STRESS AT THE OUTER FIBERS IS : -12928.359 PSI.
SRU      1.134 UNTS.
```

除了这些弯曲应力之外，由于 5000 lbf 力的直接拉伸作用，在整个截面 AB 上还有均布拉应力，为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{5000\ \text{lbf}}{[(157 + 040)/2\ \text{in}](276\ \text{in})} = 1839\ \text{lbf/in}^2$$

计算机求得的弯曲应力必须再加上此应力，因此，A 点处的真实应力为

$$\sigma_A' = 19879\ \text{lbf/in}^2 + 1839\ \text{lbf/in}^2 = 21718\ \text{lbf/in}^2$$

12.5　习　　题

题 12.16　试求有纵向切口的薄壁圆截面的剪切中心(图 12-30)。(答案：$e = 2R$)

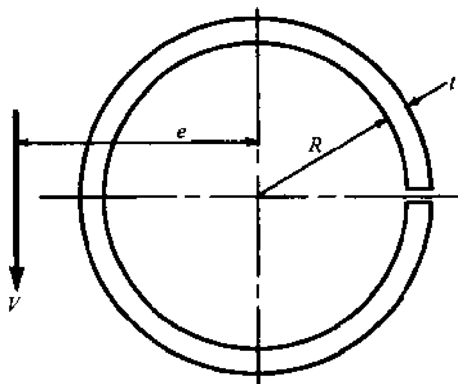


图 12-30

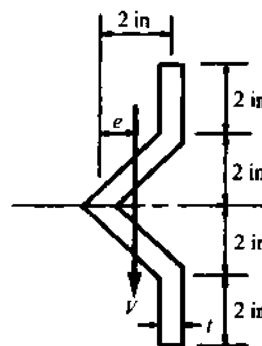


图 12-31

题 12.17　试求图 12-31 所示的薄壁"帽形"截面的剪切中心。(答案：$e = 0.51$ in)

题 12.18　试求图 12-32 所示的薄壁截面的剪切中心。(答案：$e = 6.85$ in)

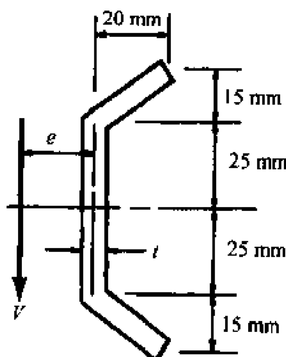


图 12-32

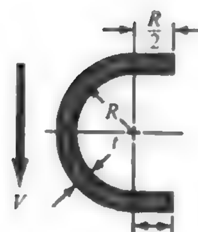


图 12-33

题 12.19　试求图 12-33 所示薄壁截面的剪切中心。(答案：距形心 $0.747R$)

题 12.20　试求图 12-34 所示薄壁截面的剪切中心。(答案：距形心 $0.703a$)

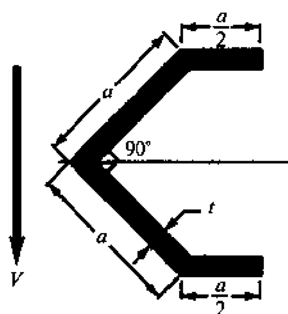


图 12-34

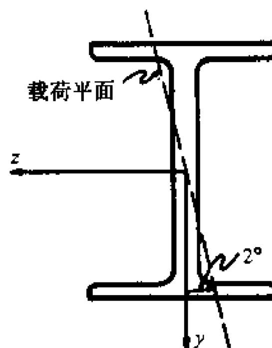


图 12-35

题 12.21* 工字形截面结构钢梁,截面高度为 2500 mm,翼缘宽度为 50 mm。受一位于与铅直对称轴倾斜 2° 的平面内弯矩作用(见图 12-35)。求弹性拉应力比力矩作用在铅直对称面内时增加的百分值。此截面的 $I_z = 57\times10^6\ \text{mm}^4$, $I_y = 3.3\times10^6\ \text{mm}^4$。(答案:30%)

题 12.22 Z 形截面结构铝,尺寸如图 12-36 所示,横截面几何性质为:$I_y = 4.1\times10^6\ \text{mm}^4$, $I_z = 10.7\times10^6\ \text{mm}^4$, $I_{yz} = 5.0\times10^6\ \text{mm}^4$。弯矩分量 $M_y = -2.235\ \text{kN·m}$, $M_z = 4.47\ \text{kN·m}$。求 A 点的弯曲应力。(答案:−35.5 MPa)

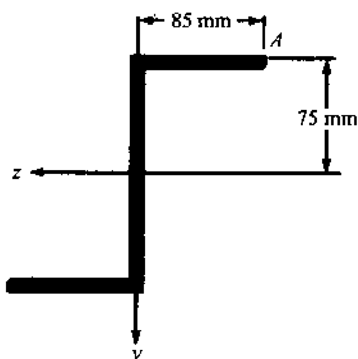


图 12-36

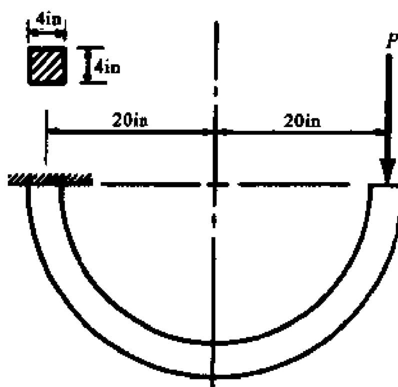


图 12-37

题 12.23 应用题 12.8 的 FORTRAN 程序,求题 12.7 中 B 点处的弯曲应力,忽略圆角的影响。(答案:153.3 MPa)

题 12.24 正方形截面的半圆形曲杆,一端固定,另一端受力 P 作用,如图 12-37 所示。横截面边长为 4 in,曲杆的半径为 20 in。如果固定端的最大拉应力不得超过 28000 lbf/in^2,求力 P 的最大允许值。(答案:6460 lbf)

* 此题中原缺宽度 50 mm,译者根据计算结果补充了这一数据。——译者注

第13章 梁的塑性形变

13.1 序 言

结构设计的某些情况可以允许构件产生适量的永久形变。在这种情况下，许可载荷有可能大于弹性理论给出的许可载荷，因为弹性理论不允许结构中任何点处的应力达到材料的屈服点。这种结果有利于更有效地使用材料，被称为塑性设计。这种更有效的设计是可行的，其原因在于某些材料，如结构钢，在达到屈服点之后，仍能承担相对较大的塑性形变。这可由图1-5(第2页)应力-应变曲线水平区段来表示。

13.2 塑性铰

伴随作用在梁上的横向载荷不断增加，在梁上某个特殊位置的最外层纤维开始屈服，并且屈服相当快地向内部纤维扩展。最终，中性轴一侧拉伸纤维的应力全部达到拉伸屈服应力，另一侧压缩纤维的应力全部达到压缩屈服应力时，该位置将产生流动或铰链作用，称为塑性铰；通过塑性铰传递的弯矩将保持不变。在本书中塑性铰将用中空小圆环表示。

13.3 完全塑性矩

在塑性铰中产生的弯矩称为完全塑性矩，这一概念曾在第8章中讨论过。

13.4 塑性铰的位置

通常，塑性铰将在最大弯矩作用处产生。对于承受集中力和集中力偶的梁，峰值弯矩永远会在这些载荷之一作用处，或在某些约束处；因而塑性铰必然首先发生在这些位置。对于分布载荷，塑性铰的位置较难确定，经常需研究若干个可能位置。这将在题13.8和题13.9中讨论。

13.5 坍塌机构

当在结构中有足够数量的塑性铰形成时，结构会发生一个全塑性承载能力的问题，此时结构(如梁或刚架)位于铰链之间的区段在载荷没有任何进一步增长的情况下仍会移位，亦即铰链之间部分的行为类似于机构。本质上，铰链将允许有运动自由度，在这种条件下，一对铰链之间的形变物体的任何形状均可用铰链间的一段直线来表示，坍塌机构的典型表示方法可见题13.2、题13.4和题13.8～13.10。

13.6 极限载荷

足以导致结构成为机构的载荷称为极限载荷或坍塌载荷。任何基于有机构产生这一概念的设计称为极限设计。本章的所有问题都是讲述极限载荷的计算问题。

13.7 例 题

题 13.1 如图 13-1(a)所示的简支梁在中点处承受集中力作用，该梁是由屈服应力等于 38000 lbf/in^2 的钢材制成的，其截面为图 13-1(b)所示的矩形，宽度为 b，高度为 $1.6b$，梁长 40 in。试求使该梁全塑性时的宽度 b，此外若只使梁最外层纤维屈服，再求宽度 b'。

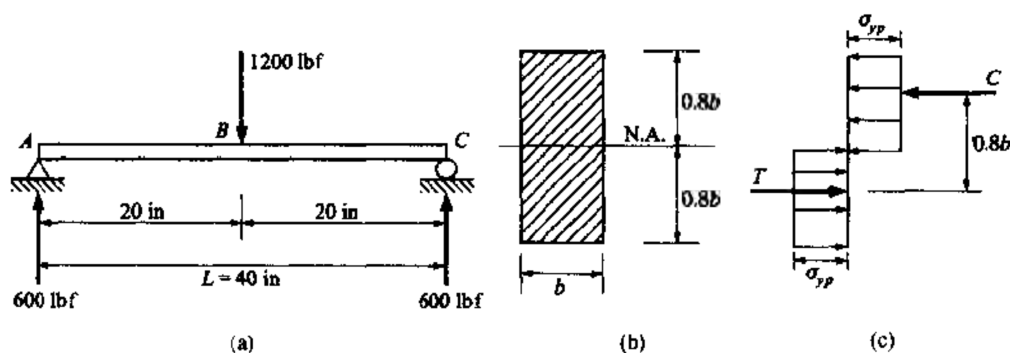


图 13-1

解 由对称性可知，A 处和 C 处的支座反力均为 600 lbf，中点 B 处的峰值弯矩为

$$(600\ \text{lbf})(20\ \text{in}) = 12000\ \text{lbf}\cdot\text{in}$$

此时，中性轴上侧的纤维受压缩，合力为 C，下侧的纤维受拉伸，合力为 T，如图 13-1(c)所示，上述两力作用线的位置也如图 13-1(c)所示。由力 T 和力 C 组成力偶的力偶矩为

$$M_p = (\sigma_{yp})(0.8b)(b)(0.8b) = 0.64b^3\sigma_{yp}$$
$$= 0.64b^3(38000)$$

于是

$$0.64b^3(38000) = 12000, \quad b = 0.79\ \text{in}, \quad 1.6b = 1.26\ \text{in}$$

于是，梁的截面积是 $0.995 in^2$

由题 8.25 可知，对于矩形截面最大可能弹性弯矩(亦即最外侧纤维刚好达到屈服点)，为

$$M_e = \frac{b'(h')^2}{6}\sigma_{yp}$$

因此

$$12000 = \frac{b'(1.6b')^2}{6}(38000)$$

解出

$$b' = 0.905\ \text{in}, \qquad 1.6b = 1.45\ \text{in}$$

此时，截面积为 $1.312\ in^2$。全弹性弯矩相应的面积为 $1.312\ in^2$，因而，若允许全塑性作用，对于任意的梁长，均可使梁的重量降低 24.2%。根据建筑规范，对以上的每个计算都应引入适宜的安全系数。

题 13.2 试求图 13-2 所示简支梁的极限载荷。

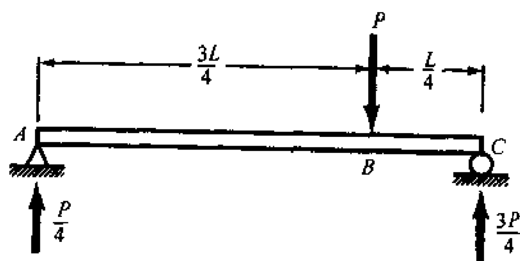


图 13-2

解 ☞ 由静力学可知 A 端及 C 端的约束反力分别是 $P/4$ 和 $3P/4$，暂没考虑梁在何处为弹性或塑性状态。峰值弯矩发生在载荷 P 施加点处，等于 $(P/4)(3L/4)=3PL/16$。当这个弯矩达到使 B 处截面全塑性的数值时，将之记作 M_p，在 B 处形成一个塑性铰。梁将发生力 P 不增长而挠曲继续增加的情况，形成如图 13-3 所示的坍塌的机构。

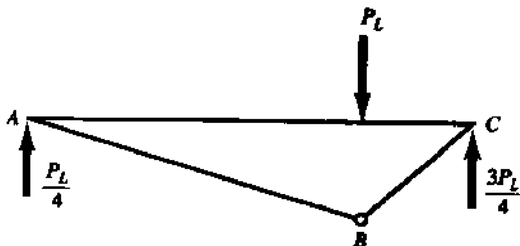


图 13-3

相应于上述条件的载荷 P 称为极限载荷 P_L，A 处的支反力为 $(P_L/4)$；于是 B 处的弯矩为

$$(P_L/4)(3L/4)=M_p$$

解出 $P_L=16M_p/3L$。将 P_L 除以某个适宜的安全系数，得到许可的工作载荷，这个过程称为极限设计。

题 13.3　题 13.2 中梁的矩形截面为 1.75 in×3 in，由钛合金 Ti-8Mn 制成，屈服点为 115000 lbf/in^2。如果梁的长度是 5 ft，试求在 B 处形成塑性铰时的力 P。

解 ☞ 由题 8.25 知，矩形截面的全塑性弯矩为

$$M_p=\sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$$

将有关数据代入，有

$$M_p=(115000\ \text{lbf/in}^2)\frac{(1.75\ \text{in})(3\ \text{in})^2}{4}=453000\ \text{lbf}\cdot\text{in}$$

利用题 13.2 的结果，有

$$P_L=\frac{16M_p}{3L}=\frac{16(453000\ \text{lbf}\cdot\text{in})}{3(60\ \text{in})}=40300\ \text{lbf}$$

此即为梁的极限载荷。

由题 8.25 可知此梁可承担的峰值弹性弯矩为

$$M_e=\sigma_{yp}\frac{bh^2}{6}=302000\ \text{lbf}\cdot\text{in}$$

由此可以得出基于弹性设计的最大许可载荷为

$$P_e=\frac{16M_e}{3L}=26850\ \text{lbf}$$

因而，使用极限设计的许可载荷较弹性设计提高 50%，但设计者应注意对上述极限载荷引入某个安全系数。

题 13.4　试求承受均布载荷的简支梁的极限载荷，见图 13-4。

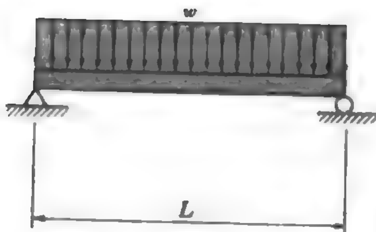


图 13-4

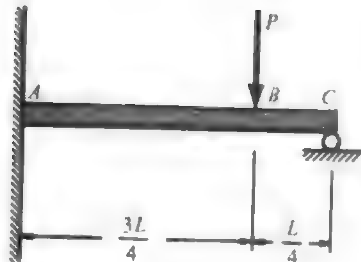


图 13-5

解 ☞ 根据第 6 章的方法，在梁中点处发生的峰值弯矩 $wL^2/8$，对于中点处的全塑性情况，此

弯矩应该用 M_p 表示。当中点形成塑性铰时，均布载荷的数值记作 w_L（极限载荷），于是

$$\frac{w_L L^2}{8} = M_p \quad 或 \quad w_l = \frac{8M_p}{L^2}$$

题 13.5 如图 13-5 所示，左端固定、右端铰支的梁，承受图示的集中力。试求相应于坍塌机构的极限载荷 P_L。

解 ☞ 这是一个超静定梁，在 B 处形成一个塑性铰时不可能发生塑性坍塌，因为 AB 段仍被约束，只可能发生很小的侧向挠曲，直到在梁的某一个位置出现另一个塑性铰为止。曾经在第 6 章中证明过：承受集中力作用的梁，最大弯矩只可能发生在这些力的施加点处或约束反力作用处。对于此题的情况，另一个塑性铰只可能出现在 A 处，当 A、B 两处均有铰链时，可称之为运动许可坍塌机构。在这种结构中，塑性铰形成的顺序并不重要，坍塌机构如图 13-6 所示。

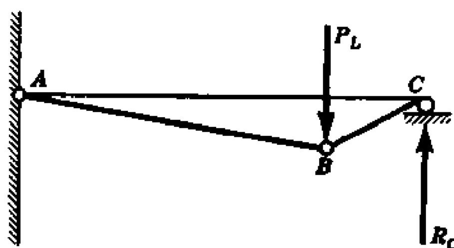


图 13-6

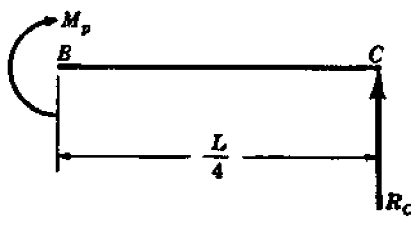


图 13-7

当力 P 等于极限载荷 P_L 时，梁的右区段（亦即从 C 点到力 P 作用点右侧）的分离体图如图 13-7 所示，图中 M_p 表示 B 处的全塑性弯矩。由静力学，有

$$M_p - \frac{R_C L}{4} = 0 \quad 或 \quad R_C = \frac{4M_p}{L} \tag{1}$$

其次，由全梁的分离体图（图 13-8），可知当 A 和 B 处均有塑性铰时，有

$$\sum F_v = R_A + \frac{4M_p}{L} - P_L = 0$$

解出

$$R_A = P_L - \frac{4M_p}{L} \tag{2}$$

$$\sum M_C = R_A - M_p - P_L\left(\frac{L}{4}\right) = 0 \tag{3}$$

图 13-8

将(2)式的 R_A 代入(3)式，可导出

$$P_L = \frac{20}{3}\frac{M_p}{L}$$

此即为极限载荷。

题 13.6 题 13.5 中讲到的梁是中空圆截面的，如图 13-9 所示。该梁由钢制成，屈服点为 200 MPa。如果外半径 $r = 20$ mm，长度 $L = 2$ m，试求能承担的极限载荷。

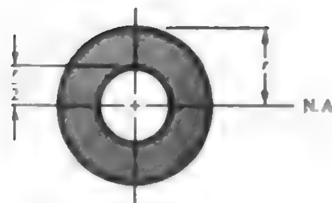


图 13-9

解 ☞ 为简单起见，首先求半径为 r 的实心圆截面的全塑性弯矩 M_p。中性轴以上的部分截面作用有数值等于屈服点的均匀分布法应力，这些应力的合力作用在上半截面的形心处，亦即在中性轴上方距离为 $(4r/3\pi)$ 处，类似的情况发生在中性轴的下方，只不过法应力与上半截面的法应力是反向的，于是

$$M_p = 2\left[\sigma_{yp}\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)\left(\frac{4r}{3\pi}\right)\right] = \frac{4r^3}{3}\sigma_{yp}$$

对于中空圆截面的全塑性弯矩为

$$M_p = \frac{4r^3}{3}\sigma_{yp} - 2\left[\sigma_{yp}\frac{\pi(r/2)^2}{2}\cdot\frac{4(r/2)}{3\pi}\right] = \frac{7r^3}{6}\sigma_{yp}$$

对于此题给定的数据，

$$M_p = \frac{7}{6}(0.02\ \text{m})^3(200\times10^6\ \text{N/m}^2) = 1867\ \text{N}\cdot\text{m}$$

由题 13.5，可有

$$P_L = \frac{20M_p}{3L} = \frac{20(1867\ \text{N}\cdot\text{m})}{3(2\ \text{m})} = 6225\ \text{N}$$

此即为极限载荷。

题 13.7　若题 13.5 中的梁为工字形截面，尺寸如图 13-10 所示，材料是结构钢，屈服点是 250 MPa，长度为 2 m。试求极限载荷 P_L。

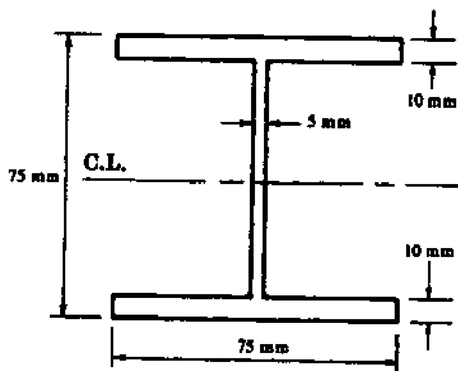


图 13-10

解　正如在题 8.29 中指出的，完全塑性时中性轴将截面分为面积相等的两部分。此处，由于对称中性轴与中线重合，上、下半截面的形心与中线的距离为

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \frac{(75)(10)(37.5-5)+(27.5)(5)(27.5/2)}{(75)(10)+(27.5)(5)} = 29.6(\text{mm})$$

于是，全塑性弯矩是

$$M_p = \sigma_{yp}\frac{A}{2}(\bar{y}_1+\bar{y}_2) = 250[(75)(10)+(27.5)(5)](29.6+29.6) = 13.13(\text{kN}\cdot\text{m})$$

由题 13.5 可知极限载荷为

$$P_L = \frac{20}{3}\frac{13.13\times10^3}{2} = 43.8(\text{kN})$$

对此梁再进行弹性分析是很有意义的。在这种情况下，外层纤维的应力刚好达到屈服点，且沿高度是线性变化的，中性轴处应力为零。由第 7 章的方法可知截面的二次矩为

$$I = \frac{1}{12}(75)(75)^3 - \frac{1}{12}(70)(55)^3 = 1.67\times10^6(\text{mm}^4)$$

外层纤维的应力为 $\sigma_{yp} = \frac{M_e c}{I}$　或　$250 = \frac{M_e(37.5)}{16.7\times10^6}$因而，此种截面的最大弹性弯矩 $M_e = 11.13\ \text{kN}\cdot\text{m}$。由题 1.11 可知，$A$ 处的弯矩为 $0.116PL$，而 B 处的弯矩是 $0.159PL$。由后者的结果可以得到全弹性作用时，梁能承担的最大载荷，

$$0.159P_eL = 11.13\ \text{kN}\cdot\text{m}\quad 或\quad P_e = 35\ \text{kN}$$

相应于塑性坍塌的载荷 P_L 较 P_e 超过 25%。

题 13.8　如图 13-11 所示。两端固定的梁，承受均布载荷作用。试求极限载荷。

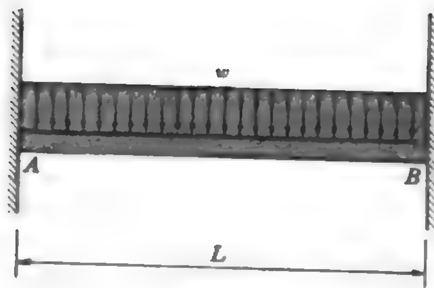


图 13-11

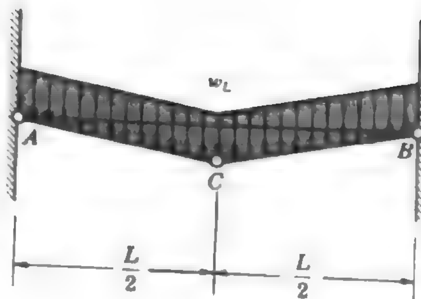


图 13-12

解　坍塌机构如图 13-12 所示，此时在 A、B 及 C 处形成塑性铰。由对称性可知，中点 C 处的剪力为零；因此可画出此梁右半部分的分离体图，如图 13-13 所示。由静力学，有

$$\sum M_A = 2M_p - w_L\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right) = 0$$

极限载荷为 $w_L=16M_p/L^2$。由与题 11.6 类似的考虑，基于外层纤维屈服，内部纤维全处于弹性范围的许可载荷为 $w_e=12M_e/L^2$。在这种情况下，极限载荷 w_L 和最大弹性载荷 w_e 之比为 $(4/3)M_p/M_e$。然而，比值 M_p/M_e 是很重要的，如题 8.25 指出的，对于矩形截面此比值为(3/2)。于是

$$\frac{w_L}{w_e}=\frac{4}{3}\frac{M_p}{M_e}=\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}=2$$

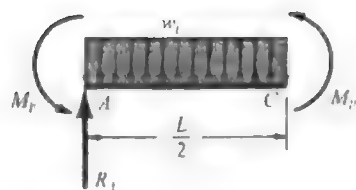


图 13-13

此即表明，在这种特殊的情况下，极限设计的许可载荷是弹性分析许可载荷的 2 倍。两种许可载荷之间如此之大的差别，部分原因是由于梁的超静定性质决定的。应该指出，对于超静定系统，可能存在极限载荷与最大弹性载荷相等的例外情况。

题 13.9 如图 13-14 所示梁，左端固定、右端简支，承受均匀分布载荷的作用。试求相应于塑性坍塌的载荷。

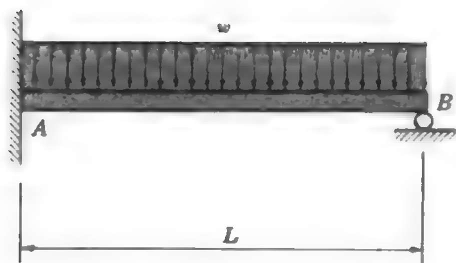


图 13-14

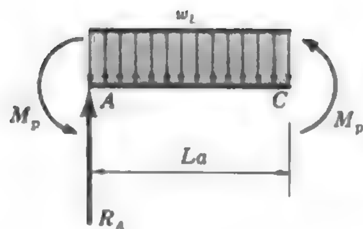


图 13-15

解 此题与题 13.5 有某些类似之处，只形成单独一个塑性铰梁不会出现塑性坍塌，必须形成两个塑性铰，其中一个肯定在固定端 A 处，另一个塑性铰的位置则不那么明显。当然，它肯定出现在弯矩最大处(A 除外)，位置是未知的。但是，注意到弯矩最大处，剪力等于零，我们可以画出此梁的长度为 La 的右区段的分离体图，并将 a 看作未知量，如图 13-15 所示，图中 M_p 表示两截面处的全塑性弯矩。

由静力学，有

$$\sum F_v=R_A-w_LLa=0 \tag{1}$$

$$\sum M_A=2M_p-\frac{w_LL^2a^2}{2}=0 \tag{2}$$

其次，考虑整梁的分离体图，如图 13-16 所示。由静力学，有

$$\sum M_B=-R_AL+\frac{w_LL^2}{2}+M_p=0 \tag{3}$$

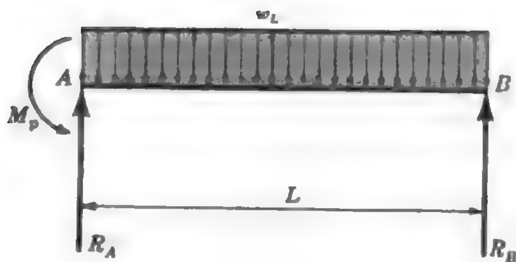


图 13-16

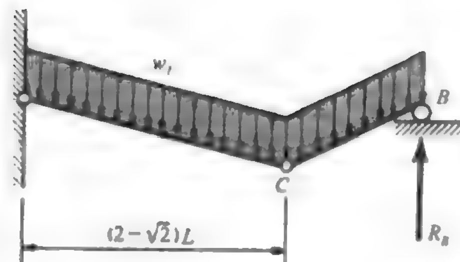


图 13-17

联立求解方程(1)、(2)和(3)，得到确定相对最大弯矩截面位置的一元方程，

$$a^2-4a+2=0$$

解此方程，得到 $a=2-\sqrt{2}$，方程的另一个根无意义，被舍去。

将此结果代入(2)式，得到

$$w_L=(6+4\sqrt{2})\frac{M_p}{L^2}$$

此即为极限载荷。坍塌机构如图 13-17 所示。

题 13.10　两端固定梁承受集中力作用，如图 13-18 所示。试求相应于塑性坍塌的载荷。

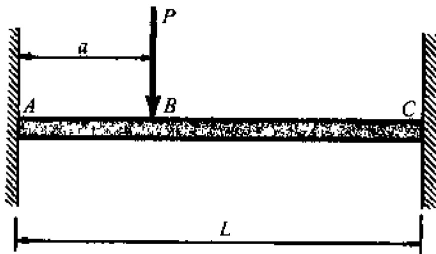


图 13-18

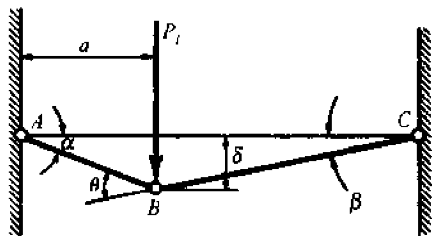


图 13-19

解　☞ 唯一合乎逻辑的坍塌机构如图 13-19 所示，在 A、B 和 C 处形成塑性铰。由 ΔABC 的几何条件，有

$$\alpha + \beta = \theta \tag{1}$$

或

$$\frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{L-a} = \theta \tag{2}$$

这是因为尽管已发生塑性坍塌，挠度 δ 和 L 相比仍是很小的量。求解(2)式，得到

$$\delta = \theta a\left(1 - \frac{a}{L}\right) \tag{3}$$

由几何分析，可得到

$$\alpha = \theta\left(1 - \frac{a}{L}\right), \qquad \beta = \frac{\theta a}{L} \tag{4}$$

与题 13.5 和题 13.8 类似，利用静力学方程即可求解此题，但是我们拟引入一种新方法，这种新方法对于更复杂的问题将会很有效。此种方法要考虑发生塑性坍塌后，载荷 P_L 所作的功，如果假设弹性挠曲和塑性挠曲是很小的，那么载荷 P_L 在坍塌期间所作的功为 $P_L\delta$。我们要特别指出：由坍塌开始，发生挠曲 δ，且在坍塌的整个过程中，载荷 P_L 始终保持不变。在坍塌期间内，A、B 和 C 每一个塑性铰处将产生全塑性弯矩 M_p，在这些塑性铰处消耗的能量等于载荷 P_L 所作的功。

A 处塑性铰所作的功为 $M_p\alpha$，B 处和 C 处塑性铰所做的功分别为 $M_p\theta$ 和 $M_p\beta$。令 P_L 所做的功等于这三个塑性铰所做的功，并利用上式，有

$$P_L\delta = M_p\theta\left(1 - \frac{a}{L}\right) + M_p\theta + M_p\left(\frac{\theta a}{L}\right) \tag{5}$$

将(3)式的 δ 代入(5)式，可解出坍塌载荷为

$$P_L = \frac{2M_pL}{a(L-a)}$$

题 13.11　矩形截面 50 mm×120 mm 的水平梁 AC 长度为 1.5 m，其左端 A 处铰支，右端 C 处由截面积为 3 cm² 的同材料杆支撑，如图 13-20(a)所示。材料的屈服点为 200 MPa，此梁在 B 处承受集中力 P 作用，试求极限载荷 P_L。

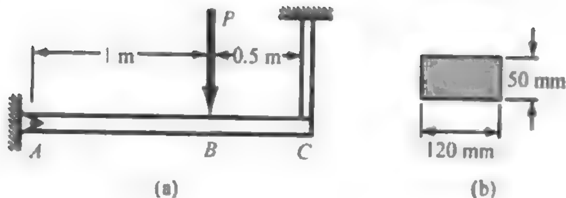


图 13-20

解　☞ 因为不清楚铅直杆和水平梁 AC 哪一个先屈服，可假设铅直杆先屈服，其内力为

$$F_1 = (200\times10^6\ \mathrm{N/m^2})(3\ \mathrm{cm^2})(1\ \mathrm{m}/100\ \mathrm{cm})^2 = 6\times10^4\ \mathrm{N}$$

梁的分离体图如图 13-21 所示。

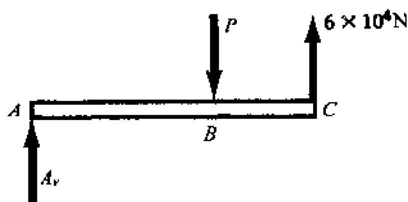


图 13-21

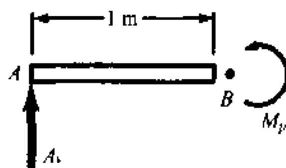


图 13-22

平衡方程为

$$\sum M_A = -P(1\ \mathrm{m}) + (6\times10^4\ \mathrm{N})(1.5\ \mathrm{m}) = 0$$

可解出

$$P_L' = 9\times10^4\ \mathrm{N} \quad 或 \quad 90\ \mathrm{kN}$$

其次，假设梁 AC 在 B 处产生塑性铰；而铅直杆仍为弹性的。位于 A 和紧靠 B 左侧之间的、梁的左区段分离体图如图 13-22 所示。由此段的平衡方程为

$$\sum M_B = M_p - A_y(1\ \mathrm{m}) = 0$$

考虑全梁平衡，关于 C 点的转动平衡方程为

$$\sum M_C = P_L''(0.5\ \mathrm{m}) - A_y(1.5\ \mathrm{m}) = 0$$

可解出 $P_L'' = 3M_p$

对于矩形截面梁，全塑性弯矩为(见题 8.25)

$$M_p = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$$

$$= (200\times10^6\ \mathrm{N/m^2})\frac{(0.12\ \mathrm{m})(0.05)^2}{4} = 15000\ \mathrm{N\cdot m}$$

于是 $P_L'' = 3(15000) = 45000\ \mathrm{N}$ 或 45 kN。

因为 45 kN 先于 90 kN(引起铅直杆屈服)到达，显然极限载荷是 45 kN，这将使在 B 处形成塑性铰，而铅直杆仍是弹性的。

题 13.12 如图 13-23 所示刚架，两个基础 A、D 均为固定的，同时受到两个等值载荷 P 作用。试求刚架发生塑性坍塌时的载荷。

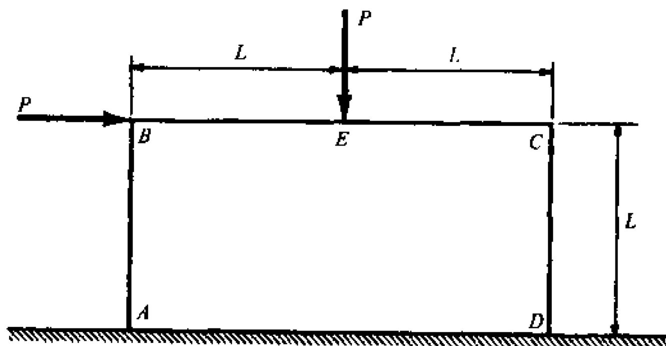


图 13-23

解 ☞ 此题刚架共有三种可能的塑性坍塌机构，如图 13-24 所示。其中情况Ⅰ和情况Ⅱ相应于单个载荷作用的结果，情况Ⅲ是将情况Ⅰ和情况Ⅱ组合而成的复合机构，条件是删除 B 处的一个塑性铰。我们将逐一地计算三种情况的坍塌载荷，然后选择其中的一个作为真正的坍塌载荷。

情况Ⅰ，可使用题 13.1 的方法，立刻可以得到 $P_{L1} = 4M_p/L$。

情况Ⅱ，使用与上面同样的方法，也可以得到 $P_{L2} = 4M_p/L$。

情况Ⅲ．A、E、C 和 D 处有塑性铰，而 B 处只是一个刚性节点。功能互等要求

$$P_{L3}\Delta_1 + P_{L3}\Delta_2 = [M_p\theta]_A + [M_p(2\theta)]_E + [M_p(2\theta)]_C + [M_p\theta]_D$$

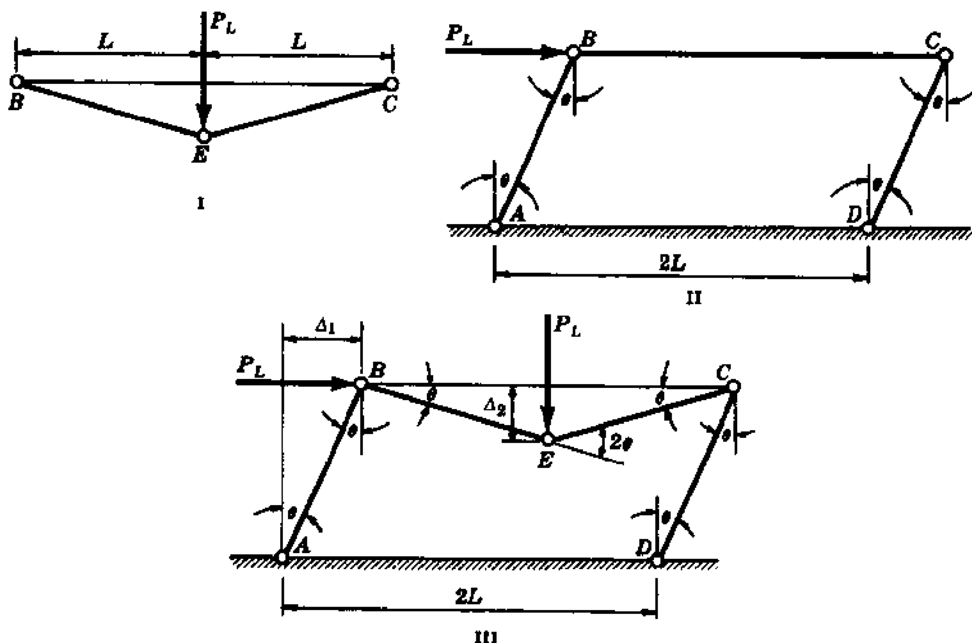


图 13-24

或

$$P_{L3}(L\theta) + P_{L3}(L\theta) = 6M_p\theta$$

因此解出

$$P_{L3} = \frac{3M_p}{L}$$

因此坍塌载荷是 $P_L = P_{L3} = 3M_p/L$，坍塌机构将如情况Ⅲ图形所指出的那样。

题 13.13　如图 13-25(a)所示，连续梁有三个铰支座，并且承受单独的集中力作用。试求此梁塑性坍塌时的载荷。

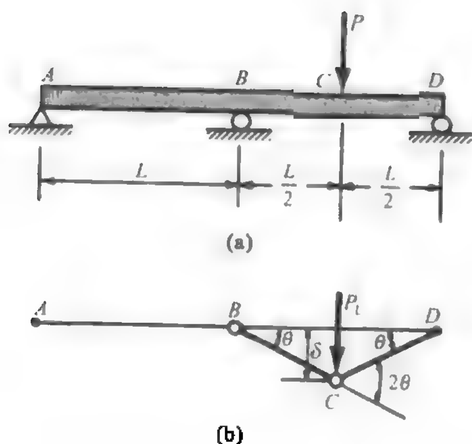


图 13-25

解　此种类型的梁，坍塌通常只发生在一跨之内。对于此题，将会由于产生图 13-25(b)所示机构而发生坍塌，此时在节点 B 和 C 处形成塑性铰。功能互等要求

$$P_L\delta = [M_p\theta]_B + [M_p(2\theta)]_C$$

或

$$P_L\left(\frac{L}{2}\theta\right) = 3M_p\theta$$

由此得到坍塌载荷是 $P_L = 6M_p/L$。

题 13.14　两跨连续钢梁，承受集中力作用，如图 13-26(a)所示。梁的矩形截面宽度为 2 in、高度为 4 in，材料的屈服点为 38000lbf/in²。试求引起塑性坍塌的载荷 P。

解　首先我们假设坍塌发生在跨度 AC 内，并且形成图 13-26(b)所示的机构。在 B、C 处产生全塑性弯矩，功能互等要求

$$2P_L(10\theta) = [M_p(2\theta)]_B + [M_p\theta]_C \quad 或 \quad P_L = \frac{3M_p}{20}$$

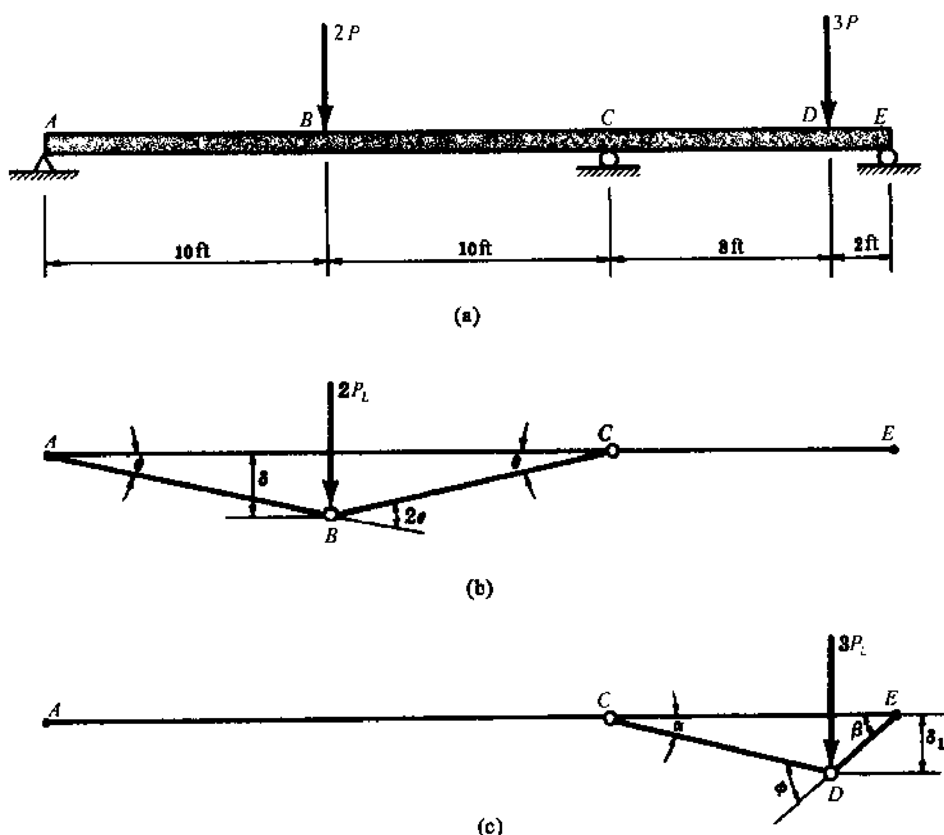


图 13-26

其次，认为坍塌的可能性在跨度 CE 内，形成图 13-26(c)所示的机构。由△CDE 的几何关系，有

$$\varphi=\alpha+\beta$$

但是 α 和跨度 CE 相比是一个很小的量，上式成为

$$\frac{\delta_1}{8}+\frac{\delta_1}{2}=\varphi$$

式中 δ_1 必须是相容的单位(亦即，ft)，于是 $\delta_1=8\varphi/5$。由几何关系，有

$$\alpha=\varphi/5 \qquad \beta=4\varphi/5$$

在这种情况下，C、D 处产生全塑性弯矩、功能互等要求

$$3P_L(8\alpha)=[M_p\varphi]_D+[M_p\alpha]_C \quad 或 \quad P_L=\frac{M_p}{4}$$

因此这个数值大于左跨坍塌时的极限载荷，显然形成 AC 跨所示的机构将是真正的坍塌。

因为矩形截面的全塑性弯矩是 $M_p=\sigma_{yp}(bh^2/4)$，可得到坍塌载荷是

$$P_L=\frac{3}{20(12)}(38000)\frac{(2)(4)^2}{4}=3800(\text{lbf})$$

式中分母上的因子(12)是为使单位一致而引入的。

题 13.15 矩形截面 50 mm×75 mm 的简支梁，承受图 13-27(a)的载荷，材料的屈服点是 250 MPa。试利用极限设计准则求最大载荷 P。

解 ☞ 由静力学可得约束反作用力 $R_1=3+(P/4)$kN 且 $R_2=1+(3P/4)$kN。

与此梁全塑性作用相应的弯矩是

$$M_p=\sigma_{yp}(bh^2/4)=250\frac{(50)(75)^2}{4}=17.6(\text{kN}\cdot\text{m})$$

在含有多个载荷作用的任意问题中，第一个塑性铰的位置通常是不明显的，此时有两个可能性。第一种可能(图 13-27(b))，最大的弯矩发生在 A 和 B 点之间，如果这是正确的弯矩图，

当 $x<4$ 时必有某个点处剪力为零，注意到剪力方程为

$$V = 3 + \frac{P}{4} - 1x$$

我们必须由上述方程中求解 P。

$$0 = 3 + \frac{P}{4} - x \quad 或 \quad x = 3 + \frac{P}{4}$$

在这种考虑中 $x<4$，导致 $P<4$。简单的计算指出，$P=4$ kN 不会产生 17.6 kN·m 的全塑性弯矩。

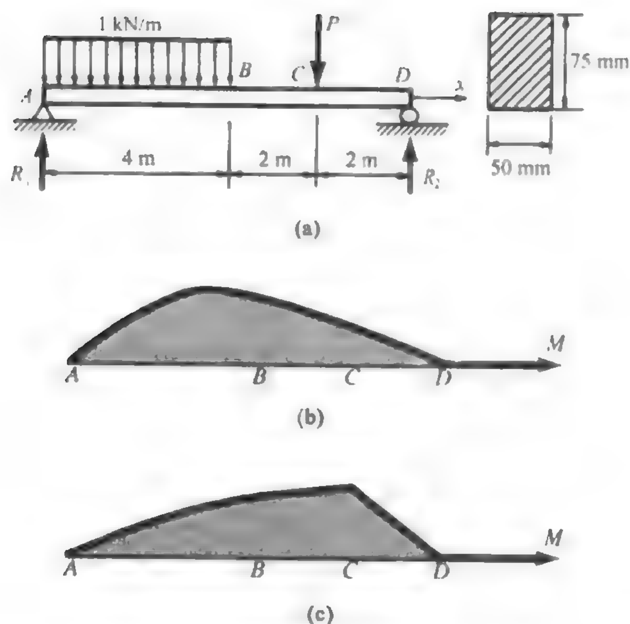


图 13-27

第二种可能性(图 13-27(c))，最大弯矩发生在 C 截面处。与 C 点出现塑性铰相应的载荷 P 是

$$\left(1 + \frac{3P}{4}\right)(2) = 17.6\ \text{kN} \cdot \text{m} \qquad 或 \qquad P = 10.4\ \text{kN}$$

在这种情况下，B 处的弯矩应低于 C 处的弯矩，这是因为在两个区段交汇点 B 处弯矩图应有共同的切线，因此可不考虑 B 处的弯矩。根据极限设计准则，$P=10.4$ kN 即为允许施加的峰值载荷。

13.8 习　题

题 13.16　在题 6.4 中我们曾经考虑过在 B 和 C 处用刀口型约束支承的梁 AD，如图 13-28(a)所示。如图

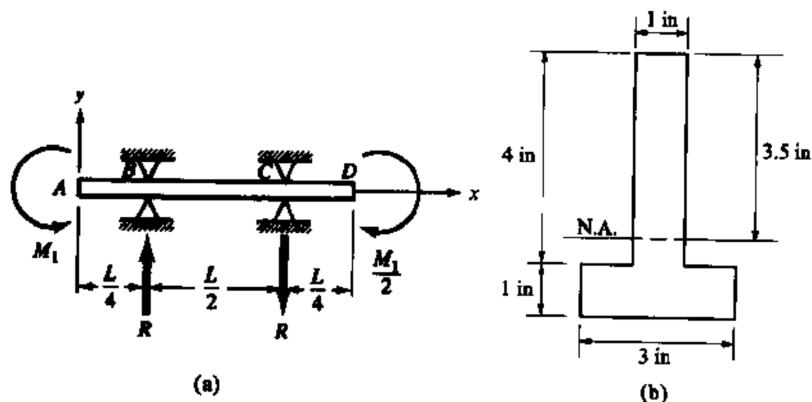


图 13-28

中所指出的，施加的载荷是端部力偶 M_1 和 $M_1/2$。此梁的截面为 T 形，如图 13-28(b)所示，这曾在题 8.32 中考虑过。如果材料的屈服点是 39000 lbf/in²，试求全塑性作用时施加载荷的最大值。(答案：$M_p = 360750$ lbf·in)

题 13.17 再次考虑图 13-28(a)中的梁及载荷。但本题梁的截面是中空的矩形，如图 13-29 所示。材料的屈服点是 39000 lbf/in²，试求全塑性作用时施加载荷的最大值。(答案：546000 lbf·in)

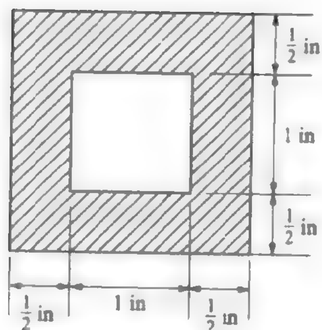


图 13-29

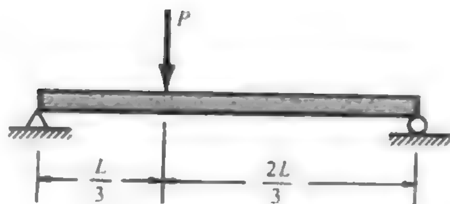


图 13-30

题 13.18 试求图 13-30 所示简支梁的极限载荷。(答案：$P_L = 4.5M_p/L$)

题 13.19 若图 13-30 中的梁截面是矩形的，尺寸为 25 mm×50 mm，由 Hy-80 钢制成，屈服极限为 500 MPa，长度为 1 m。试求如图所示施加在梁长 1/3 处的载荷极限值。(答案：$P_L = 35.2$ kN)

题 13.20 题 13.4 中的梁，长度为 2 m，截面为正方形 50 mm×50 mm，材料是结构钢，屈服点为 250 MPa。试求极限载荷。(答案：$w_L = 15.6$ kN/m)

题 13.21 一端固定，另端简支的梁如图 13-31 所示，试求极限载荷 P_L。(答案：$P_L = M_p \dfrac{L+x}{(Lx - x^2)}$)

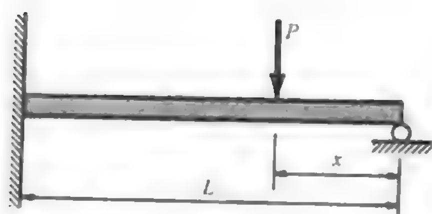


图 13-31

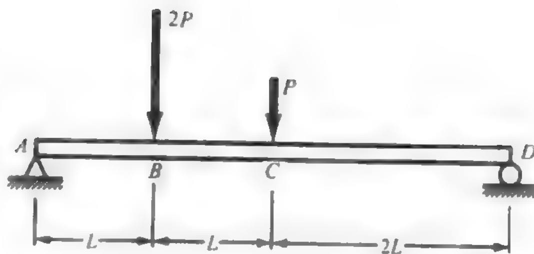


图 13-32

题 13.22 在题 13.21 中，试求 x，以使 P_L 为最小。(答案：$x = 0.41L$，$(P_L)_{\min} = 5.64M_p/L$)

题 13.23 如图 13-32 所示的简支梁 AD，塑性弯矩为 M_p，承受两个集中力作用。试求极限载荷 P_L。(答案：$P_L = Mp/2L$)

题 13.24 试求图 13-33 所示系统的塑性坍塌载荷。(答案：$w_L = (6 + 4\sqrt{2})M_p/L^2$)

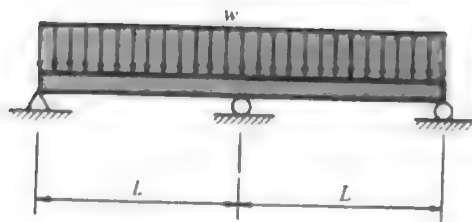


图 13-33

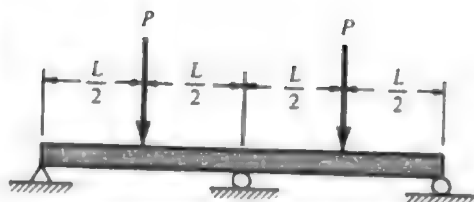


图 13-34

题 13.25 试求图 13-34 所示系统的塑性坍塌载荷。(答案：$P_L = 6M_p/L$)

题 13.26 连续梁 $ABCD$ 承受图 13-35 所示的载荷。试求比值$(w_L)L/P_L$，以使在 AC 段和 CD 段中同时出现极限载荷。(答案：2/3)

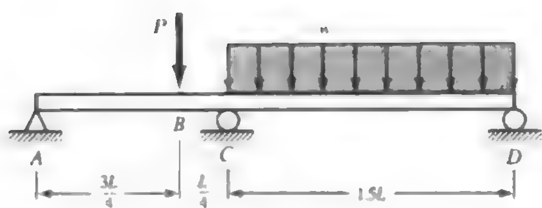


图 13-35

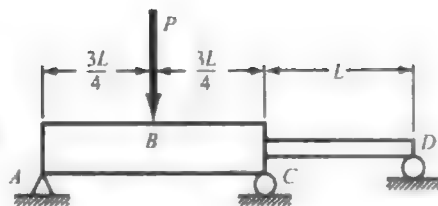


图 13-36

题 13.27　图 13-36 所示的连续梁支承在三个简支座上。AC 段的全塑性弯矩是 3 M_p，邻近的 CD 段全塑性弯矩是 M_p，铅直方向的集中力作用在 AC 段的中点。试求极限载荷 P_L。（答案：$P_L = 7M_p/L$）

题 13.28　试求图 13-37 所示连续梁的塑性坍塌载荷 P。（答案：$P_L = 6M_p/L$）

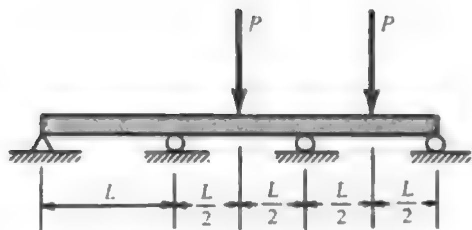


图 13-37

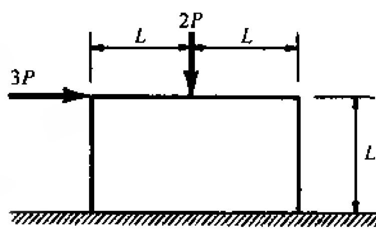


图 13-38

题 13.29　如图 13-38 所示矩形刚架，其下面两个支座为固支的。试求其塑性坍塌载荷 P。（答案：$P_L = 1.2M_p/L$）

题 13.30　求两个基础支座均为铰支的矩形刚架的塑性坍塌载荷 P(见图 13-39)。（答案：$P_L = 4M_p/3L$）

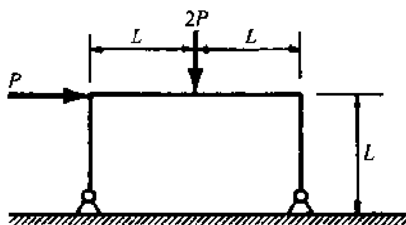


图 13-39

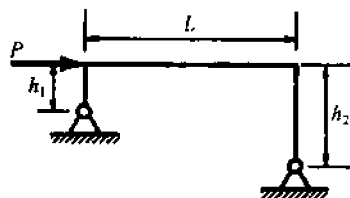


图 13-40

题 13.31　图 13-40 所示非对称刚架，两个支座均为铰支。试求塑性坍塌载荷。（答案：$P_L = M_p(h_1 + h_2)/h_1h_2$）

题 13.32　试求图 13-41 所示系统的塑性坍塌载荷。（答案：$P_L = \frac{2M_p}{L}$）

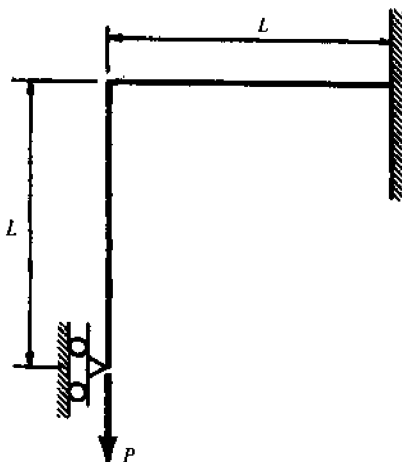


图 13-41

第14章 柱

14.1 柱的定义

承受轴向压缩的细长杆称为柱。术语“柱”经常被用来描述铅直的构件，而术语“支柱”有时用于讲述倾斜的杆。

例如很多飞机构件、空间火箭各级助推器之间的连接构件、桥梁桁架中的某些构件以及建筑物的结构框架等，都是“柱”的常见实例。

14.2 柱的失效形式

柱的失效是由于屈曲引起的。所谓屈曲是指杆件发生侧向挠曲。需指出的是，短压缩构件的失效是由于材料屈服发生的。柱的屈曲亦即失效，甚至在柱中的应力低于材料屈服点时也会发生。振动或往复机械中的连杆也会因屈曲失效。

14.3 柱的临界载荷的定义

轴向压缩细长杆的临界载荷是特定数值的轴向力，该数值对于保持杆件的微弯构形是恰好有效的。图 14-1 表示的是两端铰支压杆受临界荷载 P_{cr} 作用的屈曲构形。

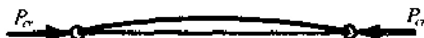


图 14-1

14.4 柱的长细比

柱的长度与其截面最小回转半径的比值称作柱的长细比，这一比值当然是无量纲量。计算截面回转半径的方法在第 7 章中讨论过。

如果柱在每个端部转动是自由的，那么柱将绕回转半径最小的那根轴线发生屈曲。

14.5 细长柱的临界载荷

如果等截面的细长杆两端是铰支的，并且承受轴向压缩，那么引起屈曲的载荷 P_{cr} 是

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{14.1}$$

式中 E 是弹性模量，I 是横截面面积关于形心轴的最小二次矩，L 是杆件的长度。此公式将在题 14.1 中导出。

上述公式首次由瑞士数学家欧拉(Euler L,1707～1783)得出，因而荷载 P_{cr} 又称欧拉屈曲载荷。正如在题 14.2 中将要讨论的，如果与 P_{cr} 相应的轴向应力 $\sigma_{cr}=P_{cr}/A$（其中 A 为杆件的横截面积）超过材料的比例极限，此公式不能直接使用。例如，对于材料比例极限为 210 MPa 的钢杆，上述公式只对柱的长细比超过 100 才是正确有效的。公式(14.1)给出的 P_{cr} 是失效载荷，因此必须引入安全系数才能得到设计载荷，这个公式的应用将在题 14.5～题 14.7

中讲述。

14.6　端部条件的影响——有效长度

公式(14.1)可以改写为如下形式

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \tag{14.2}$$

式中 KL 是柱的有效长度。对于两端铰支的柱，$K=1$；如果两端是固定的，$K=0.5$；对于一端固定、另一端铰支的，$K=0.7$；对于一端固定，加载端自由(无约束)的柱，$K=2$。见习题14.1、题14.3和题14.4。

14.7　偏心加载柱的设计

欧拉屈曲载荷的导出过程中，曾经认为柱是完全(理想)轴向受载的。如果轴向力 P 有偏心 e，那么在杆件中点的外层纤维产生的峰值压缩应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{P}{AE}}\right)\right] \tag{14.3}$$

式中 c 为外层纤维到中性轴的距离，r 为回转半径，L 为柱的长度，A 为横截面积。此式为柱的割线公式，将在题14.22中详细讨论。

14.8　非弹性柱的屈曲

将欧拉屈曲载荷公式中的杨氏模量换为切线模量 E_t，该公式也可推广应用至非弹性范围。那么，所得到的切线模量公式是

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \tag{14.4}$$

见题14.9

14.9　中、小长细比柱的设计公式

对于具有大长细比的受压构件设计，可应用前面提到的欧拉公式及适当的安全系数来进行。对于较短的受压构件设计，按惯例是选用半经验公式计算。这些半经验公式给出的是屈服应力和长细比之间的关系。

对于钢材制成的柱，一个广泛使用的设计公式是由美国钢结构协会(AISC)给出的。该公式可表述为：长细比为 L/r 的钢柱，许可的轴向工作应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{[1-(KL/r)^2]}{\left[\dfrac{5}{3} + \dfrac{3(KL/r)}{8C_c} - \dfrac{(KL/r)^3}{8C_c^3}\right]}\sigma_{yp} \qquad (KL/r < C_c)\\ \sigma_a &= \frac{\pi^2 E}{(23/12)(KL/r)^2} \qquad (KL/r > C_c)\end{aligned}\right\} \tag{14.5}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}} \tag{14.6}$$

式中 σ_{yp} 材料的屈服点，E 材料的杨氏模量。见题14.11～题14.14。

在结构稳定研究学会(SSRC)给出的方程应用中提出了另外一种看法，该方法直接应用平均轴向压应力 σ_u 预测坍塌，

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_u &= \sigma_{yp} && (0 < \lambda < 0.15) \\
\sigma_u &= \sigma_{yp}(1.035 - 0.202\lambda - 0.222\lambda^2) && (0.15 \leq \lambda \leq 1.0) \\
\sigma_u &= \sigma_{yp}(-0.111 + 0.636\lambda^{-1} + 0.087\lambda^{-2}) && (1.0 \leq \lambda \leq 2.0) \\
\sigma_u &= \sigma_{yp}(0.009 + 0.877\lambda^{-2}) && (2.0 \leq \lambda < 3.6) \\
\sigma_u &= \sigma_{yp}\lambda^{-2}(\text{欧拉曲线}) && (\lambda \geq 3.6)
\end{aligned}\right\} \tag{14.7}
$$

其中

$$
\lambda = \frac{L}{\pi r}\sqrt{\frac{\sigma_{yp}}{E}} \tag{14.8}
$$

上述公式中没有安全系数,应由设计者引入。见题 14.15。

14.10 计算机应用

由美国钢结构协会(AISC)改进的、用于钢柱的许可应力的设计公式,以及由结构稳定研究学会(SSRC)提出的、给出极近坍塌平均轴向应力的方程都很适合应用计算机,在题 14.17 和题 14.20 中分别给出使用上述方法编制的 FORTRAN 程序。为了根据上述两种关系式得到的柱的承载能力,只需向自提示程序中输入该柱的几何与材料常数。程序的应用见题 14.18、题 14.19 和题 14.21。

14.11 梁 柱

同时承受轴向压缩和侧向载荷的杆被称为梁柱。在题 14.25 中将给出一个实例。

14.12 弹簧支承刚性梁的屈曲

上面所讨论的柱都是柔韧构件,亦即在屈曲之后马上发生侧向的弯曲。与屈曲有关的另一种问题是:一个或多个刚性杆铰接在固定的支承上或彼此铰接后,再由一个或多个弹簧支承。在某些情况下,施加荷载可能会引起此杆突然移动到另一个邻近的平衡位置。这也是系统失去稳定的一种形式,见题 14.26。

14.13 例 题

题 14.1 两端铰支的细长杆在其两端承受轴向压缩作用,且力的作用线通过各横截面的形心。试求临界载荷。

解 临界载荷是使压杆恰好保持微弯构形的轴向力,在力 P 的作用下杆的挠曲形状如图 14-2 所示。为了使侧向挠曲成为可能,必须由一个支座相对于另一个支座可沿轴向移动。挠曲线的微分方程与第 9 章所提出的方程式相同的,具体地说是

$$
EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{1}
$$

此处 A 点(坐标是 x, y)处的弯矩仅仅是施加在左端的力 P 关于过 A 点、与书纸平面垂直轴的力

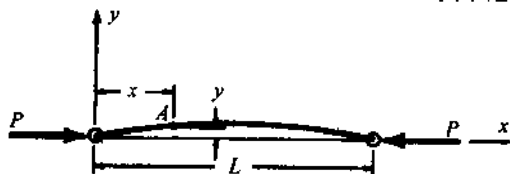


图 14-2

矩。在此我们要特别指出，这个力使杆产生凹面向下的弯曲。按照第 9 章的符号规则，产生负弯曲，因此弯矩是 $M=-Py$，于是

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py \tag{2}$$

如果令

$$\frac{P}{EI}=k^2 \tag{3}$$

(2)式将成为

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0 \tag{4}$$

使用微分方程著作中讨论的任何一种标准的方法，都可以很容易地求解此式。只要找到一个函数，将函数微分两次后再加上函数本身(乘一个常数)等于零，解答几乎立即可以写出来。显然，函数 $\sin kx$ 和 $\cos kx$ 均具有这种性质。实际上，将以上两个函数组合成如下形式：

$$y=C\sin x+D\cos kx \tag{5}$$

就可以作为(4)式的解答。将(5)是给出的 y 代入(4)式，很容易验证上述事实。

在得到形如(5)式的 y 之后，下一步的工作是确定常数 C、D。在杆的左端 $x=0$ 处，应有 $y=0$，将这些数值代入(5)式，有

$$0=0+D \quad 或 \quad D=0$$

在杆的右端 $x=L$ 处，有 $y=0$；将这些数值代入(5)式，并注意到 $D=0$，得到

$$0=C\sin kL$$

显然，或是 $C=0$，或是 $\sin kL=0$。但是如果 $C=0$，那么 y 到处都是零，我们只得到直杆的平凡情况，这是一个先于屈曲的构形，对这样一个解我们没有任何兴趣，于是必须取

$$\sin kL=0 \tag{6}$$

为此，必须有

$$kL=n\pi(弧度) \qquad (n=1,2,3,\cdots) \tag{7}$$

将 $k^2=P/EI$ 代入(7)式，有

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}L=n\pi \quad 或 \quad P=\frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \tag{8}$$

当 $n=1$ 时，显然取得这些 P 中的最小值，我们得到所谓的屈曲第一模态，同时临界载荷是

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{L^2} \tag{9}$$

此即为铰支柱的欧拉屈曲载荷。相应于这个载荷的挠曲形状是

$$y=C\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \tag{10}$$

将(9)式带入这个方程，得到

$$y=C\sin\frac{\pi x}{L} \tag{11}$$

亦即挠曲形状是正弦曲线。因为在导出(1)式是引入了近似，因而不可能得到(11)式中用 C 表示的屈曲形状幅值。

正如由(9)式能看出，杆的屈曲将关于横截面内一个特殊的轴发生，截面关于该轴的惯性矩为最小。

(9)式也可改写成如下形式：

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(KL)^2} \tag{12}$$

式中 KL 即为柱的有效长度。有效长度定义为挠曲杆零曲率两点之间的长度。例如，对于两端铰支杆，$K=1$；如果两端固定，$K=0.5$；一端固定，另端铰支，$K=0.7$；对于自由端加载的悬臂柱，$K=2$。

题 14.2 试求题 14.1 中柱的轴向应力。

解 ☞ 在题 14.1 中求解临界荷载时曾经用到公式 $EI(d^2y/dx^2)=M$，在导出这一公式时曾经假设应力和应变之间服从线性关系(见第 9 章)。因而，只有当应力不超过材料的比例极限时，由题 14.1 的(9)式给出的临界载荷才是正确的。

当杆件极其接近屈曲构形的时候，轴向应力仍可由下式计算：

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} \tag{1}$$

式中 A 为杆的横截面积。对于式中的 P_{cr}，代入题 14.1(9)式给出的数值，有

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{AL^2} \tag{2}$$

但是，由第 7 章可知

$$I = Ar^2 \tag{3}$$

式中 r 表示截面的回转半径。将(3)式代入(2)式，得到

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2} = \pi^2 E\left(\frac{r}{L}\right)^2 \tag{4}$$

或

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{5}$$

式中比值(L/r)称作柱的长细比。

我们考虑比例极限为 210 MPa 和 $E = 200$ GPa 的钢柱。应力 210 MPa 表示可应用(5)式的应力极限，为了求得与这些数据相应的(L/r)，将上述资料代入(5)式有

$$210 \times 10^6 = \frac{\pi^2(200 \times 10^9)}{(L/r)^2} \quad 或 \quad \frac{L}{r} \approx 100$$

因此可知，对于钢柱只有$(L/r) \geqslant 100$ 时，由题 14.1(9)式给出的屈曲荷载，以及由(5)式给出的轴向应力才是正确的。对于那些$(L/r) < 100$ 的钢柱，发出弹性屈曲之前压应力超过比例极限，并且上述各方程都是不正确的。

式(5)可画出如图 14-3 所示的图形，对于上面所给出的比例极限和弹性模量的特定值，$(L/r) = 100$ 左侧的部分曲线是不正确的。因此，对此种材料，A 点标志着曲线可应用的上限。

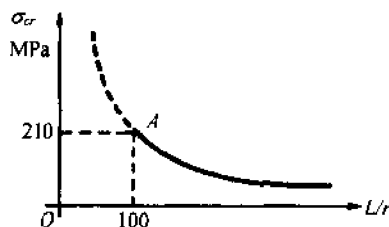


图 14-3

题 14.3 两端固定、承受轴向压缩的细长杆如图 14-4 所示。试求其临界载荷。

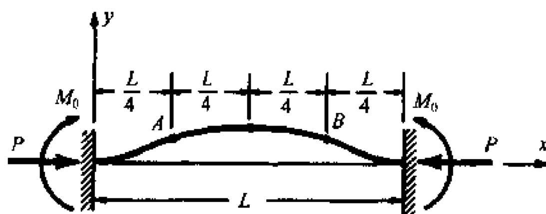


图 14-4

解 我们引入坐标系 xy 如图 14-4 所示，并且令(x, y)表示杆上任意一点的坐标。在这一点处的弯矩等于此点左侧的所有力对过此点并垂直于纸面的轴之矩的代数和，因此，此点弯矩为 $M = -Py + M_0$，杆的微分方程为 $EI\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = -Py + M_0$，或

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{M_0}{EI} \tag{1}$$

正如在微分方程教科书中所讨论的，方程(1)的解答由两部分组成，第一部分即所谓的齐次方程的解答，亦即(1)式右端项等于零所得到的解答，解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{2}$$

此方程的解答曾经在题 14.1 中给出，即

$$y = A_1\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + B_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) \tag{3}$$

方程(1)解答的第二部分为特解，亦即满足(1)式的任意函数。显然这样的函数为

$$y=\frac{M_0}{P}(=\text{常数})\tag{4}$$

方程(1)的全解为(3)式的齐次解与(4)式的特解之和,即

$$y=A_1\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+B_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+\frac{M_0}{P}\tag{5}$$

且有

$$\frac{dy}{dx}=-A_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+B_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)\tag{6}$$

在杆的左端点 $x=0$,应有 $y=0$;将这些数据代入(5)式,得到 $0=A_1+M_0/P$。此外在左端点 $x=0$ 处,还应有 $dy/dx=0$,将这些数据代入(6)式,由 $0=0+B_1\sqrt{P/EI}$,或 $B_1=0$。

在杆的右端 $x=L$,有 $dy/dx=0$,将之代入(6)式,同时注意到 $B_1=0$,得到

$$0=-A_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right)$$

但是已有 $A_1=-M_0/P$,且不为零;于是 $\sin(\sqrt{P/EI}L)=0$。这只有当 $\sqrt{P/EI}L=n\pi(n=1,2,3,\cdots)$时才有可能,于是

$$P_{cr}=\frac{n^2\pi^2EI}{L^2}\tag{7}$$

对于图 14-4 所画出的所谓屈曲第一模态,弯曲杆的挠曲线在 $x=L/2$ 处有水平切线,亦即有 $dy/dx=0$。而此时(6)式取如下形式,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M_0}{P}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\tag{6'}$$

注意到在 $x=L/2$ 处,$dy/dx=0$,得到

$$0=\frac{m_0}{P}\left(\frac{n\pi}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{2}$$

只有当 n 为偶数,亦既 $n=2、4、6、\cdots$时,上式才能满足。

于是,对于最小可能值 $n=2$,(7)式成为

$$P_{cr}=\frac{4\pi^2EI}{L^2}$$

题 14.4　细长杆一端固定,另端自由,并在自由端承受轴向压力。试求临界载荷。

解　☞ 如图 14-5 所示,临界载荷是刚好能保持微弯平衡构形的轴向压力 P。图中 M_0 表示左端支承的影响,它将防止任意的角位移。

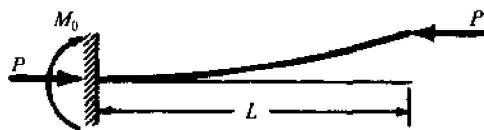


图 14-5

对屈曲柱的仔细观察指出,图 14-5 中的整杆相当于题 14.1 讨论过的两端铰支挠曲杆的 1/2,于是当前考虑的柱长 L,相当于铰支柱的半长度。因此用 $2L$ 代替题 14.1 中(9)式的 L,可以得到临界载荷,即

$$P_{cr}=\frac{\pi^2EI}{(2L)^2}=\frac{\pi^2EI}{4L^2}$$

题 14.5　矩形截面 40 mm×50 mm 的两端铰支钢杆,如果材料的比例极限是 230 MPa,$E=200$ GPa。试求能使用欧拉屈曲载荷公式的最短长度。

解　☞ 截面的最小二次矩为 $I=bh^3/12=(50)(40)^3/12=2.67\times10^5\ \text{mm}^4$。因此最小的回转半径为

$$r=\sqrt{\frac{I}{A}}=\sqrt{\frac{2.67\times10^5}{(40)(50)}}=11.5(\text{mm})$$

在题 14.2 中得到轴向加载的轴向应力为

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2E}{(L/r)^2}$$

令上式中的临界应力等于 230 MPa,即可解出公式适用的最短长度,即

$$230\times10^6=\frac{\pi^2(200\times10^9)}{(L/11.5)^2}\qquad\text{或}\qquad L=1.065\ \text{m}$$

题 14.6 再次考虑矩形截面 400 mm×50 mm 的两端铰支、承受轴向压缩的钢杆。若杆长为 2 m，且 $E = 200$ GPa，试求欧拉公式适用的屈曲载荷。

解 ☞ 在题 14.5 中已经得到截面积的最小二次矩为 $2.67\times10^5\ \text{mm}^4$。应用题 14.1 中的(9)式的屈曲载荷公式

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(200\times10^9)(10^{-6})(2.67\times10^5)}{(2\times10^3)^2} = 132(\text{kN})$$

相应于这个载荷的轴向应力是

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{132\times10^3}{(40\times50)} = 66(\text{MPa})$$

题 14.7 试利用欧拉理论，计算截面为 W10×21 的两端铰支柱的临界载荷。杆长 12 ft，$E = 30\times10^6\ \text{lbf/in}^2$。

解 ☞ 由第 8 章的表 8-1，得到最小惯性矩是 $9.7\ \text{in}^4$，于是

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(30\times10^6\ \text{lbf/in}^2)\times(9.7\ \text{in}^4)}{(144\ \text{in})^2} = 138000\ \text{lbf}$$

题 14.8 长度为 L 的细长杆，刚度为 EI；A 端铰支，B 端的转动受到反作用力矩的约束，每转动 1 弧度约束力矩为 λ。A 端和 B 端均不能发生侧向位移，但 A 端可自由向 B 端移动。试导出关于轴向屈曲载荷 P 的方程。

解 ☞ 发生屈曲的杆如图 14-6 所示，图中 M_L 表示约束力偶矩。屈曲杆的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx - Py$$

或

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{V}{EI}x$$

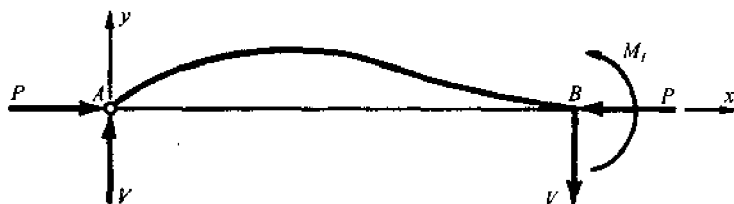


图 14-6

令 $\alpha^2 = P/EI$，有

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{V}{EI}x$$

很容易得到此方程的全解为

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{V}{P}x \tag{1}$$

作为第一个边界条件，当 $x = 0$ 时，$y = 0$；因此 $B = 0$。作为第二个边界条件，当 $x = L$ 时，$y = 0$；因此由(1)式，有

$$0 = A\sin\alpha L + \frac{V}{P}L \qquad 或 \qquad \frac{V}{P} = -\frac{A}{L}\text{ain}\alpha L$$

于是

$$y = A\left(\sin\alpha x - \frac{x}{L}\sin\alpha L\right) \tag{2}$$

由(2)式，可以得到 $x = L$ 处的斜率为

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=L} = A\left[\alpha\cos\alpha L - \frac{1}{L}\sin\alpha L\right] \tag{3}$$

B 端的恢复力偶距为

$$M'_L = A\lambda\left[\alpha\cos\alpha L - \frac{1}{L}\sin\alpha L\right] \tag{4}$$

此外，因为一般地应有 $M = EI(d^2y/dx^2)$，由(2)式还可以得到

$$M_L = -A\alpha^2 EI\sin\alpha L \tag{5}$$

我们特别注意到，在 B 端 M_L 增加时，dy/dx 在减少，令(4)式与(5)式相等时应增加一个负号，即

$$-A\alpha^2 EI\sin\alpha L = -\left[A\lambda\alpha\cos\alpha L + \frac{A\lambda}{L}\sin\alpha L\right] \tag{6}$$

化简后，求解屈曲载荷 P 的方程为

$$\frac{PL}{\lambda} - \alpha L\cot\alpha L + 1 = 0 \tag{7}$$

对于给定的 EI、L 和 λ 的数值，此方程必须用数值方法求解。

题 14.9　当杆中的平均轴向应力超过材料的比例极限时，讨论柱的行为。

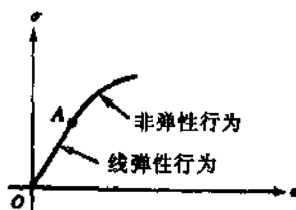


图 14-7

解　☞ 在题 14.1 中导出欧拉屈曲载荷时，是基于假设柱在到处都处于弹性范围之内，如图 14-7 的 OA 区段。在这个区段之内，杨氏模量 E 是直线 OA 的斜率。当应力-应变曲线结束线性亦即到达 A 点的右侧时，曲线的斜率叫做切线模量 E_t，并且 E_t 是随应变而变化的。变量 E_t 必须由材料实验来确定。在这种情况下必须考虑非弹性屈曲。这项工作最早的一个研究成果是德国工程师恩格赛(Engesser)提出来的(目前有时还在使用此种方法)，他于 1889 年建议用切线模量 E_t 代替题 14.1(9)式、即欧拉公式中的 E。在这种情况下，导致屈曲的轴向应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2}$$

此即为切线模量公式，且 $P_{cr} = A\sigma_{cr}$ 称为恩格赛载荷。此种方法简单且易于应用，见题 14.10；他给出的屈曲载荷略低于试验给出的非弹性屈曲载荷。这种理论也有某些不足之处，但不便于在此处讨论，因而也不是理论性设计的最好方法。

轴向压缩杆的实验结果通常可以用图 14-8 表示。在此图中，极近屈曲的应力 σ(除以材料的屈服点应力)表示为长细比(L/r)的函数。试验结果表现出如图所显示的较大分散性。实验数据分布在两条实线所框定的范围内。数据分散性的原因在于杆轴对直线的初始几何偏离，以及加工制造中产生的残余应力。根据(L/r)值不同，可有三种不同的图形表示方式，第一种是图中的(a)，亦即对于很短的柱发生压缩屈服；第二种是图中的(b)，亦即对于中等长度的杆(此种压杆在工程中有广泛的应用)发生的是非弹性屈服；第三种是图中的(c)，亦即对于很细长的杆，发生的是欧拉型屈曲。(a)型的屈服已在第 1 章讨论过；欧拉柱的行为在题 14.1～题 14.7 中处理过。相应于条件(b)的柱的合理设计应依赖于在下述几个题中所要讨论的几个半经验方法。

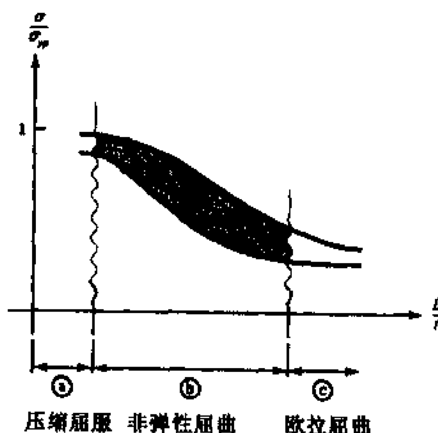


图 14-8

题 14.10　两端铰支的柱长度为 275 mm，并且是实心圆截面的；必须承担的轴向载荷是 250 kN，求所需要的半径；计算中使用切线模量理论，且实验测得的切线模量与轴向应力的关系曲线如图 14-9 所示。

解　☞ 由题 14.9 可知。根据切线模量理论，临界载荷为

$$P_{cr} = (A)\frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \tag{1}$$

对于半径为 R 的实心圆截面，$I = \pi R^4/4$；于是(1)式变成

$$E_t = \frac{(250000\ \text{N})(0.275\ \text{m})^2}{\pi^2(\pi R^4/4)} = \frac{2439}{R^4}\ \text{N/m}^2 \tag{2}$$

对于任意一个假设的半径 R，很容易求得轴向应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{250000}{\pi R^2} \tag{3}$$

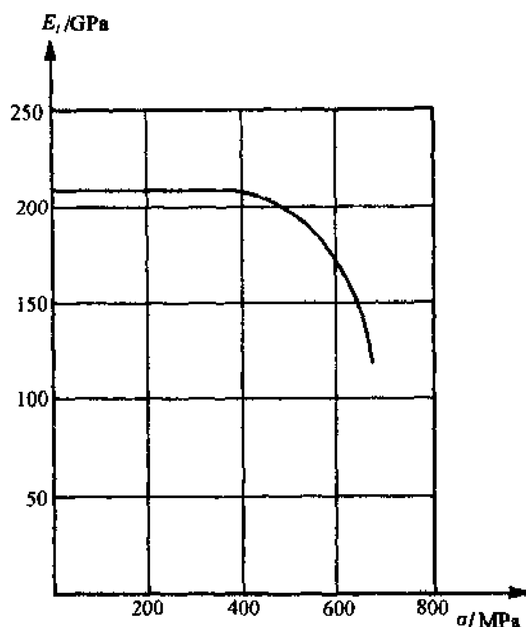


图 14-9

对于任一个法应力 σ 值，由图 14-9 都能确定一个 E_t 的实测值。于是可以用试凑法求解(2)和(3)式。

首先，试 $R = 0.012$ m，由(3)式可以得到

$$\sigma = \frac{250000}{\pi(0.012\ \mathrm{m})^2} = 553\ \mathrm{MPa}$$

相应于 σ 值，由图 14-9 得到 $E_t = 175$ GPa。然而由方程(2)有

$$E_t = \frac{2439}{(0.012\ \mathrm{m})^4} = 117\ \mathrm{GPa}$$

显然，这样一个 E_t 值是不行的，假设半径太大了。

其次，试 $R = 0.011$ m，由(3)式有

$$\sigma = \frac{25000}{\pi(0.011\ \mathrm{m})^2} = 658\ \mathrm{MPa}$$

根据 σ 的这个值，由图 14-9，可有 $E_t = 125$ GPa，然而，由(2)式有

$$E_t = \frac{2439}{(0.011\ \mathrm{m})^4} = 167\ \mathrm{GPa}$$

将这些数值制图，如图 14-10 所示，显然可用的半径数值应位于 0.011 m 和 0.012 m 之间，取试探值 $R = 0.0112$ m。由方程(3)有

$$\sigma = \frac{250000}{\pi(0.0112\ \mathrm{m})^2} = 634\ \mathrm{MPa}$$

由图 14-9 可得相应的 $E_t = 152$ GPa。由方程(2)得到

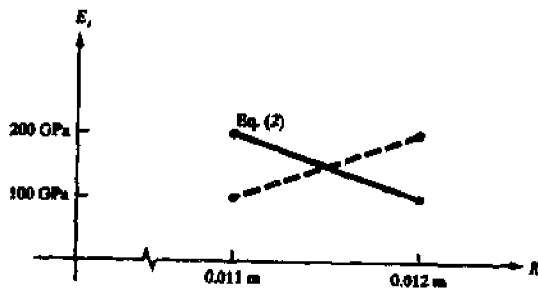


图 14-10

$$E_t = \frac{2439}{(0.0112\ \text{m})^4} = 155\ \text{GPa}$$

这两个 E_t 已经很接近了，可以取半径为 0.0112 m，即 11.2 mm。

题 14.11　讨论结构钢柱的设计准则。

解　根据美国钢结构协会(AISC)提倡的方法，对于长度为 L，截面最小的回转半径为 r，材料的屈服点为 σ_{yp}，杨氏模量为 E 的钢柱，由半经验公式给出的许可轴向应力为

$$\sigma_a = \frac{\left[1 - \dfrac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right]\sigma_{yp}}{\left[\dfrac{5}{3} + \dfrac{3(KL/r)}{8C_c} - \dfrac{(KL/r)^3}{8C_c^3}\right]} \qquad (KL/r < C_c) \tag{1}$$

$$\sigma_a = \frac{\pi^2 E}{(23/12)(KL/r)^2} \qquad (KL/r > C_c) \tag{2}$$

其中

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}} \tag{3}$$

此处 K 是题 14.1 中引入的端部影响系数。这个公式既可以在 SI 单位系统、也可以在 USCS 单位系统下使用。在(1)式和(2)式中，分母表示安全系数，显然他是伴随长细比(L/r)增加而增加的。

第二种方法，也可能是和实际结果符合最好的一种方法，是由布乔哈伍德(Bjorhovde, R*)提出的。他在 1971 年分析了大量具有初始缺陷及(加工)残余应力的全尺寸柱。这些柱具有相对轻或中等重量、热轧工字钢截面；翼缘宽度小于 2 in(50.8 mm)，材料屈服点低于 49000 lbf/in^2(335 MPa)。他发现，极近塌陷时的平均(全截面)应力由下列公式给出

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_u = \sigma_{yp}, && 0 < \lambda < 0.15\\
&\sigma_u = \sigma_{yp}(1.035 - 0.202\lambda - 0.222\lambda^2), && 0.15 \le \lambda \le 1.0\\
&\sigma_u = \sigma_{yp}(-0.111 + 0.636\lambda^{-1} + 0.087\lambda^{-2}), && 1.0 \le \lambda \le 2.0\\
&\sigma_u = \sigma_{yp}(0.009 + 0.877\lambda^{-2}), && 2.0 \le \lambda < 3.6\\
&\sigma_u = \sigma_{yp}\lambda^{-2}(\text{欧拉曲线}), && \lambda \ge 3.6
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中

$$\lambda = \frac{L}{\pi r}\sqrt{\frac{\sigma_{yp}}{E}} \tag{5}$$

这些结果用图表示如结构稳定研究学会(SSRC)曲线 2，表示图 14-8 中 b 区段中钢柱的实验行为。这些公式既可以使用 SI 单位系统，也可以使用 USCS 单位系统。因为(4)式中的应力 σ_u 极近塌陷，式中又无安全系数，必须由设计者引入。布乔哈伍德还曾经给出适用于其它类型截面的两套类似公式。

题 14.12　利用在题 14.11 中讨论的 AISC 建议的设计公式，确定 W8×19 截面、10 ft 长柱的许可轴向载荷。该柱的两端是铰支的。屈服点是 36000 lbf/in^2、$E = 30 \times 10^6$ lbf/in^2。

解　由第 8 章的表 8-1，可以得到给定截面的几何性质，

$$I_{min} = 7.9\ \text{in}^4, \qquad A = 5.59\ \text{in}^2$$

由第 7 章的方法得到回转半径是

$$r = \sqrt{\frac{7.9}{5.59}} = 1.189(\text{in})$$

于是

$$\frac{L}{r} = \frac{(10)(12)}{1.189} = 100.9$$

根据题 14.11 的(3)式，有

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}} = \sqrt{\frac{2\pi^2(30\times10^6\ \text{lbf/in}^2)}{36000\ \text{lbf/in}^2}} = 128.26$$

---

* Bjorhovde. R 和 Tall. L《最小柱强度和多重柱曲线概念》，Report 337.29，LehighUniversity，Fritz Eng. Lab. Bethlehem，PA，1971. Bjorhovde. R《钢柱强度的确定和随机方法》Ph.D. dissertation. lehigh University，Bethlehem，PA，1972.

对于两端铰支柱，$K=1$ 因而 $K(L/r)<C_C$；由题 14.11 中(1)式给出的许可轴向应力为

$$\sigma_a=\frac{\left[1-\frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right]\sigma_{yp}}{\frac{5}{3}+\frac{3(KL/r)}{8C_c}-\frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}}=\frac{\left[1-\frac{(100.9)^2}{2(128.26)^2}\right](36000)}{\frac{5}{3}+\frac{3(100.9)}{8(128.26)}-\frac{100.9}{8(128.26)^3}}$$

$$=13100(\text{lbf/in}^2)$$

许可轴向载荷为

$$P_a=(5.59\ \text{in}^2)(13100\ \text{lbf/in}^2)=73100\ \text{lbf}$$

题 14.13 重新考虑题 14.12 中的双端铰支柱，本题将其长度取作 15 ft。采用 AISC 建议的方法确定许可的轴向载荷。

解 ☞ 注意到本题 $L/r=(15)(12)/1.189=151.4$，增加后的长度(与题 14.12 相比)使得

$$K\frac{L}{r}(=151.4)>C_c(=128.6)$$

因而，必须使用题 14.11 中的公式(2)计算许可的轴向应力，

$$\sigma_a=\frac{12\pi^2E}{23(KL/r)^2}=\frac{12\pi^2(30\times10^6\ \text{lbf/in}^2)}{23(151.4)^2}=6740\ \text{lbf/in}^2$$

于是，许可的轴向载荷为

$$P_a=(5.59\ \text{in}^2)(6740\ \text{lbf/in}^2)=37670\ \text{lbf}$$

题 14.14 两端铰支柱的长度为 3 m，截面为 W203×28；材料的屈服点为 250 MPa，$E=200$ GPa。试用 AISC 建议的方法计算许可的轴向载荷。

解 ☞ 由第 8 章的表 8-2，可得到截面的几何性质，

$$I_{min}=3.28\times10^6\ \text{mm}^4,\qquad A=3600\ \text{mm}^2$$

回转半径

$$r=\sqrt{\frac{3.28\times10^6\ \text{mm}^4}{3600\ \text{mm}^2}}=30.18\ \text{mm}$$

于是

$$\frac{L}{r}=\frac{3000\ \text{mm}}{30.18\ \text{mm}}=99.4$$

由题 14.11 的(3)式，得到

$$C_c=\sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{yp}}}=\sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9\ \text{N/m}^2)}{250\times10^6\ \text{N/m}^2}}=125.7$$

因两端铰支柱 $K=1$，因此 $K(L/r)<C_c$；许可的轴向应力由题 14.11 中(1)式计算，

$$\sigma_a=\frac{\left[1-\frac{(KL/r)^2}{2C_c^2}\right]\sigma_{yp}}{\frac{5}{3}+\frac{3(KL/r)}{8C_c}-\frac{(KL/r)^3}{8C_c^3}}$$

$$=\frac{\left[1-\frac{(99.4)^2}{2(125.7)^2}\right]250\times10^6}{\frac{5}{3}+\frac{3(99.4)}{8(125.7)}-\frac{(99.4)^3}{8(125.7)^3}}=90.35(\text{MPa})$$

许可轴向载荷为

$$P_a=(36000\ \text{mm}^2)\left(\frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}}\right)(90.35\times10^6\ \text{N/m}^2)=325000\ \text{N 或 325KN}$$

题 14.15 再次考虑题 14.12 中的柱，本题要求用在题 14.11 中讨论过的、SSRC 建议的方法计算最大的承载能力。

解 ☞ 正如在题 14.11 讨论的，首先要计算

$$\lambda=\frac{KL}{r}\cdot\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{yp}}{E}}$$

$$=\frac{(1)(10\ \text{ft})(12\ \text{in/ft})}{(1.189)}\cdot\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{36000\ \text{lbf/in}^2}{30\times10^6\ \text{lbf/in}^2}}=1.113$$

由题 14.11 知，对于上述的 λ，必须用半径验出式计算柱的峰值许可应力，

$$\sigma_a = \sigma_{yp}\left[-0.111 + \frac{0.636}{\lambda} + \frac{0.087}{\lambda^2}\right]$$

$$= (36000\ \text{lbf/in}^2)\left[-0.111 + \frac{0.636}{1.113} + \frac{0.087}{(1.113)^2}\right] = 19000\ \text{lbf/in}^2$$

相应于此应力的轴向载荷是

$$P_{max} = (5.59\ \text{in}^2)(19000\ \text{lbf/in}^2) = 106200\ \text{lbf}$$

这个载荷表示此种形式的柱能承受的峰值载荷平均值。要注意的是，在计算中没考虑安全因数，因此，对此种构件的设计载荷应小于 106200 lbf。

题 14.16　两端铰支柱，长度为 3.5 m；由材料屈服点 250 MPa，$E = 206$ GPa 的材料制成。承受的轴向压缩载荷 750 kN；试用 AISC 建议的方法、由第 8 章表 8-2 中选择工字型截面。

解　为得到第 1 个近似值，使用公式 $P = A\sigma$，有

$$A = \frac{750000\ \text{N}}{250 \times 10^6\ \text{N/m}^2} = 0.0030\ \text{m}^2,\quad 或\quad 3000\ \text{mm}^2$$

此结果表示，任何面积小于 3000 mm^2 的截面均是不能使用的。

其次，试探选择 W203 × 28 截面，由表 8-2 有，$A = 3600\ \text{mm}^2$，$I\text{min} = 3.28 \times 10^6\ \text{mm}^4$，最小的回转半径是

$$r = \sqrt{\frac{3.28 \times 10^6\ \text{mm}^4}{3600\ \text{mm}^2}} = 30.2\ \text{mm}$$

由此可得长细比 $L/r = 3500/30.2 = 116$

由题 14.11 中的(3)式，有

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9\ \text{N/m}^2)}{250 \times 10^6\ \text{N/m}^2}} = 125.6$$

对于两端铰支柱，有

$$K\frac{L}{r}(=116) < C_c(=125.6)$$

因而我们须用题 14.1 中的(1)式，可有

$$\sigma_a = \frac{\left[1 - \frac{(116)^2}{2(125.6)^2}\right]250}{\left[\frac{5}{3} + \frac{3(116)}{8(125.6)} - \frac{(116)^3}{8(125.6)^3}\right]} = 74.95(\text{MPa})$$

由此得到

$$P_a = (3600\ \text{mm}^2)\left(\frac{\text{m}}{10^3\ \text{mm}}\right)^2(74.95 \times 10^6\ \text{N/m}^2) = 27000\ \text{N},或\ 270\ \text{kN}$$

这表明，第一次选择的截面太小了。

第二次，试探选择 W254 × 72 截面，$A = 9280\ \text{mm}^2$，$I_{min} = 38.6 \times 10^6\ \text{mm}^4$；最小的回转半径

$$r = \sqrt{\frac{38.6 \times 10^6\ \text{mm}^4}{9280\ \text{mm}^2}} = 64.5\ \text{mm}$$

此时，长细比是 3500/64.5 = 54.26，再次有

$$K\frac{L}{r}(=54.26) < C_c(=125.6)$$

再次使用题 14.11 中的(1)式计算许可应力为

$$\sigma_a = \frac{\left[1 - \frac{(54.26)^2}{2(125.6)^2}\right]250}{\left[\frac{5}{3} + \frac{3(54.26)}{8(125.6)} - \frac{(54.26)^3}{8(125.6)^3}\right]} = 124.6(\text{MPa})$$

由此得

$$P_a = (9280\ \text{mm}^2)\left(\frac{1\ \text{m}}{10^3\ \text{mm}}\right)^2(124.6 \times 10^6\ \text{N/m}^2)$$

$$= 1.15 \times 10^6\ \text{N 或 1150 KN}$$

这个截面又有些太大了。

再试探研究 W254×54 截面，$A=7010\ mm^2$，$I_{min}=17.5\times10^6\ mm^4$。于是最小的回转半径 $r=50.0$ mm，长细比 $L/r=3500/50=70$；再次利用题 14.11 中的(1)式，得到 $\sigma_a=114$ MPa，由此得许可载荷 $P_a=799$ kN。

使用同样的方法研究再小一号的截面 W254×43，此时许可载荷仅为 478 kN。

因此，最终选定的截面是 W254×54，它能承担轴向载荷为 799 kN，超过了所要求的 750 kN。更详细的结构钢形状表格可能会帮助选到较 W254×54 更小的截面。

题 14.17 试针对题 14.11，编写计算钢柱轴向载荷的 FORTRAN 程序(用 AISC 建议的方法)。

解 ☞ 符号仍如题 14.11，并且该题中的(1)、(2)式给出(KL/r)小于或大于无量钢量 C_c 时的许可轴向应力。所求程序如下

```
00010************************************************************************
00020         PROGRAM STEELCL (INPUT,OUTPUT)
00030*                  (AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION)
00040************************************************************************
00050*
00060*        AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00070*        DATE  : JANUARY 24, 1989
00080*
00090*   BRIEF DESCRIPTION:
00100*       ONE APPROACH TO CONSIDERING DESIGN CRITERIA FOR STRUCTURAL
00110*   STEEL COLUMNS IS GIVEN BY THE A.I.S.C. (AMERICAN INSTITUTE OF
00120*   STEEL CONSTRUCTION). THIS PROGRAM DETERMINES THE ALLOWABLE AXIAL
00130*   COMPRESSIVE STRESS AND LOADING OF A STEEL COLUMN USING THE RELATIO
00140*   DEVELOPED AND ACCEPTED BY THE A.I.S.C.
00150*
00160*   INPUT:
00170*       THE USER IS FIRST ASKED IF USCS OR SI UNITS WILL BE USED. THEN,
00180*   THE COLUMN LENGTH, THE MINIMUM MOMENT OF INERTIA AND AREA OF THE
00190*   COLUMN CROSS SECTION, THE MATERIAL YIELD POINT, AND YOUNG'S MODULUS
00200*   ARE INPUTTED. ALSO, THE END FIXITY COEFFICIENT IS ENTERED.
00210*
00220*   OUTPUT:
00230*       THE ALLOWABLE AXIAL COMPRESSIVE STRESS AND LOADING OF THE COLUMN
00240*   IS DETERMINED.
00250*
00260*   VARIABLES:
00270*       ANS      ---      DENOTES IF USCS OR SI UNITS ARE DESIRED
00280*      L,I,A     ---      LENGTH, MIN.MOMENT OF INERTIA, AREA OF COLUMN X-SECT
00290*     SIGYP,E    ---      YIELD POINT, YOUNG'S MODULUS OF THE MATERIAL
00300*       R        ---      MIN. RADIUS OF GYRATION AS CALCULATED FROM THE
00310*                         CROSS-SECTIONAL AREA AND MOMENT OF INERTIA
00320*       CC       ---      CRITICAL CONSTANT OF THE COLUMN...A FUNCTION OF ITS
00330*                         PHYSICAL AND MATERIAL PROPERTIES
00340*     CHECK      ---      THE COLUMN CONSTANT AS CALCULATED FOR THE SPECIFIC
00350*                         CASE CONSIDERED. THIS IS COMPARED TO THE CRITICAL
00360*                         CONSTANT TO DETERMINE WHICH OF TWO RELATIONS TO USE
00370*       K        ---      END FIXITY COEFFICIENT OF THE COLUMN
00380* HOLD1,HOLD2---      PARTIAL CALCULATIONS OF THE MORE COMPLICATED FUNCTIO
00390*                         (USED FOR EASE IN PROGRAMMING)
00400*      SIGA      ---      ALLOWABLE AXIAL COMPRESSIVE STRESS
00410*     LOADA      ---      ALLOWABLE AXIAL LOAD
00420*       PI       ---      3.14159
00430*
00440************************************************************************
00450******                     MAIN PROGRAM                            *****
00460************************************************************************
00470*
00480*        VARIABLE DECLARATIONS
00490*
00500     REAL L,I,A,SIGYP,E,R,CHECK,CC,K,SIGA,LOADA,PI,HOLD1,HOLD2
00510     INTEGER ANS
00520*
00530     PI = 3.14159
00540*
00550*        USER INPUT
00560*
00570     PRINT*,'PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:'
00580     PRINT*,'1 - USCS'
00590     PRINT*,'2 - SI'
00600     PRINT*,' '
00610     PRINT*,'ENTER 1,2'
00620     READ*,ANS
00630     IF (ANS.EQ.1) THEN
00640        PRINT*,'PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF POUND AND/OR INCH...'
00650     ELSE
00660        PRINT*,'PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF NEWTON AND/OR METER..
```

```
00670      ENDIF
00680      PRINT*,' '
00690      PRINT*,'ENTER COLUMN LENGTH:'
00700      READ*,L
00710      PRINT*,'ENTER THE CROSS-SECTIONAL PROPERTIES...'
00720      PRINT*,'MOMENT OF INERTIA, I:'
00730      READ*,I
00740      PRINT*,'AREA:'
00750      READ*,A
00760      PRINT*,'ENTER THE MATERIAL YIELD POINT:'
00770      READ*,SIGYP
00780      PRINT*,'ENTER THE VALUE FOR YOUNG'S MODULUS:'
00790      READ*,E
00800      PRINT*,'FINALLY, ENTER THE END FIXITY COEFFICIENT, K:'
00810      READ*,K
00820*
00830*           END USER INPUT
00840*
00850*
00860******          CALCULATIONS         ******
00870*
00880*        MINIMUM RADIUS OF GYRATION
00890*
00900     R = (I/A)**0.5
00910*
00920*        CRITICAL CONSTANT FOR THIS COLUMN SPECIFICATION
00930*
00940     CHECK = (L/R)*K
00950*
00960*        THE CRITICAL CONSTANT FOR ALL COLUMNS OF THIS MATERIAL
00970*
00980     CC = ((2 * (PI**2) * E)/SIGYP)**0.5
00990*
01000*        COMPARE CC AND CHECK TO DETERMINE WHICH RELATION TO USE
01010*

01020     IF (CHECK.LT.CC) THEN
01030        HOLD1 = (1 - ((CHECK**2)/(2*(CC**2))))*SIGYP
01040        HOLD2 = ((5./3)+((3*CHECK)/(8*CC)) - ((CHECK**3)/(8*(CC**3))))
01050     ELSE
01060        HOLD1 = (PI**2)*E
01070        HOLD2 = (23./12)*(CHECK**2)
01080     ENDIF
01090*
01100*        THE ALLOWABLE AXIAL STRESS AND LOADING
01110*
01120     SIGA = HOLD1/HOLD2
01130     LOADA = SIGA*A
01140*
01150******          PRINTING OUTPUT          ******
01160*
01170     PRINT*,' '
01180     PRINT*,' '
01190     PRINT*,'AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC) STANDARDS:'
01200     PRINT*,' '
01210     IF (ANS.EQ.1) THEN
01220        PRINT 10,SIGA,'PSI.'
01230        PRINT 20,LOADA,'LB.'
01240     ELSE
01250        SIGA=SIGA/1000000.0
01260        PRINT 10,SIGA,'MPA.'
01270        PRINT 20,LOADA,'NEWTONS.'
01280     ENDIF
01290*
01300*           FORMAT STATEMENTS
01310*
01320 10  FORMAT(2X,'THE ALLOWABLE AXIAL COMPRESSIVE STRESS  IS',F10.1,
01330+         1X,A4)
01340 20  FORMAT(2X,'THE ALLOWABLE AXIAL LOAD  IS',F10.1,1X,A)
01350*
01360     STOP
01370     END
```

题 14.18　长度为 15 ft 的两端铰支钢柱，截面为 W8×19，材料的屈服点为 33000 lbf/in^2，$E = 30\times10^6$ lbf/in^2。试利用题 14.17 中的 FORTRAN 程序计算许可轴向应力和载荷（用 AISC 建议的方法）。

解　☞ 由第 8 章的表 8-1，可有 $I_{min} = 7.9\ \text{in}^4$，$A = 5.59\ \text{in}^2$。自提示程序及计算机运行结果为

```
run
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI

 ENTER 1,2
? 1
 PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF POUND AND/OR INCH...

 ENTER COLUMN LENGTH:
? 180
 ENTER THE CROSS-SECTIONAL PROPERTIES...
 MOMENT OF INERTIA, I:
? 7.9
 AREA:
? 5.59
 ENTER THE MATERIAL YIELD POINT:
? 33000

 ENTER THE VALUE FOR YOUNG'S MODULUS:
? 30E+6
 FINALLY, ENTER THE END FIXITY COEFFICIENT, K:
? 1


 AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC) STANDARDS:

  THE ALLOWABLE AXIAL COMPRESSIVE STRESS IS    6738.2 PSI.
  THE ALLOWABLE AXIAL LOAD  IS   37666.5 LB.

SRU      0.780 UNTS.
```

题 14.19 两端铰支的钢柱,长度为 10 m,截面为 W305×37,材料的屈服点为 270 MPa,$E=200$ GPa。由第 8 章的表 8-2 可以得到 $I_{min}=6.02\times10^{-6}$ m^4, $A=4760\times10^{-6}$ m^2。试利用题 14.17 的程序计算许可轴向应力及载荷(基于 AISC 建议的方法)。

解 ☞ 利用这些数据,计算机运行结果为

```
run
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI

 ENTER 1,2
? 2
 PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF NEWTON AND/OR METER...

 ENTER COLUMN LENGTH:
? 10
 ENTER THE CROSS-SECTIONAL PROPERTIES...
 MOMENT OF INERTIA, I:
? 6.02E-6
 AREA:
? 4760E-6
 ENTER THE MATERIAL YIELD POINT:
? 270E+6
 ENTER THE VALUE FOR YOUNG'S MODULUS:
? 200E+9
 FINALLY, ENTER THE END FIXITY COEFFICIENT, K:
? 1


 AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION (AISC) STANDARDS:

  THE ALLOWABLE AXIAL COMPRESSIVE STRESS IS     13.0 MPA.
  THE ALLOWABLE AXIAL LOAD  IS   61998.2 NEWTONS.

SRU      0.777 UNTS.
```

题14.20　采用SSRC建议的方法，编制FORTRAN程序，用以计算在题14.11中讨论过的，极近坍塌的平均轴向压缩应力。

解　☞ 各符号仍如在题14.11中所定义的，且题14.11中的(4)式给出了随λ((5)式给出的)而变化的、极近坍塌的轴向压缩应力。列出程序如下：

```
00010*********************************************************************
00020           PROGRAM STEELCL (INPUT,OUTPUT)
00030*                   (BJORHOVDE, STRUCTURAL STABILITY RESEARCH COUNCIL)
00040*********************************************************************
00050*
00060*          AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00070*          DATE  : JANUARY 24, 1989
00080*
00090*  BRIEF DESCRIPTION:
00100*      ONE APPROACH TO CONSIDERING DESIGN CRITERIA FOR STRUCTURAL
00110*  STEEL COLUMNS WAS DEVELOPED BY  R. BJORHOVDE, AND IS POSSIBLY
00120*  IN THE BEST AGREEMENT WITH EXPERIMENTAL EVIDENCE. THE MEAN AXIAL
00130*  COMPRESSIVE STRESS JUST PRIOR TO COLLAPSE CAN BE OBTAINED FOR THE
00140*  SPECIFIC COLUMN BY FIRST CALCULATING THE 'COLUMN CONSTANT' AND THEN
00150*  DETERMINING THE MEAN STRESS AT FAILURE FROM THE APPROPRIATE RELATION.
00160*
00170*  INPUT:
00180*      THE USER IS FIRST ASKED IF USCS OR SI UNITS WILL BE USED. THEN,
00190*  THE COLUMN LENGTH, THE MINIMUM MOMENT OF INERTIA AND AREA OF THE
00200*  COLUMN CROSS SECTION, THE MATERIAL YIELD POINT, AND YOUNG'S MODULUS
00210*  ARE INPUTTED. ALSO, THE END FIXITY COEFFICIENT IS ENTERED.
00220*
00230*  OUTPUT:
00240*      THE MEAN (OVER THE CROSS SECTION) AXIAL COMPRESSIVE STRESS AND
00250*  THE MEAN PEAK LOADING CONDITIONS ARE DETERMINED.
00260*
00270*  VARIABLES:
00280*      ANS      ---     DENOTES IF USCS OR SI UNITS ARE DESIRED
00290*     L,I,A     ---     LENGTH, MIN.MOMENT OF INERTIA, AREA OF COLUMN X-SECT
00300*    SIGYP,E    ---     YIELD POINT, YOUNG'S MODULUS OF THE MATERIAL
00310*       R       ---     MIN. RADIUS OF GYRATION AS CALCULATED FROM THE
00320*                       X-SECTIONAL AREA AND MOMENT OF INERTIA
00330*     LAMDA     ---     CRITICAL CONSTANT OF THE COLUMN...A FUNCTION OF ITS
00340*                       PHYSICAL AND MATERIAL PROPERTIES
00350*       K       ---     END FIXITY COEFFICIENT OF THE COLUMN
00360*      SIGU     ---     MEAN AXIAL COMPRESSIVE STRESS AT FAILURE
00370*     LOADU     ---     MEAN AXIAL LOAD AT FAILURE
00380*       PI      ---     3.14159
00390*
00400************************************************************************
00410******                        MAIN PROGRAM                        *****
00420************************************************************************
00430*
00440*          VARIABLE DECLARATIONS
00450*
00460       REAL L,I,A,SIGYP,E,R,LAMDA,K,SIGU,LOADU,PI
00470       INTEGER ANS
00480*
00490       PI = 3.14159
00500*
00510*          USER INPUT
00520*
00530       PRINT*,'PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:'
00540       PRINT*,'1 - USCS'
00550       PRINT*,'2 - SI'
00560       PRINT*,' '
00570       PRINT*,'ENTER 1,2'
00580       READ*,ANS
00590       IF (ANS.EQ.1) THEN
00600          PRINT*,'PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF POUND AND/OR INCH...'
00610       ELSE
00620          PRINT*,'PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF NEWTON AND/OR METER..
00630       ENDIF
00640       PRINT*,' '
00650       PRINT*,'ENTER COLUMN LENGTH:'
00660       READ*,L
00670       PRINT*,'ENTER THE CROSS-SECTIONAL PROPERTIES...'
00680       PRINT*,'MOMENT OF INERTIA, I:'
00690       READ*,I
00700       PRINT*,'AREA:'
00710       READ*,A
00720       PRINT*,'ENTER THE MATERIAL YIELD POINT:'
```

```
00730        READ*,SIGYP
00740        PRINT*,'ENTER THE VALUE FOR YOUNG'S MODULUS:'
00750        READ*,E
00760        PRINT*,'FINALLY, ENTER THE END FIXITY COEFFICIENT, K:'
00770        READ*,K
00780*
00790*             END USER INPUT
00800*
00810*
00820******         CALCULATIONS         ******
00830*
00840*        MINIMUM RADIUS OF GYRATION
00850*
00860       R = (I/A)**0.5
00870*
00880*       CRITICAL CONSTANT FOR THIS COLUMN SPECIFICATION
00890*
00900       LAMDA = ((K*L)/(R*PI))*((SIGYP/E)**0.5)
00910*
00920*       MEAN AXIAL COMPRESSIVE STRESS AND LOADING
00930*
00940       IF (LAMDA.LT.0.15) THEN
00950          SIGU = SIGYP
00960       ELSEIF (LAMDA.GE.0.15 .AND. LAMDA.LT.1.0) THEN
00970          SIGU = SIGYP*(1.035 - 0.202*LAMDA - 0.222*(LAMDA**2))
00980       ELSEIF (LAMDA.GE.1.0 .AND. LAMDA.LT.2.0) THEN
00990          SIGU = SIGYP*(-0.111 + 0.636/LAMDA + 0.0872/(LAMDA**2))
01000       ELSEIF (LAMDA.GE.2.0 .AND. LAMDA.LT.3.6) THEN
01010          SIGU = SIGYP*(0.009 + 0.877/(LAMDA**2))
01020       ELSEIF (LAMDA.GE.3.6) THEN
01030          SIGU = SIGYP/(LAMDA**2)
01040       ENDIF
01050*
01060       LOADU = SIGU*A
01070*
01080******        PRINTING OUTPUT         ******
01090*
01100       PRINT*,' '
01110       PRINT*,' '
01120       PRINT*,'STRUCTURAL STABILITY RESEARCH COUNCIL (BJORHOVDE) STANDARDS
01130       PRINT*,' '
01140       IF (ANS.EQ.1) THEN
01150          PRINT 10,SIGU,'PSI'
01160          PRINT 20,LOADU,'LB'
01170       ELSE
01180          SIGU=SIGU/1000000.0
01190          PRINT 10,SIGU,'MPA'
01200          PRINT 20,LOADU,'NEWTONS'
01210       ENDIF
01220*
01230*             FORMAT STATEMENTS
01240*
01250 10    FORMAT(2X,'THE MEAN AXIAL COMPRESSIVE STRESS AT FAILURE IS',F10.1,
01260+            1X,A3)
01270 20    FORMAT(2X,'THE MEAN AXIAL LOAD AT FAILURE IS',F10.1,1X,A)
01280*
01290       STOP
01300       END
```

题 14.21 考虑一个长 3.5 m，工字形截面为 W254×79 的两端铰支钢柱，材料的屈服点为 250 MPa，$E = 200$ GPa。试利用题 14.20 的程序计算极近坍塌的轴向压缩应力（用 SSRC 建议的方法）。

解 ☞ 由第 8 章的表 8-2 可以得到这个截面的有关资料为，$I = 43.1 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4$，$A = 10200 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$。利用这些数据及本题给出的长度、屈服点、弹性模量，自提示程序打印出如下的结果：

```
run
 PLEASE INDICATE YOUR CHOICE OF UNITS:
 1 - USCS
 2 - SI
 ENTER 1,2
? 2
 PLEASE INPUT ALL DATA IN UNITS OF NEWTON AND/OR METER...
 ENTER COLUMN LENGTH:
? 3.5
 ENTER THE CROSS-SECTIONAL PROPERTIES...
 MOMENT OF INERTIA, I:
? 43.1E-6
```

```
AREA:
? 10200E-6
 ENTER THE MATERIAL YIELD POINT:
? 250E+6
 ENTER THE VALUE FOR YOUNG'S MODULUS:
? 200E+9
 FINALLY, ENTER THE END FIXITY COEFFICIENT, K:
? 1

 STRUCTURAL STABILITY RESEARCH COUNCIL (BJORHOVDE) STANDARDS:

  THE MEAN AXIAL COMPRESSIVE STRESS AT FAILURE IS     207.8 MPA
  THE MEAN AXIAL LOAD AT FAILURE IS 2119270.2 NEWTONS

SRU       0.786 UNTS.
```

题 14.22　考虑初始为直线、两端铰支并承受偏心压力 P 作用的柱(如图 14-11)。若它知载荷偏心距为 e,试求柱中的最大应力。

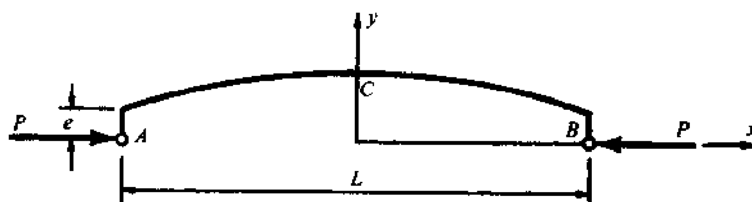


图 14-11

解　根据此柱的挠曲构形,微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$$

标准解为

$$y=C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

因为在 $x=-L/2$ 和 $x=L/2$ 的两个端部,均有 $y=e$,可得两个积分常数为

$$C_1=0\qquad C_2=\frac{e}{\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\cdot\frac{L}{2}\right)}$$

因而,弯曲柱的挠度曲线为

$$y=\frac{e}{\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\cdot\frac{L}{2}\right)}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)$$

根据对称性,最大挠度发生在 $x=0$ 处,即

$$y_{max}=e\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\cdot\frac{L}{2}\right)$$

引入题 14.1 中(9)式给出的临界载荷 P_{cr},上式变成为

$$y_{max}=e\sec\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)$$

显然,当载荷 P 接近临界载荷 P_{cr}时,发生在柱中部的最大挠度将变得很大,现象是侧向挠曲的缓慢增加,而不是屈曲。最大的压应力发生在 C 处的凹侧,且为

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}+\frac{M_{max}c}{I}=\frac{P}{A}+\frac{Pec}{I}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)$$

式中 c 表示从截面中性轴到最外层纤维的距离。如果引入截面的回转半径 r,上式变为

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}\left[1+\frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P}{AE}}\right)\right]$$

这就是关于受偏心载荷的细长柱割线公式,式中 P/A 是平均应力。如果指定最大应力等于材

料的屈服点，那么引起屈服的平均压应力将由下述方程得出

$$\frac{P_{yp}}{A}=\frac{\sigma_{yp}}{1+\frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{L}{2r}\sqrt{\frac{P_{yp}}{AE}}\right)}$$

对于任一个指定的(ec/r^2)值，均可用试凑法求解上述方程，并可以画出一个$(P/A)\sim(L/r)$曲线，这个曲线将能指出首先发生外部纤维屈服时的(P/A)值。

题 14.23 对于承受轴向压缩和有限侧向位移的铰支柱，试求载荷—挠度关系。

解 ☞ 题 14.1 中的处理方法限于非常小的侧向挠度，这是导出(1)式(欧拉-伯努利方程)时所作的假设。为了得到更一般的表示方法，我们引入角坐标 θ 和弧长坐标 s，作为对 x, y 坐标的补充(见图 14-12)。

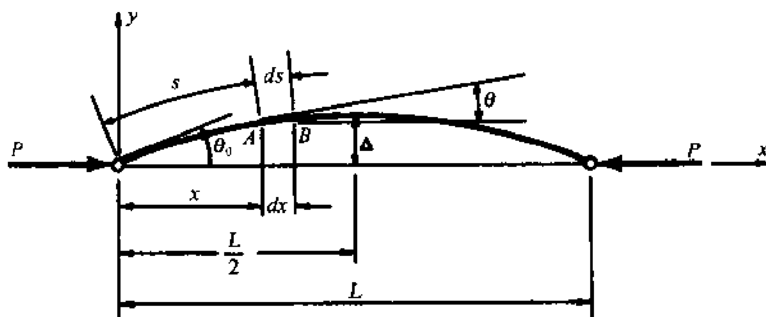


图 14-12

变形杆放大后的图形更清楚地表示角坐标(图 14-13)，注意到 $d\theta$ 是负的，我们研究由两个相邻截面限定的弧长元素 ds，加载之前是彼此平行的，但是在杆发生侧向挠曲之后，这些截面的情况如图 14-14 所示。在这个圆弧微段中两个截面的对弧角为 $d\theta$。用与题 8.1 中使用的同样方法，可以得到与中性层相距 y 处纤维的法应变。

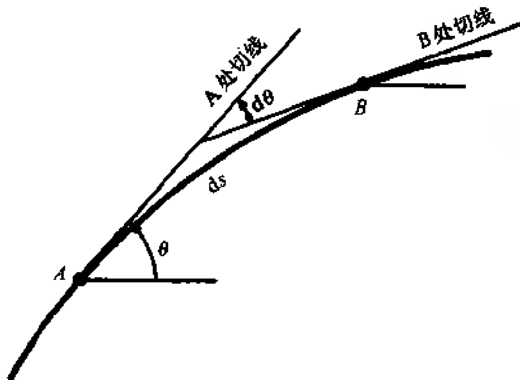


图 14-13

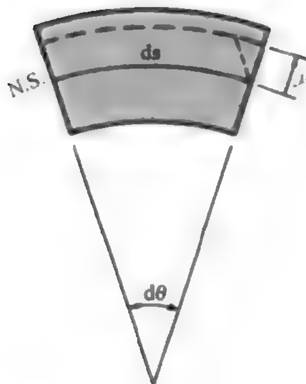


图 14-14

$$\varepsilon=\frac{y\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{\sigma}{E}$$

其中 σ 是作用在纤维上的纵向应力。但是，由题 8.1 有 $\sigma=My/I$，于是

$$\frac{y\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{My}{EI}$$

因为 $M=-Py$，有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=-\frac{Py}{EI}\tag{1}$$

如果令 $\alpha^2=P/EI$，那么

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=-\alpha^2y\tag{2}$$

将上式再微分一次，有

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\alpha^2\frac{dy}{ds} = -\alpha^2\sin\theta \tag{3}$$

与题 9.1 中的(5)式不同，此式适用于大的、有限的侧向挠度，题 9.1 中的(5)式限于很小的挠度。为了求解(3)式，双方乘积分因子 $2(d\theta/ds)$，

$$2\frac{d\theta}{ds}\frac{d^2\theta}{ds^2} = -2\alpha^2(\sin\theta)\frac{d\theta}{ds} \tag{4}$$

积分上式，有

$$(\frac{d\theta}{ds})^2 = 2\alpha^2\cos\theta + C_1 \tag{5}$$

当 $x=0$ 时，$\theta=\theta_0$(初始倾斜)，$y=0$；因此，由(2)式可有 $d\theta/ds=0$。于是，由(5)式，有

$$0 = 2\alpha^2\cos\theta_0 + C_1$$

亦即

$$\frac{d\theta}{ds} = -\sqrt{2}\alpha\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0} \tag{6}$$

此处取负平方根是因为 $d\theta$ 始终是负的。上式可变换为

$$\frac{d\theta}{ds} = -2\alpha\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{7}$$

下面引入一个变量置换，令

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\phi \tag{8}$$

式中 ϕ 是一个变量，且假设当 $x=0$ 时，$\theta=\pi/2$；$x=L/2$ 时，$\phi=0$，因此

$$k = \frac{\theta_0}{2} \tag{9}$$

那么

$$\theta = 2\arcsin(k\sin\phi)$$

且

$$d\theta = \frac{2k\cos\phi d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{10}$$

由(7)、(8)、(9)和(10)式，有

$$\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = -\alpha ds \tag{11}$$

积分(11)式并记忆 ϕ 的定义与在端点处数值，

$$\alpha\int_0^{L/2}ds = -\int_{\pi/2}^{0}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

或

$$\alpha\cdot\frac{L}{2} = \int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{12}$$

(12)式的右端项是代有模数 k 和变量 ϕ 的第一类完全椭圆积分。对于任意给定的 k 值，可以得到一系列的积分结果，列成表格。例如，可见 Peirce B. O 编著的《积分简表》(第四版)，Ginn，1957。为了使用这些表格，必须选择 θ_0 的数值，由方程(9)确定 k。为了确定相应于 θ_0 假定值的轴向载荷 P，可将(12)式重写为如下形式

$$P = \frac{4EI}{L^2}\left[\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\right]^2 \tag{13}$$

为了得到发生在 $x=L/2$ 处的最大挠度，由几何学，有

$$\frac{dy}{ds} = \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \tag{14}$$

由(11)式，可有

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{\alpha dy\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}{d\phi} \tag{15}$$

令(14)和(15)式右端项相等，有

$$-\frac{\alpha dy\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}{d\phi} = 2k(\sin\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$$

或

$$\alpha dy = -2k\sin\phi d\phi \tag{16}$$

积分上式，有

$$\alpha y = 2k\cos\phi + C_2$$

当 $y=0$ 时，$\phi=\pi/2$，由上式得出 $C_2=0$。当 $x=L/2$ 时，$\phi=0$，$y=y_{max}=\Delta$，由上式有 $\alpha\Delta=2k$，或

$$\Delta=\frac{2k}{\alpha}=\frac{2k}{\sqrt{\frac{P}{EI}}}=\frac{kL}{\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}} \tag{17}$$

载荷-挠度关系的计算过程如下：

1. 选定 θ_0 值，利用(9)式计算 k

2. 由数学用表，利用积分 $\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$ 的值(譬如使用 Peirce B.O 给出的数学用表)，然后由(13)式计算相应于选定 θ_0 值的轴向力 P。

3. 由(17)式计算中部挠度 Δ。

对于选定 θ_0 值的相应计算结果列在表 14-1 中，表中的第一行结果 9.87($\approx\pi^2$)说明，如果假设端部初始倾斜是零，那么题 14.1 中讲述的简单理论给出的是精确解。

表 14-1

θ_0 (度)	k	$\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$	$\frac{PL^2}{EL}$	$\frac{\Delta}{L}$
0	0	$\pi/2$	9.87($\approx\pi^2$)	0
40	0.342	1.6200	10.50	0.211
80	0.643	1.7868	12.75	0.360
120	0.866	2.1565	18.56	0.403
160	0.985	3.1534	39.76	0.313

由上述过程画出杆的形变状态如图 14-15 所示。

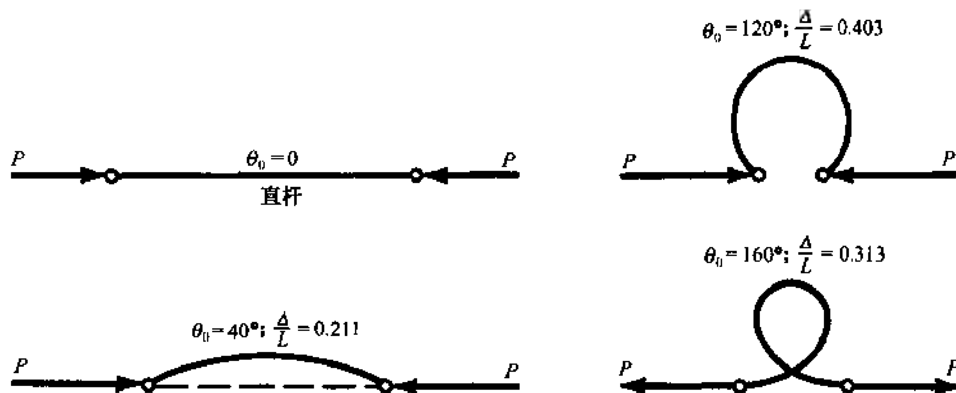


图 14-15

欧拉曾经与 1744 年首次研究了这个问题，弹性挠曲线的形状称为弹性线。只有利用此种较为精确的有限挠曲理论才能确定侧向挠曲的幅值。题 14.1 中介绍的近似小挠度方法无法确定这个量。

题 14.24* 装填在刚性管中的光缆的问题是光缆在某些轴向推力作用下要发生挠曲(纵弯曲)，这种情况如图 14-16(a)所示，可简化为一个具有简支端的细长杆，杆与矩形截面之间的空隙是 Δ。假设在这个刚性管中的光缆的行为是二维的，试研究光缆在轴向压力 P 不断增加时的行为。

解 ☞ 由题 14.1 可知当轴向力 $P=EI/L^2$ 时，杆要挠曲，且在中间未知长度 L_2 的区段内和管壁接触。为使长度为 L_1 的左区段平衡，应有集中力 R 作用在铰链及 $x=L_1$ 处，如图

* 对于莫斯科高等技术学校费奥多谢夫(Feodoseyev. V. I)教授关于本题的建议与讨论，本书作者表示感谢。

14-16(b)所示。在 $x \leq L_1$ 区段内形变杆的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Py = Rx$$

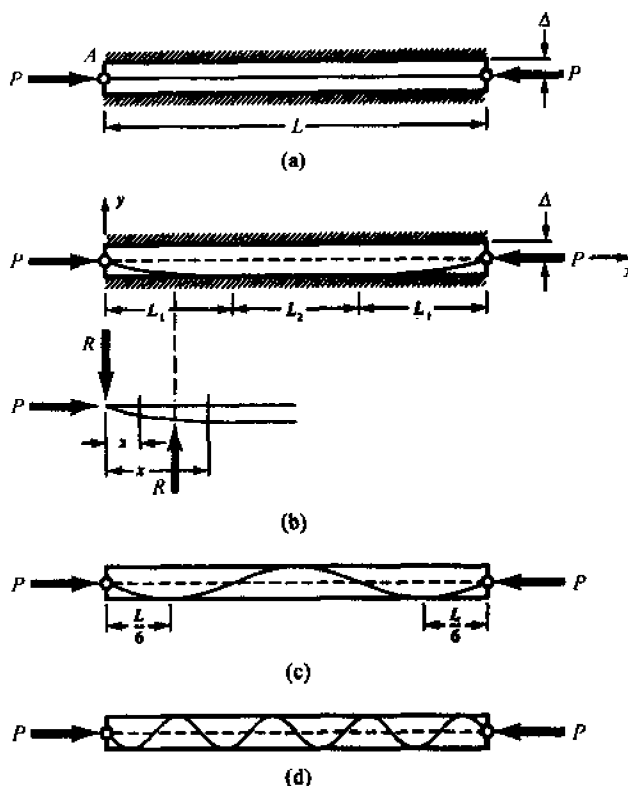


图 14-16

其中横向力 R 必须被认为是通过 A 处的铰链作用在杆上的。上述方程的解答由齐次方程的通解加上非齐次方程的特解共同组成,与题 14.3 相同,即

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{Rx}{P} \tag{1}$$

其中 $\alpha^2 = P/EI$。长度为 L_1 的区段的边界条件是,(a)当 $x=0$ 时,$y=0$;(b)当 $x=L_1$ 时,$y=\Delta$;(c)当 $x=L_1$ 时,还应有 $dy/dx=0$;由条件(a),可有 $B=0$;由条件(b)和(c),可得到,

$$A\sin\alpha L_1 + \frac{R}{P}L_1 = \Delta \tag{2}$$

$$A\alpha\cos\alpha L_1 + \frac{R}{P} = 0 \tag{3}$$

因为形变杆件在 $x=L_1$ 和 $x<(L_1+L_2)$ 之间区段与刚性管接触,在这一区段内光缆是直的;由题 9.1 中的(5)式,可知此段内的弯矩是零。在长度为 L_2 的这一中心区段,梁的欧拉-伯努利方程成为

$$P\Delta - Rx + R(x - L_1) = 0 \tag{4}$$

由此式可解出

$$R = P(\Delta/L_1) \tag{5}$$

由(2)式,得到

$$A\sin\alpha L_1 + \Delta = \Delta \tag{6}$$

于是 $\alpha L_1 = \pi$,由此可知 $\alpha = \pi/L_1$,或 $L_1 = \pi/\alpha$。将(5)式及 $\alpha L_1 = \pi$ 代入(3)式,有

$$A = \frac{\Delta}{\pi} \tag{7}$$

注意到 $\alpha^2 = P/EI$, $\alpha = \pi/L_1$,于是

$$\left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2 = \frac{P}{EI}$$

或

$$P=\frac{\pi^2 EI}{L_1^2} \tag{8}$$ *

当只有杆长 L 的中点与管壁接触时，亦即当 $L_1=L/2$ 时，(8)式变为

$$P=\frac{4\pi^2 EI}{L^2} \tag{9}$$

这指出，当轴向力位于

$$\frac{\pi^2 EI}{L^2}<P<\frac{4\pi^2 EI}{L^2} \tag{10}$$

时，柔韧的光缆只在管道中点，亦即 $x=L/2$ 处与刚性壁接触；只有当 $P>4\pi^2 EL/L^2$ 时，光缆才和管壁在有限的长度上接触，如图 14-16(b)所示。

其次，对于足够大的压力 P，长 L_2 的中央区段也可能屈曲，显然可将之简化为如题 14.3 中的两端固定的柱，当载荷

$$P=\frac{4\pi^2 EI}{L_2^2} \tag{11}$$

时，屈曲成为图 14-16(c)所示的构形。但是，由图 14-16(b)应有

$$2L_1+L_2=L$$

注意到 $L_1=\pi/\alpha$，可有

$$L_2=L-2(\pi/\alpha) \tag{12}$$

如果令(8)式及(11)式的 P 相等，可解出 $L_1=L/4$。对于这个 L_1 值，由(8)式可得到

$$P=\frac{16\pi^2 EI}{L^2} \tag{13}$$

根据与上面类似的分析，可以证明当轴向力超过(13)式给出的数值时，可得到 $L_1=L/6$。相应的构形将保持到轴向载荷

$$P=\frac{36\pi^2 EI}{L^2} \tag{14}$$

为此。更大的轴向载荷将导致图 14-16(d)所示的构形。因而简单的屈曲理论可导致图 14-16 所示的似乎真实的构形。

题 14.25　如图 14-17 所示，两端简支的杆承受轴向压力 P 和横向均布载荷的共同作用。试求其挠曲线。

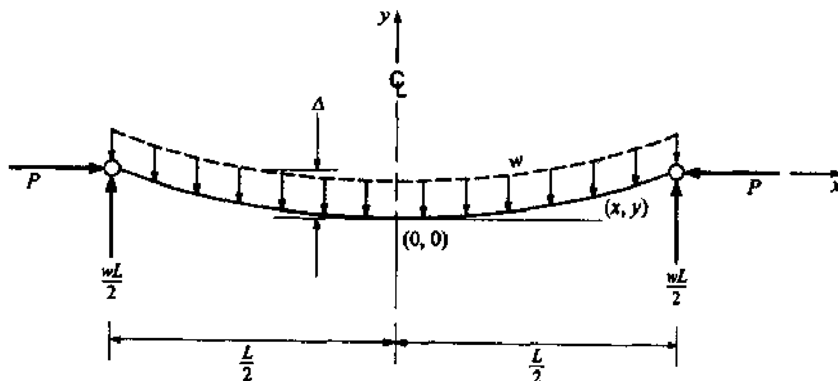


图 14-17

解　☞ 为描述挠曲杆上的点，方便的坐标系如图 14-17 所示，坐标的原点在挠度最大的点处，挠曲杆上任意点(x,y)处的弯矩很轻易地写做(x,y)右侧所有力的矩之和，写时要注意服从弯曲的符号规则(见第 6 章)。

因而，弯矩是

$$M=P(\Delta-y)+\frac{wL}{2}\left(\frac{L}{2}-x\right)-w\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(\frac{L}{2}-x\right)/2 \tag{1}$$

* 原著(4)式～(8)式有多处错误，翻译时作了修改订正。——译者注

于是，挠曲杆的微分方程是

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = P\Delta - Py + \frac{w}{2}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right) \tag{2}$$

如果引入 $n = \sqrt{I/EI}$，可得到非齐次微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right) + n^2\Delta^2$$

用微分方程的通常解法可将上式的全解写作(a)相应齐次方程的解，与(b)非齐次方程任意特解之和，即

$$y = A\cos nx + B\sin nx + \frac{w}{2P}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right) + \frac{2w}{2n^2P} + \Delta$$

式中 A、B 式积分常数。根据对称性，在 $x = L/2$ 处，挠度为 Δ；在 $x = 0$ 处，挠曲线应有水平切线，于是可得到

$$y = \Delta - \frac{w}{n^2P}\left[\left(\sec\frac{nl}{2}\cos nx - 1\right) - n^2\left(\frac{L^2}{8} - \frac{x^2}{2}\right)\right] \tag{3}$$

即为非齐次线性方程的全解。峰值挠度发生在杆的中点(亦即坐标原点)处，且有

$$\Delta = \frac{w}{n^2P}\left[\left(\sec\frac{nl}{2} - 1\right) - \frac{n^2L^2}{8}\right]^*$$

题 14.26 彼此相同的刚性杆 AB 和 BC 在 B、C 处均为铰接，并且用铰链在 A 处和一个只能铅直运动的无摩擦轮相连接。弹簧常数为 K 的弹簧连接在 BC 杆上，如图 14-18(a)所示。试求此系统的临界载荷。

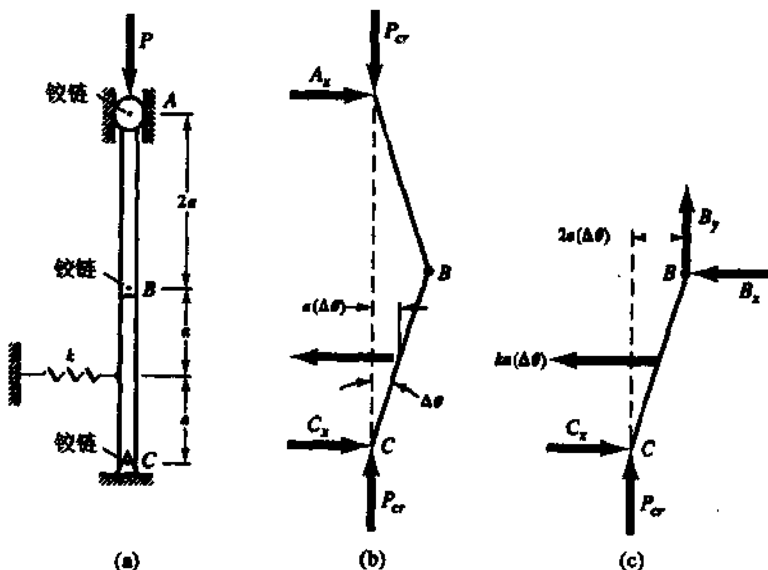


图 14-18

解 由两个刚体组成的系统分离体如图 14-18(b)所示。相应于系统屈曲后的形状，其构形用一个角度 $\Delta\theta$ 来描述。注意到 B、C 处均为铰接，两处均应有两个方向的约束反力。弹簧的伸长量为 $a(\Delta\theta)$，对杆 BC 提供一个拉力 $ka(\Delta\theta)$。对这个分离体来说，B 铰链是内部的，因此不画约束反力。根据静力学，有

$$\sum M_A = C_x(4a) - Ka(\Delta\theta)(3a) = 0$$

$$C_x = \frac{3Ka(\Delta\theta)}{4}$$

其次考虑下杆 BC 的分离体图，如图 14-18(c)所示，此时，B 处铰链传递的力成为外力。由

* 此处前后说法似有矛盾：$x = L/2$，挠度为 Δ，应理解为相对于坐标系统而言，而坐标原点处挠度最大，是相对于杆端而言的。按坐标而言，坐标原点的挠度应为零。此处(3)式的标号是译者加的，此时原文似有错。—— 译者注

静力学，有

$$\sum M_B = \frac{3Ka(\Delta\theta)}{4}(2a) - P_{cr}a(2a\Delta\theta) - [Ka(\Delta\theta)]a = 0$$

解出　$$P_{cr} = \frac{Ka}{4}$$

用此方法，不能确定 $\Delta\theta$。

14.14 习　题

题 14.27 直径 50 mm 的圆截面钢柱，两端铰支、承受轴向压缩。如果材料的比例极限是 210 MPa，$E = 200$ GPa，试求欧拉公式适用的最小长度；若此杆长度即为最小长度时，求欧拉屈曲载荷。（答案：1.21 m，214 kN）

题 14.28 如图 14-19 所示，直径为 25 mm 的圆截面钢柱，两端铰支，向上可自由膨胀 2 mm。在图示位置温度为 16℃，试求此柱屈曲之前允许加热升温至多少度。（已知材料：$\alpha = 12 \times 10^{-6}$1/℃，$E = 200$ GPa，略去自重。）（答案：29.3℃）

题 14.29 如图 14-20 所示，细长杆 AB 的 A 端固定，B 端铰支（不允许有横向位移，但允许绕 B 端转动）。试求此杆屈曲形状的控制方程。（答案：$\tan(nL) = nL$，其中 $n^2 = P/EI$）

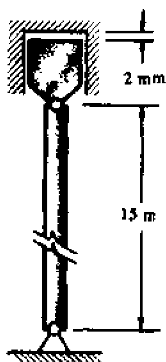


图 14-19



图 14-20

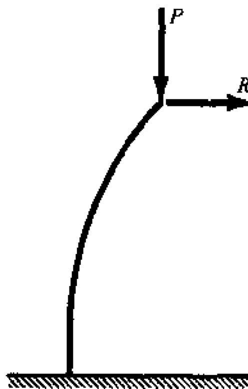


图 14-21

题 14.30 如图 14-21，长度为 L 的柱，下端固定，上端自由且受铅直和水平力的共同作用。铅直力 P 等于欧拉临界载荷的 1/4，试求此柱上端的横向位移。（答案：$16(4-\pi)RL^3/\pi^3EI$）

题 14.31 长度为 L、弯曲刚度为 EI 的杆两端铰支。该杆承受轴向压力为 $P = \pi^2EI/(4L^2)$。若在其一端承受力偶 M 的作用，试求该端的弯曲刚度，即发生 1 弧度转角所需的力偶。如改为承受同样数值的拉力，重解此题。（答案：$2.47EI/L$，$3.47EI/L$）

题 14.32 初始直杆 AC 两端铰支，并在中点 B 处有一支承弹簧，当侧向力$(kEI/L^3)\zeta$ 作用在 B 点时，该点的侧向位移为 δ。若杆的长度为 $2L$，最小弯曲刚度为 EI，现有轴向力 P 施加在 C 端及中点 B 处。无论杆挠曲成什么形状时，B 点处的 P 始终平行于 AC 连线。求此系统的屈曲载荷。（答案：$P_{cr} = \beta^2\frac{EI}{L^2}$，其中 β 为下述方程的最小根 $\frac{\beta}{\tan\beta} = \frac{3k + (9+k)\beta^2 - \beta^4}{3(k-\beta^2)}$）

题 14.33 长度为 L、抗弯刚度为 EI 的细长杆两端支承在弹性介质上，当杆端每转动 1 弧度弹性介质的反力矩增加 λ。试求此杆的第一屈曲载荷。（答案：$\tan\frac{\alpha L}{2} = -\frac{P}{\alpha\lambda}$，其中 $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$）

题 14.34 两端铰支的细长杆放置在弹性地基上，当杆上任意一点发生横向位移 y 时，弹性支承将产生阻抗力 ky，试求此杆轴向屈曲载荷。（答案：$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2}(n^2 + \frac{kL^4}{n^2\pi^4EI})$ 其中 n 取使 P_{cr} 最小时的整数）

题 14.35 已知截面为 W10×54 的柱，长度为 22 ft，材料的屈服点为 34000 lbf/in²，$E = 30 \times 10^6$lbf/in，试利用 AISC 公式，求许可的轴向载荷。（答案：197250 lbf）

题 14.36 已知截面为 W254×79 的柱，长度为 14 m，材料的屈服点为 250 MPa，E = 200 GPa，试利用 AISC 公式，求许可的轴向载荷。（答案：226500 N）

题 14.37　已知截面为 W12×25 的两端铰支柱，长度为 30 ft，材料的屈服点为 36000lbf/in^2，E = 30×10^{6}lbf/in^2。试用题 14.17 中的 FORTRAN 程序，求基于 AISC 规定的许可轴向应力和轴向载荷。（答案：2340lbf/in^2，17280 lbf）

题 14.38　已知截面为 W254×79 的两端铰支柱，长度为 14 m，材料的屈服点为 250 MPa，E = 200 GPa。试用题 14.17 中的 FORTRAN 程序，求基于 AISC 规定的许可轴向应力和轴向载荷。（答案：22.2 MPa，226 kN）

题 14.39　已知截面为 W203×28 两端铰支柱，长度为 9 m，材料的屈服点为 250 MPa，E = 200 GPa，试用题 14.20 中的 FORTRAN 程序，求由 SSRC 方程给出的极近坍塌轴向应力和轴向载荷。（答案：21.7 MPa，78.2 kN）

题 14.40　已知截面为 W10×54 的两端铰支柱，长度为 22 ft，材料的屈服点为 34000 lbf/in^2，E = 30×10^6 lbf/in^2。试用试 14.20 中的 FORTRAN 程序，求由 SSRC 方程给出的极近，坍塌轴向应力和轴向载荷。（答案：18200lbf/in^2，289000 lbf）。

题 14.41　两端铰支杆件承受轴向压缩与中部横向载荷的共同作用，如图 14-22。试求挠曲线方程。

（答案：$y = \dfrac{Q\sin nx}{2Pn\cos\dfrac{nl}{2}} - \dfrac{Q}{2P}x$，式中 $n = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$）

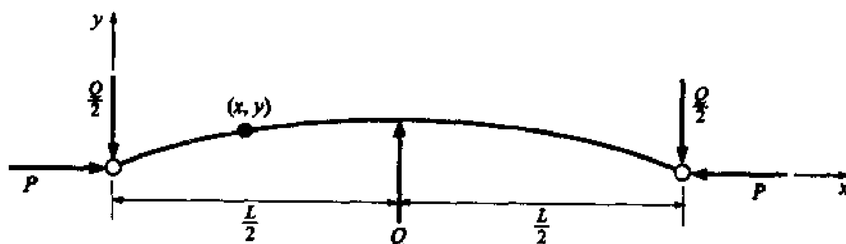


图 14-22

题 14.42　两端铰支、弯曲刚度为 EI 的杆同时受到两个横向力及轴向压缩载荷的共同作用，如图 14-23。每一个横向力等于欧拉轴向屈曲载荷的 1/4，轴向力等于欧拉轴向屈曲载荷的 1/2。试求最大的横向挠度。（答案：0.008L）

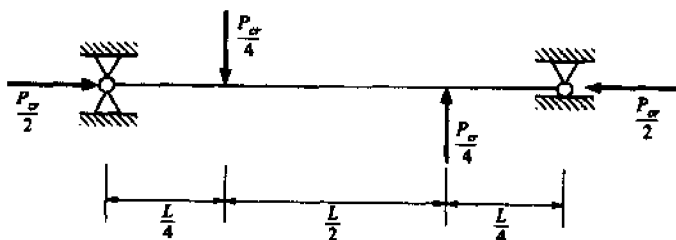


图 14-23

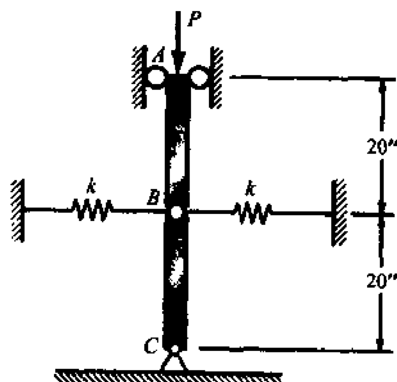


图 14-24

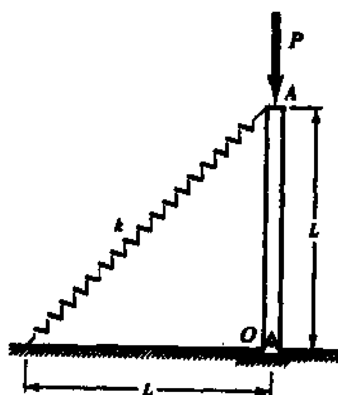


图 14-25

题 14.43 如图 14-24，两个刚性杆 AB 和 BC 组成的系统，在 C 处是铰接的，在 A 处限制横向移动，但可自由转动。系统在 B 点处也是铰接的，并由两个线性弹簧约束 B 点的水平位移，每个弹簧的劲度系数为 k lbf/in，系统处于图示位置施加 P 力时弹簧是自由的。试求屈曲载荷 P_{cr}。（答案：$P_{cr}=12k$）

题 14.44 如图 14-25 所示，刚性杆 OA 的下端铰接在 O 处，上端 A 处承受铅直力 P 作用，同时用一个劲度系数为 k 的弹簧将 A 点和地面连接。当 OA 杆铅直时，弹簧是不受力的，略去各构件的重量。试求系统失稳时的载荷 P。（答案：$kL/2$）

题 14.45 如图 14-26 所示，拉线钢桅杆 AB 在 A 处铰接，并用由两根拉线 BC 和 BD 组成的平面系统支撑。桅杆 AB 的惯性矩是 3.00 in^4，高度是 50 in，材料的弹性模量是 30×10^6 lbf/in^2。拉线是由铝制成的，弹性模量为 10×10^6 lbf/in^2，截面积为 0.1 in^2。桅杆在 B 处承担铅直载荷作用，试求屈曲载荷。（提示：必须考虑桅杆绕 A 点的刚体转动，形成 AB' 构形；还要考虑桅杆被弯曲成单波正弦曲线时的欧拉屈曲载荷。）（答案：$P=35000$ lbf）

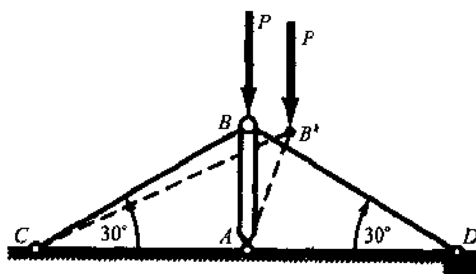


图 14-26

第 15 章　应变能法

到目前为止，本书讨论了求解形变和待定约束反力的各种方法，这些方法基本上是依赖于几何考虑。然而，尚有很多问题，能通过另外一些方法更有效地求解，这些方法是以外力功和形变过程中储存于物体内部的应变能之间的关系为基础的，本章将讨论这些方法。与各种几何方法相比，有时这些方法将是更普遍和更有效的。

15.1　内部应变能

当外力作用在弹性体上，且弹性体发生形变时，由外力所作的功以应变能的形式储存在物体内部。应变能永远是一个标量。对于承受轴向拉伸的直杆，内部应变能由下式给出：

$$U = \frac{P^2 L}{2AE}$$

式中，L 是杆的长度，A 是截面积，E 是杨氏模量。这个公式将在题 15.1 中导出。

对于长度为 L、承受扭矩 T 的圆截面杆，内部应变能 U 是

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ}$$

式中 G 为剪切模量，J 是截面的极惯性矩，此公式将在题 15.2 中导出。

长度为 L，承受弯矩 M 的梁，内部的应变能 U 为

$$U = \frac{M^2 L}{2EI}$$

式中 I 为截面关于中性轴的惯性矩，此公式将在题 15.3 中导出。

要指出的是，在上述公式中外载荷全部都是平方项，因此内部应变能永远是正标量。

15.2　符号规则

应变能法特别适合于含有几个构件、且各构件彼此成各种角度的那些问题。即使是一些平面弯曲构件，也不会增加另外的困难。应变能法最大的优点之一，是对每一个构件均可选一个独立的坐标系统，而不必考虑各坐标系正向之间的相容性。这个优点来源于应变能永远是正标量的事实，因此外力的代数符号只要求在每个构件的内部相容即可。

15.3　卡斯提良诺定理

这个定理对于求受轴向扭转、弯曲，甚至是组合载荷时弹性体的位移特别有用。定理叙述如下：全部应变能相对于任何一个外载荷的偏导数，等于载荷作用点处，沿载荷作用方向的位移。此处，所使用的“力”与“位移”都具有广义的意义，即可以是通常所说的力和线位移，也可以是力偶和相应的角位移。根据这个定理，力 P_n 作用点处的位移可表示为如下的方程形式：

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n}$$

此定理将在题 15.8 中导出。

15.4 应变能法应用于静定问题

在这一类问题中，所有的外部约束反力均可应用静力学方程解出。此后，任一外力施加点处的位移可直接由卡斯提良诺(Castigliano's)定理(以下简称卡氏定理——译者注)解出，这将在题 15.9 和题 15.10 中讲述。如果欲求某个无力作用点处的位移，在该点处就必须引入一个辅助(亦即虚拟)力，将之视为实际的力，用卡氏定理去求该点处的位移，此后再令辅助力等于零。这将在题 15.9、题 15.12、题 15.13 和题 15.19 中讲述。

15.5 应变能法应用于超静定问题

卡氏定理对于求解超静定问题的超静定反力也是非常有用的，这是因为卡氏定理可用于每一个反力，并且相应的位移事先都是已知的，通常应等于零。在这种意义下，总可建立起数目与赘余反力相等的方程。这些方程和静力学方程共同求解，即可解出所有的反力。待所有的反力解出之后，就可以直接应用卡氏定理计算任意待求点的位移。这将在题 15.16 和 15.18 中讲述。

15.6 假设与限制

本章自始至终假设材料是线性的，是服从胡克定律的。继而还要求，整个系统服从叠加原理。这就意味着，某些特殊的系统、如在题 1.17 中讨论的系统就不能用本章讨论的方法求解。

15.7 例 题

题 15.1 弹性杆承受轴向拉力 P 的作用，如图 15-1(a)所示。试求其内部应变能。

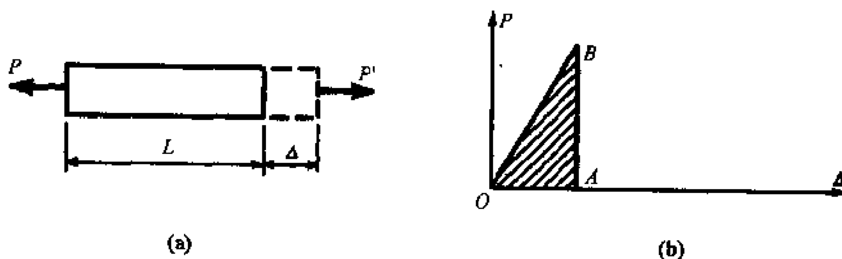


图 15-1

解 在题 1.1 中曾解出此杆的伸长 $\Delta = PL/AE$，其中 A 表示截面积，L 是杆长，E 是杨氏模量。力-形变图将是线性的，如图 15-1(b)所示。对于力 P 的任一个指定值，如力-形变图中相应的 B 点、应力所作的功等于图中阴影三角形 OBA 的面积。此三角形的面积等于 $P\Delta/2$，将其中的 Δ 用 (PL/AE) 替换，可得到 $P^2L/(2AE)$。这就是外力完成的功，此功以应变能的形式储存于杆的内部，记作 U。因而

$$U = \frac{P^2L}{2AE}$$

实质上，弹性杆相当于一个储存能量的弹簧。如果载荷是压缩的，仍可应用同样的公式，因为轴向力是作为平方项出现的。因此，对于正力和负力，最后的结果应该是相同的。

如果轴向力 P 沿杆长是变化的，那么在杆的长度 dx 的单元体内，应变能是

$$dU = \frac{P^2dx}{2AE}$$

整杆中的应变能应由下述积分给出，

$$U=\int_0^L \frac{P^2 dx}{2AE}$$

题 15.2　如图 15-2(a)所示，弹性杆承受扭矩 T 作用。试求其应变能。

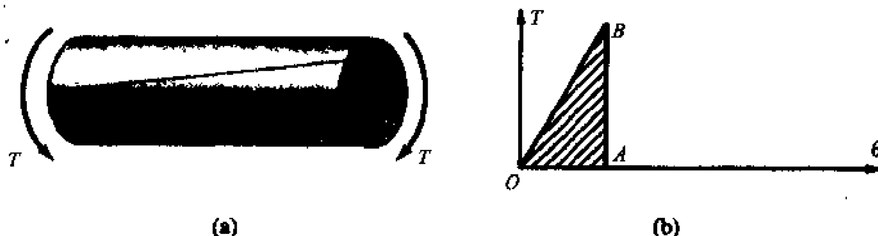


图 15-2

解 ☞ 由题 5.3 可知，扭转角 $\theta=TL/GJ$，其中 G 为剪切模量，L 为长度，J 为截面的极惯性矩。根据这个公式，扭矩和扭转角之间应是线性关系，如图 15-2(b)所示。当扭矩达到某个指定值，如图中 B 点之后，所作的正功将由阴影面积 OBA 表示。这个三角形的面积为 $T\theta/2$，或 $T^2L/2GJ$。这功由外部扭转力偶完成，并以内部应变能的形式储存在杆中，记作 U。因而

$$U=\frac{T^2L}{2GJ}$$

如果扭矩 T 沿杆长是变化的，那么在长 dx 的单元体内的应变能是

$$dU=\frac{T^2 dx}{2GJ}$$

整杆内的应变能为

$$U=\int_0^L \frac{T^2 dx}{2GJ}$$

题 15.3　承受弯矩 M 作用的纯弯曲弹性杆，试求其内部应变能。

解 ☞ 由题 8.1 可知，初始的直杆，承受纯弯矩 M 作用之后，将变为曲率半径为 ρ 的圆弧，在该题的(7)式中，曾得到 $M=EI/\rho$，其中 I 是截面关于中性轴的惯性矩。但是杆长 L 等于圆弧对应的中心角 θ 和半径 ρ 的乘积，于是

$$\frac{M}{EI}=\frac{1}{\rho}=\frac{\theta}{L},\quad 或\quad \theta=\frac{ML}{EI}$$

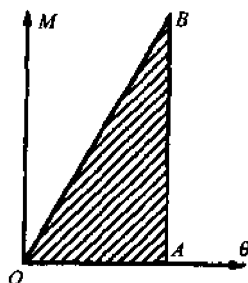


图 15-3

亦即弯矩和圆弧对应角之间的关系是线性的，如图 15-3 所示。当弯矩达到某个指定值，如图中 B 点所士的，M 所作的功为阴影三角形 OAB 的面积。这个面积为 $M\theta/2$、或 $M^2L/(2EI)$，这个功由外部力偶完成，且作为内部应变能储存在杆内，记作 U，因此

$$U=\frac{M^2L}{2EI}$$

如果弯矩 M 沿杆长是变化的，那么在长 dx 的单元体内的应变能力为

$$dU=\frac{M^2 dx}{2EI}$$

于是整杆的应变能为

$$U=\int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

题 15.4　考虑如图 15-4 所示的两个简支梁。两梁的截面为等宽度的矩形，材料也是相同的。第一梁(图 15-4(a))截面的高度沿全长为常数，第二梁(图 15-4(b))在其中部有一个小缺口，该缺口削减梁高度的 1/5，缺口沿梁轴的长度被略去不计。由于中点力 P 的作用，每一个梁中的最大应力都等于材料的屈服极限。若略去应力集中的影响，试求两梁中应变能的比值。

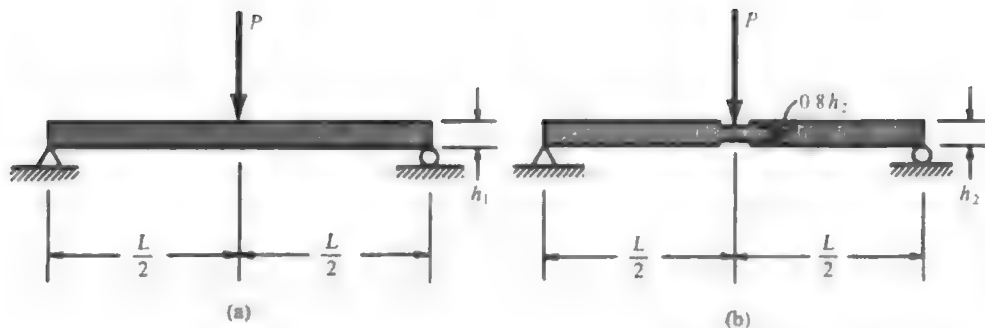


图 15-4

解 ☞ 对于第一梁,截面模量为

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{bh_1^3/12}{0.5h_1} = 0.167h_1^2b$$

对于第二个梁,缺口处的截面模量为

$$Z = \frac{I}{c} = \frac{b(0.8h_2)^3/12}{0.4h_2} = 0.107h_2^2b$$

而在截面高度为 h_2 的区段,截面模量为 $z = \frac{I}{c} = \frac{b(h_2)^3/12}{0.5h_2} = 0.167h_2^2b$ 通常,梁外层纤维的弯曲应力为 $\sigma = M/Z$,注意到两个梁中的最大应力是相等的,应有

$$0.167h_1^2b = 0.107h_2^2b \qquad 或 \qquad h_2 = 1.25h_1$$

考虑到弯矩沿梁长是变化的,写出两梁[0 L/2]区间内的弯矩表达式*

$$M = Px/2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant L/2)$$

根据对称性,可知第一个梁的应变能为

$$U_1 = 2\int_0^{L/2} \frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI_1} = \frac{P^2}{4EI_1}\int_0^{L/2} x^2\mathrm{d}x = \frac{P^2L^3}{96EI_1} = \frac{P^2L^3}{8Ebh_1^3}$$

第二个梁的应变能为(略去缺口长度)

$$U_2 = 2\int_0^{L/2} \frac{M^2\mathrm{d}x}{2EI_2} = \frac{P^2L^3}{96EI_2} = \frac{P^2L^3}{8Ebh_2^3} = \frac{P^2L^3}{8Eb(1.25h_1)^3}$$

两梁中应变能的比值

$$U_2 : U_1 = 0.512$$

这表示,缺口梁很不适于储存内部应变能。对于设计承受动载荷作用的杆,这是一个很重要的结论。

题 15.5 如图 15-5 所示,等截面铅直杆在其下端有一个凸缘,重物 W 自杆的顶部释放后,自由下落打击在凸缘上。试求最大的伸长形变和最大应力。

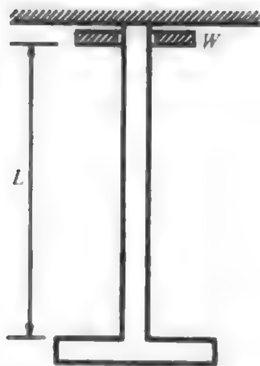


图 15-5

解 ☞ 为了求解这个问题,引入几个简化假定:(a)铅直杆的重量与 W 相比是很小的,(b)没有由于摩擦和局部形变引起的能量损失,(c)材料承受动载荷时的应力-应变图与静载荷时相同。实际上,更精确的分析应考虑应变波在杆内的传播,但是那已经超出了当前的研究范围。

重物 W 下落距离 L,然后打击在凸缘上,致使杆件产生未知的伸长 Δ。在最大的伸长位置时,杆中的拉伸是最大的,由 W 所做的功和最大形变位置的拉伸应变能之间的关系是

$$W(L+\Delta) = \frac{P^2L}{2AE} \qquad (1)$$

* 此题自此处开始有原则错误,作者误使用 $M = \mathrm{const}$。的公式。因此以下部分为译者改写。——译者注

注意到 $\Delta = PL/AE$，将之代入(1)式，消去其中的 P，有

$$W(L+\Delta) = \frac{AE\Delta^2}{2L} \tag{2}$$

此杆由于重力 W 产生的静力伸长是 $\Delta_{st} = WL/AE$。由此式中解出 W，将之代入(2)式，可以得到求解未知伸长量 Δ 的二次方程，解此方程可以得到

$$\Delta = \Delta_{st} + \sqrt{\Delta_{st}^2 + \frac{\Delta_{st}}{g}v^2} \tag{3}$$

式中 g 是重力加速度，$v = \sqrt{2gL}$ 是重物打击凸缘时的速度。如果杆的长度 L 和 Δ_{st} 相比是很长的，上述表达式将变成如下的近似形成：

$$\Delta = \sqrt{\frac{\Delta_{st}}{g}v^2} \tag{4}$$

在这种情况下，轴向应力由下式给出：

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{\Delta E}{L} = \frac{E}{L}\sqrt{\frac{\Delta_{st}}{g}v^2} = \sqrt{\frac{Wv^2}{2g}\frac{2E}{AL}} \tag{5}$$

注意到有趣的是，在动力情况，杆中的应力和长度 L 及杨氏模量 E 有关，相应的静应力中并不包含这些因素。对于突加载荷 W 作用在凸缘情况，应令(3)式中重物下落的高度 L 为零，于是可得到

$$\Delta = 2\Delta_{st} \tag{6}$$

因而可知，对于这个特定的问题，突加载荷产生的位移等于缓慢加载产生位移的 2 倍。

题 15.6　悬臂梁在其一端受到自高度 h 处自由下落重物 W 的冲击，如图 15-6。略去梁的自重，试求打击端处的总挠度。

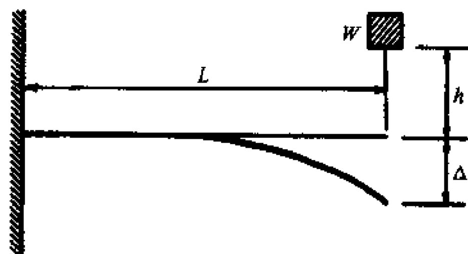


图 15-6

解 ☞ 重物冲击使梁挠曲达到最大值时，重物所作的功为

$$W(h+\Delta) \tag{1}$$

如果令 P 表示峰值挠曲时重物对梁的冲击力，那么梁中的应变能为 $P\Delta/2$，且外力所作的功将立刻以内部应变能的形式储存在梁内，于是

$$W(h+\Delta) = P\Delta/2 \tag{2}$$

或

$$P = \frac{2W}{\Delta}(h+\Delta) \tag{3}$$

由题 9.2 可知，如果此力 P 作用在悬臂梁的自由端，该端的挠度为

$$\Delta = \left[\frac{2W}{\Delta}(h+\Delta)\right]\frac{L^3}{3EI} \tag{4}$$

其中 I 为截面关于中性轴的惯性矩。然而，作为静载施加时，重物 W 产生的挠度是

$$\Delta_{st} = \frac{WL^3}{3EI} \tag{5}$$

由此解出 W，代入(4)式，该式将变成

$$\Delta^2 - 2\Delta_{st}\Delta - 2h\Delta_{st} = 0 \tag{6}$$

解出

$$\Delta = \Delta_{st} + \sqrt{\Delta_{st}^2 + 2h\Delta_{st}} \tag{7}$$

此处只取了可以得到最大挠度的正平方根。对于突加载荷于自由端的特殊情况，即 $h=0$；由(7)式可给出 $\Delta=2\Delta_{st}$。恰如题 15.5 中的情况，突加载荷产生的挠度等于缓慢加载产生挠度的 2 倍。

题 15.7 简支梁的中点受到重物 $W=1\mathrm{kN}$ 的冲击，该重物系由梁上方 $h=100\mathrm{mm}$ 处自由下落的。梁长 5m，截面为直径 100mm 的圆形，材料的 $E=200\mathrm{GPa}$。试求梁的最大挠度。

解 ☞ 重物下落，使梁中点产生最大挠度 Δ 时所作的功为

$$W(h+\Delta) \tag{1}$$

如果令 P 表示重物在最大挠度瞬时作用在梁上的力，那么梁中的应变能为 $P\Delta/2$。于是

$$P\Delta/2 = W(h+\Delta) \tag{2}$$

或

$$P = \frac{2W(h+\Delta)}{\Delta} \tag{3}$$

注意到在题 9.12 中给出的简支梁承受中点集中力作用，中点处的挠度为

$$\Delta = \frac{PL^3}{48EI} \tag{4}$$

将(3)式的 P 代入(4)式，有

$$\Delta = \frac{2W(h+\Delta)}{\Delta}\frac{L^3}{48EI} \tag{5}$$

但是，与 W 相应的静挠度为 $\Delta_{st}=WL^3/(48EI)$，由此式解出 W 代入(5)式，得到

$$\Delta^2 - 2\Delta_{st}\Delta - 2h\Delta_{st} = 0 \tag{6}$$

可解出

$$\Delta = \Delta_{st} + \sqrt{\Delta_{st}^2 + 2h\Delta_{st}} \tag{7}$$

对于本题所考虑的梁

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = 4.9\times 10^6\mathrm{mm}^4$$

当静挠度

$$\Delta_{st} = \frac{(1000)(5)^3(10^3)^3}{48(200\times 10^9\times 10^{-6})(4.9\times 10^6)} = 2.66(\mathrm{mm})$$

由(7)式可解出最大挠度为

$$\Delta = 2.66 + \sqrt{(2.66)^2 + 2(100)(2.60)} = 25.9(\mathrm{mm})$$

题 15.8 导出卡斯提良诺定理

解 ☞ 考虑一般的承受力 $P_1, P_2, \cdots$ 的三维弹性体，如图 15-7。用 Δ_1 表示 P_1 作用下沿 P_1 方

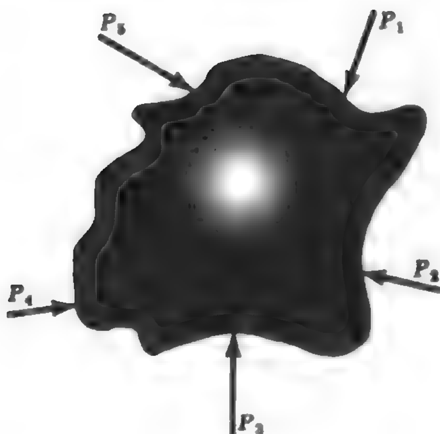


图 15-7

向的位移，Δ_2 表示 P_2 作用下沿 P_2 方向的位移，其余以此类推。假定所有的力都是同时施加的，并且缓慢地增加到给定的数值 $P_1, P_2, \cdots$，于是由所有的力完成的功为

$$U = \frac{P_1}{2}\Delta_1 + \frac{P_2}{2}\Delta_2 + \frac{P_3}{2}\Delta_3 + \cdots \tag{1}$$

此功将以弹性应变能的形式储存于物体内。

现令第 n 个力增加 dP_n，这将会引起形变状态和应变能的增量。应变能的增量为

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \tag{2}$$

第 n 个力发生增量之后，应变能是

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \tag{3}$$

现在我们重新考虑这个问题，改变原来的加载顺序，先加很小的力 dP_n 在弹性体上，然后再施加与先前相同的力 P_1、P_2、…。由于施加 dP_n 将产生一个沿 dP_n 方向的无穷小位移，记作 $d\Delta_n$。当再施加 P_1、P_2、…时，它们对物体的影响不会因有 dP_n 的存在而发生改变，由 P_1、P_2、…产生的应变能仍如(1)式所示。但是当这些力施加时，小力 dP_n 要移动一个附加的位移 Δ_n，这位移是由 P_1、P_2、P_3、…等力产生的。于是产生一个附加功 $(dP_n)\Delta_n$，也将以应变能的形式储存在弹性体内，亦即此时总的应变能为

$$U + (dP_n)\Delta_n \tag{4}$$

最终的应变能与加载顺序无关，亦即(3)式与(4)式应相等，

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n = U + (dP_n)\Delta_n$$

或

$$\Delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} \tag{5}$$

此即为卡斯提良诺定理。亦即，弹性体在任意力施加点处，沿加力方向的位移等于总的应变能对该力的偏导数。在题 15.1、题 15.2 和题 15.3 中已经分别给出轴向、扭转和弯曲加载时应变能 U 的方程，在这些问题中替代应用积分形式方程，通常更方便的是带着积分号去作微分运算，对于承受轴向、扭转和弯曲组合形变的物体，可得到与 P_n 相应的位移为

$$\Delta_n = \int \frac{P(\partial P/\partial P_n)ds}{AE} + \int \frac{T(\partial T/\partial P_n)ds}{GJ} + \int \frac{M(\partial M/\partial P_n)ds}{EI}$$

对于由有限个弹性子物体组成的物体，这些积分将会被有限求和所代替，这将在题 15.9 中讲述。

此处的术语“力”应理解为最广义的，可以是力、也可以是力偶。对于力偶作用的情况，卡氏定理给出的是力偶施加点处、在力偶转动方向上的角位移。

注意到如下一点是很重要的，亦即，上述的导数是对第 n 个力 P_n 计算的，与其他力没有关系。因而，这要求 P_n 必须是与其他外力静力无关的，这就意味着能量 U 总是用系统内静力无关的力来表示。显然，静定的约束反力不能被认为是静力无关的力。

题 15.9　如图 15-8 所示，杆 AB 和 CB 在 A、C 和 B 处是铰接的，并在 B 处承受水平力 P 的作用。利用卡氏定理求 B 点的水平与铅直位移。

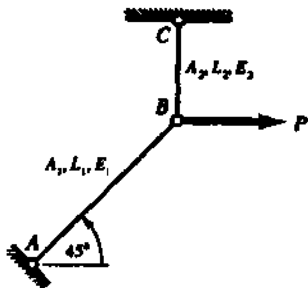


图 15-8

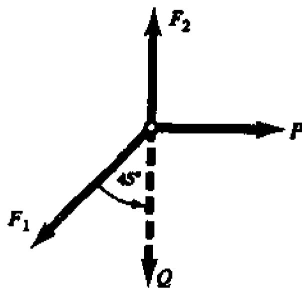


图 15-9

解　为了应用卡氏定理，在 B 处必须有与所求位移一致的力。因为实际的力 P 沿水平方向作用，还必须在 B 点出引入一个铅直的辅助(虚拟)力 Q。于是 B 点分离体图如图 15-9 所示。平衡方程有

$$\sum F_x = P - F_1\sin45^\circ = 0,\quad 于是\ F_1 = P\sqrt{2} \tag{1}$$

$$\sum F_y = F_2 - Q - F_1\cos45^\circ = 0,\quad 于是\ F_2 = P + Q \tag{2}$$

将卡氏定理应用于杆系结构,有

$$\Delta_x = \sum_{i=1,2}\frac{F_i(\partial F_i/\partial P)L_i}{A_iE_i},\qquad \Delta_y = \sum_{i=1,2}\frac{F_i(\partial F_i/\partial Q)L_i}{A_iE_i} \tag{3}$$

对于已求得的各杆内力,有

$$F_1 = P\sqrt{2},\quad \partial F_1/\partial P = \sqrt{2},\quad \partial F_1/\partial Q = 0$$

$$F_2 = P + Q,\quad \partial F_2/\partial P = 1,\quad \partial F_2/\partial Q = 1$$

现在,已经求得相应于 P、Q 的偏导数,可令 $Q=0$。将以上各有关数据代入(3)式,有

$$\Delta_x = \frac{(P\sqrt{2})(\sqrt{2})L_1}{A_1E_1} + \frac{(P)(1)L_2}{A_2E_2} = \frac{2PL_1}{A_1E_1} + \frac{PL_2}{A_2E_2}$$

$$\Delta_y = \frac{(P\sqrt{2})(0)L_1}{A_1E_1} + \frac{(P)(1)L_2}{A_2E_2} = \frac{PL_2}{A_2E_2}$$

此结果与题1.12中用几何方法得到的结果一致。

题 15.10 如图15-10所示的系统,水平杆 CDF 的弯曲刚度为 EI_1、扭矩刚度为 GJ_1;杆 CDF 在 D 处与弯曲刚度 EI_2 的 DB 杆牢固地焊接在一起,在 B 处水平杆 DB 又和铅直杆 AB 铰接在一起,AB 杆的截面积为 A、杨氏模量为 E。C 处的支承只允许在 xy 平面内绕 Z 轴转动,F 端限制绕 x 轴的转动、只允许在铅直方向挠曲。试求由于平行于 y 轴的 P 力的作用,F 处的铅直挠度。

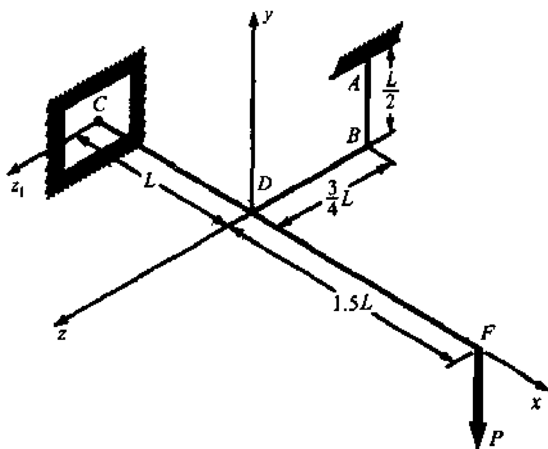


图 15-10

解 杆 CD 及 DB 的分离体图如图15-11所示,图中 R_c 是 C 处的铅直反力,S 是 AB 杆的轴向力。关于 z_1 轴的转动平衡方程为

$$\sum M_{z1} = S(L) - P(2.5L) = 0,\quad 解出\ S = 2.5P$$

y 方向的平衡方程

$$-R_c - P + S = 0,\qquad 解出\ R_C = 1.5P$$

引入变量 u、v 和 w,如图15-11所示,用以表示系统内 FD、CD 和 BD 区段内点的位置。各区段内的弯矩和扭矩由以下各式表示:

FD 区段:$M = Pu,\quad \partial M/\partial P = u$

CD 区段:$M = R_Cv = 1.5Pv,\quad \partial M/\partial P = 1.5v$

CDF 区段:$T = S(3L/4) = (2.5P)(3L/4) = 15PL/8$

BD 区段:$M = Sw = (2.5P)w,\quad \partial M/\partial P = 2.5w$

根据卡氏定理,总应变能对 P 的偏导数等于 F 点处的挠度。注意到 FD、CD 和 BD 区段内的弯矩、CDF 区段的扭矩及 AB 杆的轴力,这位移将是

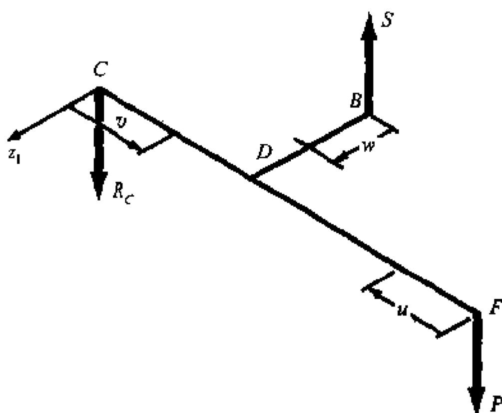


图 15-11

$$\Delta_F = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M(\partial M/\partial P)\mathrm{d}s}{EI} + \frac{T(\partial T/\partial P)(2.5L)}{GJ} + \frac{S(\partial S/\partial P)(L/2)}{AE}$$

（积分区段依次标注为 FD、CD、BD；CDF；AB）

式中 s 是用作积分变量的长度坐标，积分上面圆圈内的字母表示积分的区段。在 CDF 区段扭矩为正常数，在 AB 区段上轴力是常数，勿需积分即可得到相应载荷的应变能。将弯矩、扭矩和轴力的上述数值代入上式，得到

$$\Delta_F = \int_0^{1.5L} \frac{(Pu)(u)\mathrm{d}u}{EI_1} + \int_0^{L} \frac{(1.5Pv)(1.5v)\mathrm{d}v}{EI_1} + \int_0^{3L/4} \frac{(2.5Pw)(2.5w)\mathrm{d}w}{EI_2}$$

（各项区段依次标注为 FD、CD、BD）

$$+ \frac{(15PL/8)(15L/8)(2.5L)}{GJ_1} + \frac{(2.5P)(2.5)(L/2)}{AE}$$

（各项区段依次标注为 CDF、AB）

$$= 1.875\frac{PL^3}{EI_1} + 0.879\frac{PL^3}{EI_2} + 8.79\frac{PL^3}{GJ_1} + 3.13\frac{PL}{AE}$$

题 15.11　如图 15-12 所示的铰接框架结构。水平刚性横梁 BC 由完全相同的两杆 AB 和 AC 悬挂，下面又和两根稍短些的杆 BD 和 DC 相联，这四根杆的截面积均为 A、弹性模量均为 E。在 D 点受到铅直载荷 P 作用，试求 D 点的铅直位移。

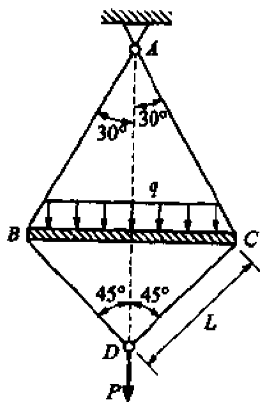


图 15-12

解　此题曾在题 1.11 中用包括位移几何关系的方法求解过，现在用卡氏定理求解。在题 1.11 中由静力学已经解出各杆的内力，

$$F_{DB} = F_{DC} = \frac{P\sqrt{2}}{2},$$

$$F_{AB} = F_{AC} = \frac{P + \sqrt{2}qL}{\sqrt{3}}$$

根据卡氏定理，D 点沿力 P 方向的位移是

$$\Delta_D = \sum \frac{S(\partial S/\partial P)L}{AE}$$

代入有关的数据，有

$$\overset{(BD)\ (DC)}{}\qquad\qquad\overset{(AB)\quad(AC)}{}$$

$$\begin{aligned}\Delta_D &= 2\left\{\frac{(P\sqrt{2}/2)(\sqrt{2}/2)L}{AE}\right\} + 2\left\{\frac{(P+\sqrt{2}qL)(1/\sqrt{3})(\sqrt{2}L)}{AE}\right\}\\ &= 1.942\frac{PL}{AE} + 1.333\frac{qL^2}{AE}\end{aligned}$$

此结果与在题 1.11 中用几何方法得到的结果是一致的。

题 15.12 结构为 1/4 的细圆环，圆环的半径为 R。该圆环一端是固定的，另一端承受铅直力 P 的作用(见图 15-13)。试求力 P 作用点的铅直位移(只考虑弯曲应变能)。

解 ☞ 由静力学可知，固定端的约束反力包括一个铅直力 P 及一个力偶。用幅角 θ 确定的圆环截面内的弯矩为 $M = PR - P(R - R\cos\theta) = PR\cos\theta$，由此给出 $\partial M/\partial P = R\cos\theta$。

根据卡氏定理，A 点的铅直位移为

$$\Delta_v = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^{\pi/2}\frac{M(\partial M/\partial P)R\mathrm{d}\theta}{EI} = \int_0^{\pi/2}\frac{(PR\cos\theta)(R\cos\theta)R\mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{P\pi R^3}{4EI}$$

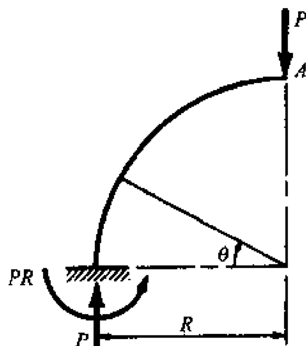


图 15-13

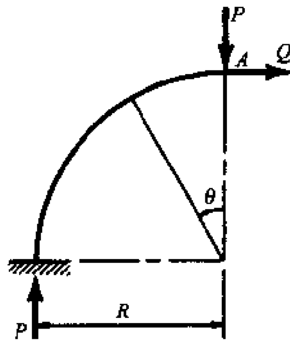


图 15-14

题 5.13 求题 5.12 中 A 点的水平位移。

解 ☞ 因为 A 点没有水平力，为了使用卡氏定理，必须暂时引入一个辅助力 Q，如图 15-14 所示。此题幅角由铅直方向计起，可不必计算 B 处的约束反力。于是在 θ 表示的截面处，弯矩为 $M = PR\sin\theta + Q(R - R\cos\theta)$，由此给出 $\partial M/\partial Q = R - R\cos\theta$。$A$ 点的水平位移为

$$\Delta_h = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^{\pi/2}\frac{M(\partial M/\partial Q)R\mathrm{d}\theta}{EI}$$

计算偏导数之后，可令 $Q = 0$，给出

$$\Delta_h = \int_0^{\pi/2}\frac{(PR\sin\theta)(R - R\cos\theta)R\mathrm{d}\theta}{EI} = \frac{PR^3}{2EI}$$

题 15.14 如图 15-15 所示，位于 xz 平面内的 1/4 圆环 OA 在 A 端和直杆 AB 刚性联接在一起，自由端 B 受到一个扭转力偶的作用，表示该力偶的双矢量 T_B 与 x 轴平行。已知 1/4 圆环 OA 和直杆 AB 的弯曲刚度 EI、扭转刚度 GJ。试求 B 点位移的 y 向分量。

解 ☞ 为能使用卡氏定理，必须引入与所求位移同向的辅助(虚拟)力 Q，亦即 Q 平行于 y 轴，指向下方。给定系统自 y 正向的俯视图如 15-16 所示(位于 xz 平面之内)，其中 n-n 和 t-t 分别表示圆环任意点处(用 θ 角表示)圆环的法线和切线。在这个图中，施加的转矩 T_B 表示为沿 n-n 和 t-t 方向的分量。附加力 Q 用 B 处的"⊗"表示，表示 Q 力的方向是向下的。由图 15-16，在直杆段 BA，可有

$$\begin{aligned} M &= Qu, &\quad \partial M/\partial Q &= u\\ T &= T_B, &\quad \partial T/\partial Q &= 0\end{aligned}$$

在 1/4 圆环内，由图形的几何条件，给出

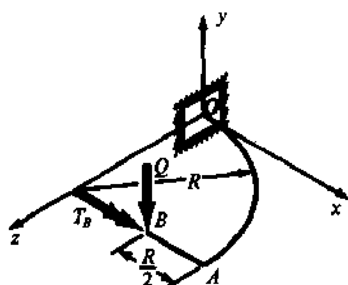


图 15-15

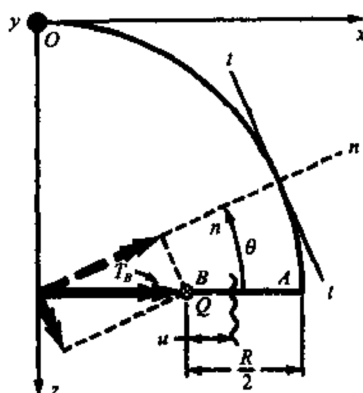


图 15-16

$$M = T_B\cos\theta + Q(R/2)\sin\theta, \qquad \partial M/\partial Q = (R/2)\sin\theta$$

$$T = T_B\sin\theta + Q[R - (R/2)\cos\theta], \qquad \partial M/\partial Q = R - (R/2)\cos\theta$$

利用卡氏定理，求完偏导数之后，令 $Q=0$，可以得到

$$\Delta_B = \int \frac{M(\partial M/\partial Q)\mathrm{d}s}{EI} + \int \frac{T(\partial T/\partial Q)\mathrm{d}s}{GJ}$$

$$= \overset{(BA)}{0} + \overset{(BA)}{0} + \overset{(AO)}{\int_0^{\pi/2} \frac{(T_B\cos\theta)[(R/2)\sin\theta]R\mathrm{d}\theta}{EI}}$$

$$+ \overset{(AO)}{\int_0^{\pi/2} \frac{(T_B\sin\theta)[R - (R/2)\cos\theta]R\mathrm{d}\theta}{GJ}}$$

$$= \frac{T_BR^2}{4EI} + \frac{T_BR^2}{2GJ}(\pi - 1)$$

题 15.15　一个由 1/4 圆环 OA 组成的结构，AB 杆与其刚性连接，在 B 处又焊接一个拐弯直杆 BC。这些杆(即 OA、AB 和 BC)都位于同一个水平面 xz 内，如图15-17所示，弯曲刚度是 EI，扭转刚度是 GJ。在 C 处施加一个铅直载荷，试求 C 点处的铅直位移。

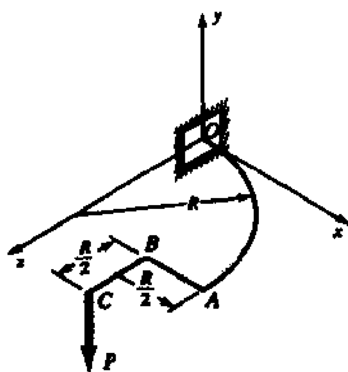


图 15-17

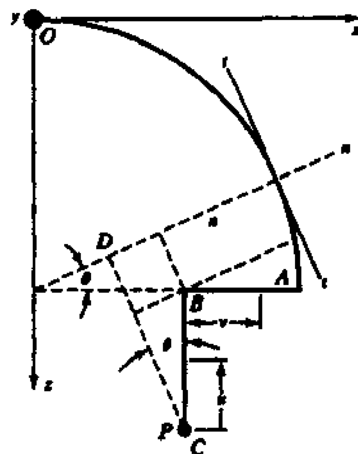


图 15-18

解　☞ 首先必须确定 1/4 环 OA 内任意点处的弯矩和扭矩，为此引入图 15-18 所示的坐标，图中 θ 表示任意点处的幅角坐标。轴 n-n 和轴 t-t 表示幅角坐标 θ 处圆环的法线和切线，由图 15-18 中的几何条件，可知关于 n-n 轴的弯矩为*

* 幅角 θ 处弯矩。——译者注

$$M = M_{n-n} = P(\overline{CD}) = P[(R/2)\cos\theta + (R/2)\sin\theta]$$

关于 t-t 轴的扭矩(幅角 θ 处扭矩——译者注。)为

$$T = T_{t-t} = P[R - (R/2)\cos\theta + (R/2)\sin\theta]$$

由上述方程可以得到

$$\partial M/\partial P = (R/2)(\cos\theta + \sin\theta)$$
$$\partial T/\partial P = (R/2)(2 - \cos\theta + \sin\theta)$$

其次,用 u 表示图 15-18 中 CB 杆内的任意点,该处的弯矩为

$$M = Pu, \qquad 于是\ \partial M/\partial P = u$$

此杆中的扭矩为零。

在图 15-18 的 BA 杆中,弯矩为 $M = Pv$,扭矩是 $T = PR/2$,于是

$$\partial M/\partial P = v, \quad \partial T/\partial P = R/2$$

根据卡氏定理,由于 P 力,使 C 点挠度是

$$\Delta_c = \int \frac{M(\partial M/\partial P)\mathrm{d}s}{EI} + \int \frac{T(\partial T/\partial P)\mathrm{d}s}{GJ}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{EI}\int_0^{\pi/2} \frac{PR^2}{4}(\sin\theta + \cos\theta)^2 R\mathrm{d}\theta}_{OA} + \underbrace{\frac{1}{GJ}\int_0^{\pi/2} \frac{PR^2}{4}(2 - \cos\theta + \sin\theta)^2 R\mathrm{d}\theta}_{OA}$$

$$+ \underbrace{\int_0^{R/2} \frac{(Pu)u\mathrm{d}u}{EI}}_{CB} + \underbrace{\int_0^{R/2} \frac{(Pv)v\mathrm{d}v}{EI}}_{BA} + \underbrace{\frac{(PR/2)(R/2)(R/2)}{GJ}}_{BA}$$

于是

$$\Delta_c = \frac{PR^3}{4EI}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\right) + \frac{PR^3}{4GJ}\left(\pi - \frac{1}{2}\right)$$

题 15.16 半圆环细杆两端均为铰支,在中部受一个集中力 P 的作用,如图 15-19 所示。试求两个铰支端处的约束反力。

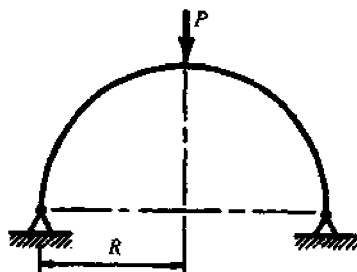


图 15-19

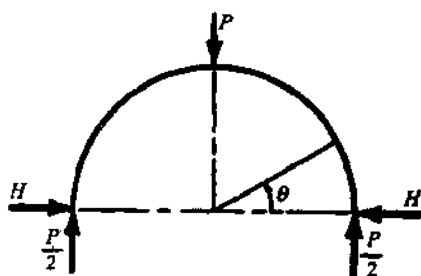


图 15-20

解 ☞ 如图 15-20 所示半环的分离体图,说明约束反力 H 是超静定的。在此半环的右侧部分,弯矩为

$$M = (P/2)(R - R\cos\theta) - HR\sin\theta$$

于是

$$\partial M/\partial H = -R\sin\theta \qquad (0 < \theta < \pi/2)$$

根据卡氏定理,节点处的水平位移为 $\Delta_H = \partial U/\partial H$,但我们知道此位移等于零。根据结构关于中心线的对称性,可写作

$$0 = \Delta_H = \frac{\partial U}{\partial H} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{M(\partial M/\partial H)R\mathrm{d}\theta}{EI}$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{[(P/2)(R - R\cos\theta) - HR\sin\theta](-R\sin\theta)R\mathrm{d}\theta}{EI}$$

从中可解出 $H = P/\pi$。

题 15.17 试求题 15.16 中,中点力 P 作用点处的铅直位移。

解 ☞ 几乎所有的超静定问题,在求解位移之前都需要首先解出赘余约束反力。对于当前这

个问题,赘余反力已在题 15.16 中解出。

在半环的右侧部分,弯矩为

$$M = (P/2)(R - R\cos\theta) - (P/\pi)R\sin\theta \qquad (0 < \theta < \pi/2)$$

且

$$\partial M/\partial P = (1/2)(R - R\cos\theta) - (1/\pi)R\sin\theta$$

根据卡氏定理,力 P 施加点处的位移是

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{M(\partial M/\partial P)R\mathrm{d}\theta}{EI}$$

此处已利用对称性。将 M 及$\partial M/\partial P$ 代入,计算得到

$$\Delta = 2\int_0^{\pi/2} \frac{[(P/2)(R - R\cos\theta) - (PR/\pi)\sin\theta][(1/2)(R - R\cos\theta) - (R/\pi)\sin\theta]R\mathrm{d}\theta}{EI}$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2\pi} - 1\right)$$

题 15.18　结构由半圆形细杆组成,位于水平平面内,两端固支;在其中部承受铅直力 P 的作用,如图 15-21 所示。试求约束反力。

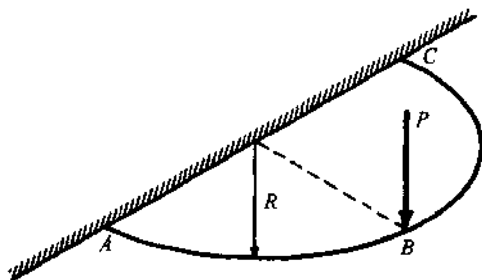


图 15-21

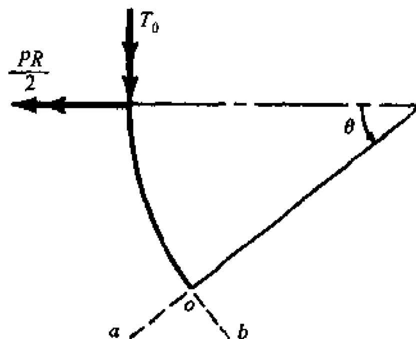


图 15-22

解　☞ A 处和 C 处的铅直约束反力均为 $P/2$。在这些点处,约束施加在半环上的约束反力偶的弯矩分量为 $PR/2$。此外 A 处和 C 处约束反力偶均还有另外一个分量——扭矩 T_0,这两种形式的反力偶均画在图 15-22 中,图中用双矢量及右手法则来表示力偶。画出支承点到(用 θ 表示的)任意点之间的一段圆环,关于 oa 轴的弯矩是

$$M = (P/2)R\sin\theta - (PR/2)\cos\theta - T_0\sin\theta$$

关于 ob 轴的扭矩是

$$T = (P/2)(R - R\cos\theta) - (PR/2)\sin\theta + T_0\cos\theta$$

由这些公式,可有

$$\partial M/\partial T_0 = -\sin\theta, \qquad \partial T/\partial T_0 = \cos\theta$$

因为半环在 A 处及 C 处是完全约束的,可以写出(考虑了对称性)

$$0 = \varphi_A = \varphi_C = 2\int_0^{\pi/2} \frac{M(\partial M/\partial T_0)R\mathrm{d}\theta}{EI} + 2\int_0^{\pi/2} \frac{T(\partial T/\partial T_0)R\mathrm{d}\theta}{GJ}$$

其中 φ 表示杆内任意点处的转角,在 A 处和 C 处的转角 φ_A, φ_C 应等于零。将有表达式代入,可有

$$0 = \int_0^{\pi/2} \frac{[(PR/2)\sin\theta - (PR/2)\cos\theta - T_0\sin\theta](-\sin\theta)R\mathrm{d}\theta}{EI}$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \frac{[(P/2)(R - R\cos\theta) - (PR/2)\sin\theta + T_0\cos\theta](\cos\theta)R\mathrm{d}\theta}{GJ}$$

解出

$$T_0 = \frac{\frac{PR}{2}\left(\frac{2-\pi}{EI}\right) + \frac{2-\pi}{GJ}}{\left(\frac{\pi}{EI} - \frac{\pi}{GJ}\right)}$$

题 15.19　如图 15-23 所示的细杆框架，直杆 GFD 在其两端与半圆环 BCD 和 GHJ 相连，然后再与另外两段直杆 JK 和 AB 相连。在 A 点和 K 点之间有一个小隙缝，现在 H 及 C 处施加一对力(Q, Q)，试求隙缝的增加值 $2\Delta_A$。

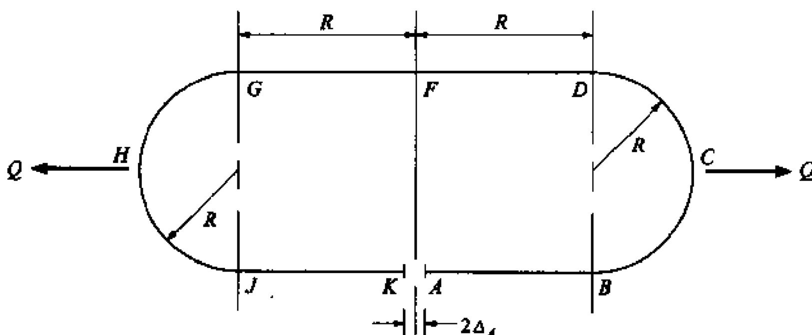


图 15-23

解　注意到结构和载荷都是关于过 F 的中心线对称的，因而可以只研究半个结构的行为，譬如说，可以取右半结构作为研究对象，如图 15-23 所示。因为图 15-23 中的 F 点是对称点，因而可将其视作插入端。此半结构上的实际载荷是 Q，为了计算隙缝处的位移，引入一个虚拟的辅助力 P，如图 15-24 所示。

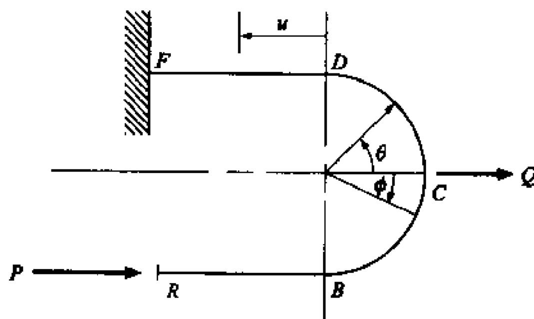


图 15-24

只考虑弯曲作用。在整个系统的不同区段，弯矩表达式如下

在 BC 段：$M = P(R - R\sin\phi)$　$\partial M/\partial P = R(1 - \sin\phi)$

在 CD 段：$M = P(R + R\sin\theta) + QR\sin\theta$

$$\partial M/\partial P = R + R\sin\theta$$

在 DF 段：$M = 2PR + QR$，$\partial M/\partial P = 2R$

根据卡氏定理，A 点处沿 P 作用的位移为

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int \frac{M(\partial M/\partial P)\mathrm{d}s}{EI}$$

将有关表达式代入，有

$$\Delta_A = \overset{(BC)}{\int_0^{\pi/2} \frac{P(R - R\sin\phi)R(1 - \sin\phi)R\mathrm{d}\phi}{EI}}$$

$$+ \overset{(CD)}{\int_0^{\pi/2} \frac{[P(R + R\sin\theta) + QR\sin\theta](R + R\sin\theta)R\mathrm{d}\theta}{EI}} + \overset{(DF)}{\int_0^R \frac{(2PR + QR)(\mathrm{d}u)}{EI}}$$

将上式积分，可以得到

$$\Delta_A = \frac{PR^3}{EI}\left[\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{R^3}{EI}\left[P\left(\frac{\pi}{2}\right) + P + Q + P + P\left(\frac{\pi}{4}\right) + Q\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + \frac{4PR^3}{EI} + \frac{2QR^3}{EI}$$

令 $P=0$，得到

$$\Delta_A = \frac{QR^3}{EI} + \frac{Q\pi R^3}{4EI} + \frac{2QR^3}{EI}$$

因为结构的左半部分也会发生同样的形变，因而 A 处隙缝的增加值应为 $2\Delta_A$，即

$$2\Delta_A = \frac{QR^3}{2EI}(12+\pi)$$

题 15.20 图 15-25 所示弯曲刚度为 EI 的弹性梁 $FDCG$，由弹性杆 AB、BC 和 BD 支撑，各弹性杆的拉伸刚度为 EA，且均不能承担弯曲。此结构在 F 处承受铅直向下的载荷 P。试求 F 点的铅直位移。

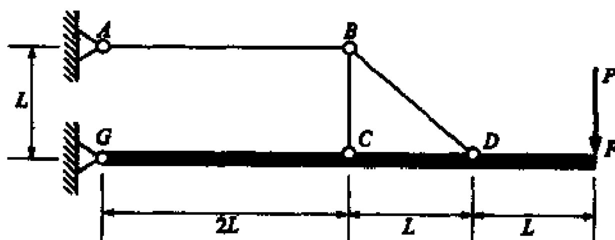


图 15-25

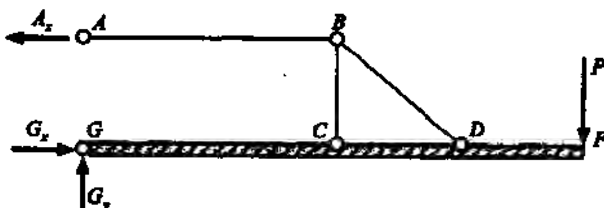


图 15-26

解 此题最适于卡氏定理求解，因为在系统内既有弯曲应变能，又有拉伸应变能。首先要求解外部的约束反力，系统的分离体图如 15-26 所示。因为杆 AB 不能承受横向（弯曲）载荷，所以在 A 处不存在铅直向的约束反力。

由静力学，有

$$\sum M_A = G_x(L) - P(4L) = 0, \quad G_x = 4P$$

$$\sum F_H = -A_x + 4P = 0, \quad A_x = 4P$$

$$\sum F_V = G_y - P = 0, \quad G_y = P$$

亦即 AB 杆承受 $4P$ 的拉力。

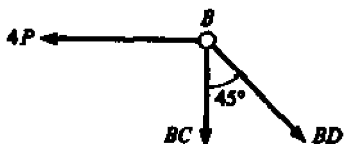


图 15-27

其次，画出如图 15-27 所示的分离体图，此图是由一个截面假想地截断三个杆件得到的，且用 BD 和 BC 表示相应杆中的内力。由静力学，有

$$\sum F_H = -4P + BD\sin45^\circ = 0$$

$$\sum F_V = -BC - BD\cos45^\circ = 0$$

于是，这三根杆中的轴力是

$$AB = 4P, \quad BC = -4P, \quad BD = 4\sqrt{2}P$$

由题 15.8 可以得到只考虑三杆轴力时，F 点处的铅直位移，即

$$\Delta_1 = \sum \frac{S(\partial S/\partial P)L}{AE} = \overset{(AB)}{\frac{(4P)(4)(2L)}{AE}} + \overset{(BC)}{\frac{(-4P)(-4)(L)}{AE}}$$

$$+ \overset{(BD)}{\frac{(4\sqrt{2}P)(4\sqrt{2})(\sqrt{2}L)}{AE}} = \frac{PL}{AE}[24 + 32\sqrt{2}] = 69.2\frac{PL}{AE} \tag{1}$$

最后,考虑只由于梁 $FDCG$ 的弯曲效应引起的 F 点的铅直位移。在题 15.8 中曾指出铅直位移为

$$\Delta_2 = \int \frac{M(\partial M/\partial P)\mathrm{d}s}{EI} \tag{2}$$

图 15-28 表示梁及其所受各力的分离体图,坐标 u 和 x 是为计算(2)式积分引入的。梁的各段的弯矩为

$$FD:\ M = Px,\quad \partial M/\partial P = x$$

$$DC: M = Px - (4\sqrt{2}P)\frac{1}{\sqrt{2}}(x - L) = -3Px + 4PL$$

$$\partial M/\partial P = -3x + 4L$$

$$GC: M = Pu,\quad \partial M/\partial P = u$$

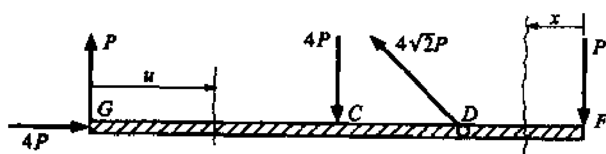


图 15-28

只考虑弯曲效应,(2)式成为

$$\Delta_2 = \overset{(FD)}{\int_{x=0}^{L} \frac{(Px)(x)\mathrm{d}x}{EI}} + \overset{(CD)}{\int_{x=L}^{2L} \frac{(-3Px + 4PL)(-3x + 4L)\mathrm{d}x}{EI}}$$

$$+ \overset{(CG)}{\int_{u=0}^{2L} \frac{(Pu)(u)\mathrm{d}u}{EI}} = 3.67\frac{PL^3}{EI}$$

此结构 F 点的位移应为 Δ_1 和 Δ_2 的和,即

$$\Delta_F = 69.2\frac{PL}{AE} + 3.67\frac{PL^3}{EI}$$

15.8 习　　题

题 15.21 实心圆截面锥形杆铅直悬挂,如图 15-29 所示,其单位体积重量为 γ,并承受自重的作用。试求储藏其内的应变能。(答案:$U = \pi D^2 L^3 \gamma^2 / 360E$)

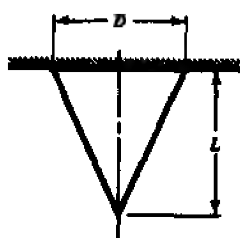


图 15-29

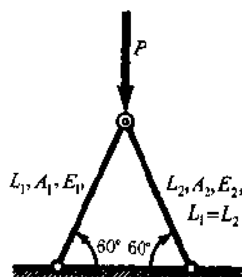


图 15-30

题 15.22　如图 15-30 所示，两杆 AB 和 CB 在各端均为铰支，且承受单独的铅直载荷 P 的作用。每个杆的几何和弹性常数如图中所示，试用卡氏定理求 B 点的水平及铅直位移。

（答案：$\Delta_x = -\dfrac{PL_1}{\sqrt{3}A_1E_1} + \dfrac{PL_2}{\sqrt{3}A_2E_2}$，　$\Delta_y = \dfrac{PL_1}{3A_1E_1} + \dfrac{PL_2}{3A_2E_2}$）

题 15.23　如图 15-31 所示的桁架是由 5 根杆组成的，各杆的截面积为 A，弹性模量为 E，在 B 点承受铅直载荷 Q 的作用。试用 Q 所作的功等于内部应变能的方法求 B 点的铅直位移。（答案：$\Delta = 2.914QL/AE$）

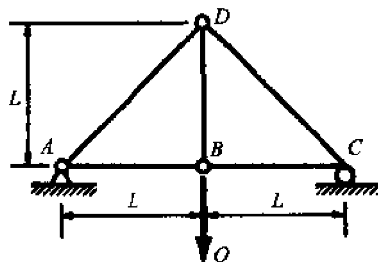


图 15-31

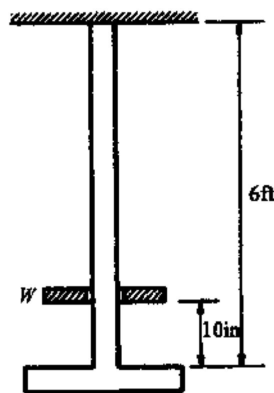


图 15-32

题 15.24　如图 15-32 所示，截面为 1in × 2in，长度为 6ft 的长杆下端有一个凸缘，材料 $E = 30 \times 10^6 \text{lbf/in}^2$，现有一重物 W 自高度 10in 处自由下落，打击在凸缘上。若要求工作应力不超过 2000lbf/in^2，试求重物 W 允许的最大重量。（答案：W = 96lbf）

题 15.25　悬臂梁在其自由端承受力偶 M_1 作用，如图 15-33。试用卡氏定理求自由端的挠度。（答案：$M_1L^2/(2EI)$）

题 15.26　简支梁在其左端承受力偶 M_1 作用，如图 15-34。试用卡氏定理求梁中点处的挠度。（答案：$M_1L^2/(16EI)$）

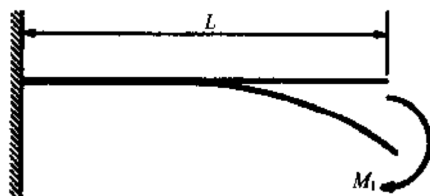


图 15-33

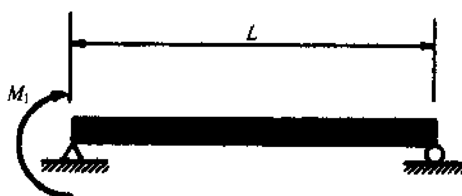


图 15-34

题 15.27　长 4m 的悬臂梁的截面为 W203 × 28 工字型钢，材料 E = 200GPa。今有重量为 1kN 的重物 W 自 150mm 的高度自由落下，打击在此梁的自由端处。试求此梁的最大挠度。（有关梁的数据可参阅第 8 章表 8-2。）（答案：38.8mm）

题 15.28　结构为 3/4 的细圆环，位于铅直平面内；其一端是固定的，另一端承受铅直载荷 P 作用，见图 15-35。试求 A 点的水平位移。（只考虑弯曲应变能。）（答案：$PR^3/(2EI)$）

题 15.29　如图 15-36，结构为半径 R 的 1/4 细圆环，其一端固定，另一端承受力偶 M_0 作用。求 A 处的角位

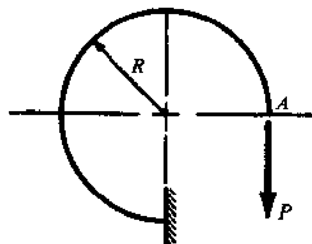


图 15-35

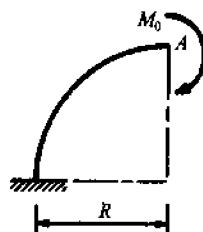


图 15-36

移、铅直位移和水平位移。(答案：$\frac{M_0\pi R}{2EI}$；$\frac{M_0R^2}{EI}$；$0.571\frac{M_0R^2}{EI}$)

题 15.30　如图 15-37，钢架 ABC 在 AB 段受到的均布载荷 q 的作用，在 BC 的中点受到力偶 M_0 的作用。试求 A 处的铅直位移。(答案：$\frac{qL^4}{8EI}+\frac{2qL^3H}{3EI}-\frac{M_0LH}{2EI}$)

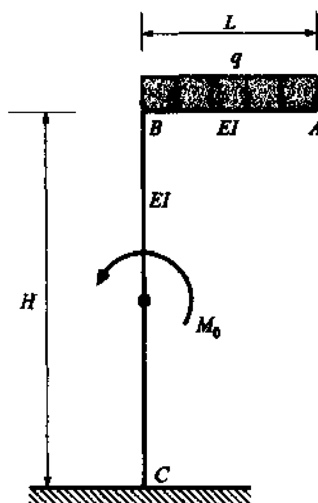


图 15-37

题 15.31　如图 15-38 所示，直杆 AC 的两端 A、C 均为固结在基础上，在中点 B 处与直杆 BD 刚性连接，AC 和 BD 位于水平平面内，在自由端 D 处承受铅直载荷 P 的作用。每个根的弯曲刚度是 EI，扭转刚度是 GJ。试求：载荷 P 作用点 D 处的挠度。(答案：$\frac{3PL^3}{8EI}+\frac{PL^3}{4GJ}$)

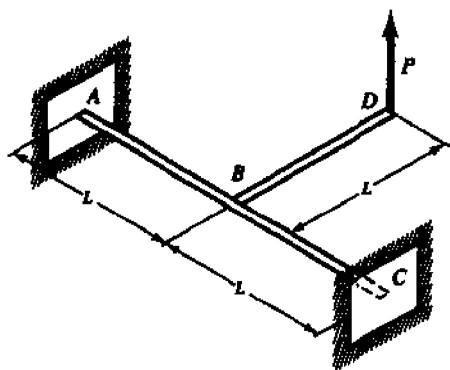


图 15-38

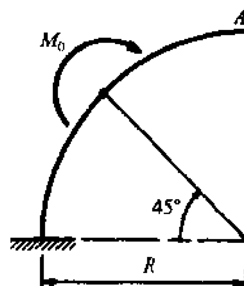


图 15-39

题 15.32　如图 15-39 所示，结构为 1/4 细圆环，一端固定另端自由，在其中点受到集中力偶 M_0 的作用。试求 A 点位移的铅直分量。(答案：$M_0R^2/\sqrt{2}EI$)

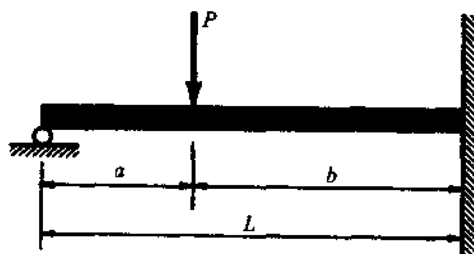


图 15-40

题 15.33　如图 15-40 所示，梁的左端简支右端固定，承受图示集中载荷 P 的作用。试用卡氏定理求左端的支座反作用力。（答案：$Pb^2(2L+a)/2L^3$）

题 15.34　如图 15-41 所示，1/4 的细圆环承受图示载荷的作用，一端固定另端铰支。试求铰支端 B 处的约束反力分量。（答案：$B_v=0.19M_0/R \quad B_h=1.12M_0/R$）

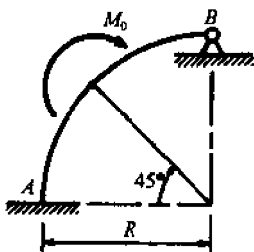


图 15-41

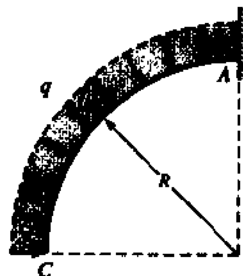


图 15-42

题 15.35　1/4 细圆环位于铅直平面内，承受均布载荷 q 的作用，A 端固定 C 端自由，如图 15-42 所示。试求 C 处位移的水平及铅直分量。（答案：$\Delta_x=0.500\dfrac{qR^4}{EI}$，$\Delta_y=0.36\dfrac{qR^4}{EI}$）

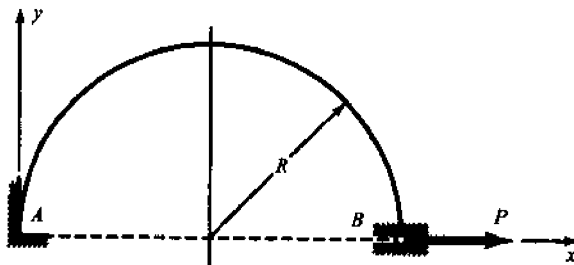


图 15-43

题 15.36　抗弯刚度为 EI 的半圆环位于铅直平面内，A 端固定，B 端允许在一个水平的、无摩擦的导向器中移动，如图 15-43 所示。沿水平方向的力 P 施加在 B 端，试求 B 点的水平位移，如果除去导向器试求 B 点的铅直位移。（答案：$\Delta_{Bx}=0.14\dfrac{PR^3}{EI}$，$\Delta_{By}=\dfrac{2PR^3}{EI}$）

题 15.37　如图 15-44 结构，1/4 细圆环 AB 和直杆 BC 在 B 处的固结在一起，使得 BC 是此环的切线，与 y 轴平行的力 P 施加在 B 点，C 点是自由的。结构圆弧区段及直线段的弯曲刚度为 EI、扭转刚度为 GJ。试求 C 点位移的 y 向分量。

（答案：$\Delta_c=\dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{\pi}{4}PR^3+\dfrac{1}{2}PR^2L\right]+\dfrac{1}{GJ}\left[\left(\dfrac{3\pi}{4}-2\right)PR^3-\dfrac{1}{2}PR^2L\right]$）

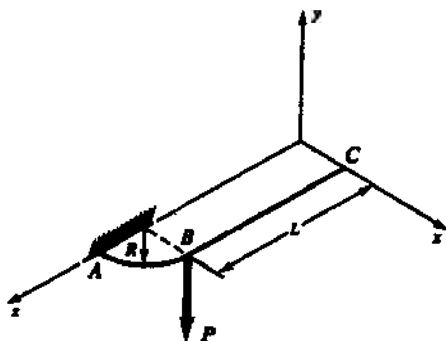


图 15-44

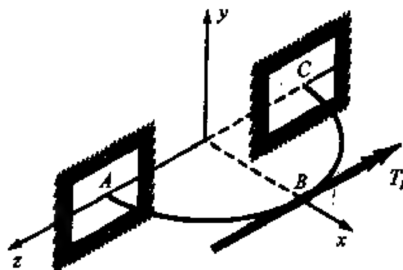


图 15-45

题 15.38　如图 15-45 所示，类似于阳台的结构由一个水平面内的半圆环组成，在半环的中点受到一个扭转力偶 T_B 的作用。试求在 A 端和 C 端的约束扭转力偶。（答案：$T_B/9\pi$）

题 15.39 如图 15-46 所示，细圆环承受等值、反向的对径力的作用。试求 A 点的弯矩及沿 CD 方向圆环直径的增加。(答案：$M_A=\frac{PR}{2}\left(\frac{\pi-2}{2}\right)$，$\Delta=0.149\frac{PR^3}{EI}$)

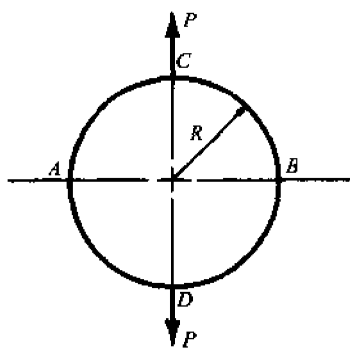


图 15-46

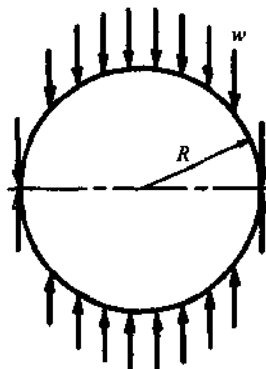


图 15-47

题 15.40 如图 15-47 所示细圆环受到分布载荷的作用，该分布载荷沿圆环在水平方向的投影上是均布的，集度为 w。试求铅直直径的减少。(答案：$wR^4/6EI$)

题 15.41 如图 15-48 所示，弯曲刚度为 EI 的半圆环位于铅直平面内，其 A 端固定 B 端自由；在其 B 端受到一个水平力 P 作用。试求 B 端位移的水平和铅直分量。(答案：$\Delta_{Bx}=\frac{PR^3\pi}{2EI}$，$\Delta_{By}=\frac{2PR^3}{EI}$)

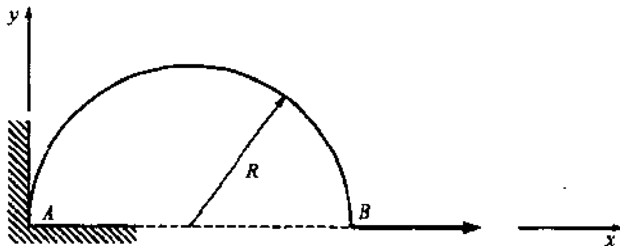


图 15-48

题 15.42 如图 15-49 所示，由三根弯曲刚度 EI、扭转刚度 GJ 的细杆组成的刚架位于水平面内，与基础连接的两端为插入端。此刚架承受中心铅直力 P 作用，试求插入端处的约束扭转力偶。(答案：$\frac{Pb^2/EI}{(b/EI)+(a/GJ)}$)

题 15.43 如图 15-50 所示的结构，位于水平面内的 1/4 细圆环，弯曲刚度 EI，扭转刚度 GJ。在其自由端处受扭转力偶 T_0 作用，另一端为插入端。试求自由端的铅直位移。(答案：$T_0R^2\left(\frac{\pi}{4EI}+\frac{\pi}{4GJ}-\frac{1}{GJ}\right)$)

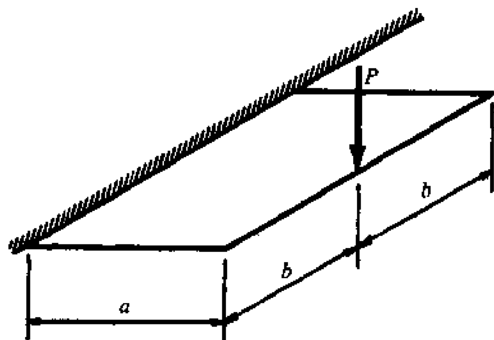


图 15-49

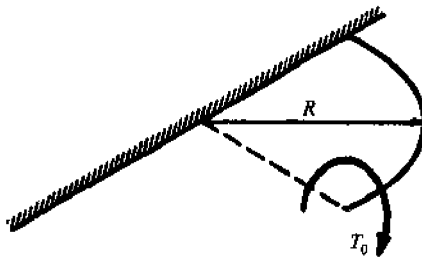


图 15-50

第16章 组合应力

16.1 序　　言

本书的前面几章，我们研究了受轴向载荷的杆、受扭转的轴、受弯曲的梁以及压力容器中所发生的应力，要指出的是，我们所考虑的杆，只承受一种载荷作用，例如弯曲。但是，经常会有的杆要同时承受前面讲过的几种载荷的共同作用，并且要求解在此种条件下的应力状态。因为法应力和剪应力均是矢量，值得特别注意的是组合应力，亦即由前面各章中导出的、单独载荷应力表达式组合而成的情况。为此，在本章中研究单元体内任意平面内的应力状态，该单元体位于同时承受几种载荷作用的物体之内。

16.2 两向应力的一般情况

一般地，如果从物体中取出一个平面单元体，它将承受法应 σ_x、σ_y 及切应力 τ_{xy}的共同作用，如图 16-1 所示。

16.3 符号规则

对于法应力，拉伸为正，压缩为负；对于切应力，如图 16-1 中所示的方向为正，反之为负。

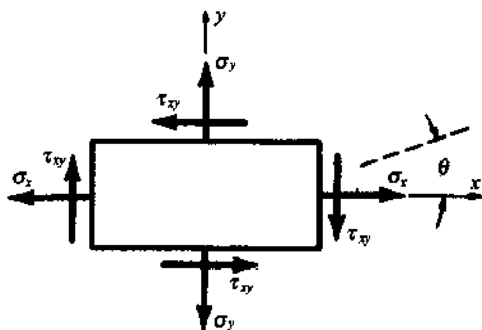


图 16-1

16.4 斜截面上的应力

我们认为，应力 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}都是已知的(其计算方法将在第 17 章中讨论)，经常想去研究与 x 轴成θ 角的斜截面上的应力情况，如图 16-1。在图 16-2 中，这样斜截面上的法应力和切应力用 σ 和 τ 来表示。在题 16、13 中将会证明

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{16.1}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{16.2}$$

于是，对于任意的 θ 值，由这些表达式中可解出的相应的 σ、τ 值。此两式的应用见题 16.15,

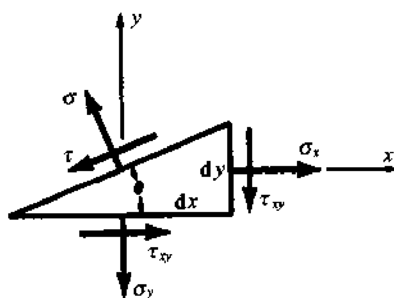


图 16-2

题 16.17 和题 16.18。

16.5 主应力

对于给定的 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}的应力组合，存在着 θ 角的某个数值，它将给出 σ 的最大和最小值。这些最大、最小值称为主应力，可由下式给出：

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{16.3}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{16.4}$$

这些表达式将在题 16.13 中导出，应用见题 16.15 和题 16.18。

16.6 主应力和方向 主平面

将 x 轴和主应力作用平面法线之间的夹角记作θ_p；θ_p 可由下式给出：

$$\tan 2\theta_p = \frac{-\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)} \tag{16.5}$$

此式也将在题 16.13 中导出，应用见题 16.15 和题 16.18。在那些题中还将说明，总会有两个满足上述方程的 θ_p。最大应力 σ_{max}发生在其中一个平面上，最小应力 σ_{min}将发生在另一个平面上。由两个 θ_p 角定义的平面称为主平面。

16.7 计算机应用

对于此种两向应力情况，编写了一个简单的 FORTRAN 程序，用以计算由(16.3)、(16.4)式给出的主应力及由(16.5)式给出的主方向。题 16.20 给出了这个程序，应用可见题 16.21。

16.8 主平面上的剪应力

题 16.13 中的研究指出，在 σ_{max}和 σ_{min}作用的平面内，剪应力永远是零，与应力 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}的数值无关。因而，在与主平面相合的单元体上只会有主应力，如图 16-3 所示。

16.9 最大剪应力

对于给定的 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}的应力组合，存在某些给出最大剪应力 τ 的角度θ 值，最大和最

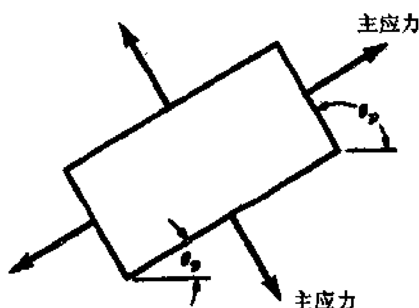


图 16-3

小剪应力将由下式给出：

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)+\tau_{xy}^2} \tag{16.6}$$

此式将在题 16.13 中导出，应用见题 16.3，题 16.10、题 16.18 和 16.19。

16.10　最大剪应力的方向

x 轴和最大剪应力作用平面之间夹角 θ_x 将由下式给出：

$$\tan 2\theta_x = \frac{(\sigma_x-\sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \tag{16.7}$$

此式也在题 16.13 中导出，应用见题 16.3、题 16.10、题 16.18 和题 16.19。总会有两个角度满足上述方程，相应于(16.6)式中的正平方根作用在其中一个记作 θ_S 的平面上，相应于负平方根的应力作用在另一个平面上。

16.11　最大剪应力平面上的法应力

在题 16.13 中将指出，作用在最大与最小剪应力平面(彼此相差 90°)上的法应力，将由下式给出：

$$\sigma' = (\sigma_x+\sigma_y)/2$$

因而方向与最大、最小剪应力平面一致的单元体如图 16-4 所示。这将在题 16.7、题 16.9 和题 16.15 中说明。

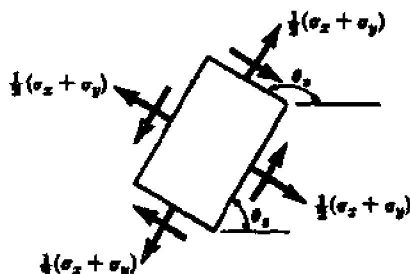


图 16-4

16.12　莫 尔 圆

本章以上各公式中的所有信息，都可以表示为另外一种方便的图形方式，该图形称为莫尔

圆。在这种表示方法中,法应力沿水平轴表示、剪应力沿铅直轴表示。按比例画出应力 σ_x、σ_y 和 τ_{xy},并可以画出一个圆心在水平轴上、且通过上述各点的圆,图 16-5 即为承受平面应力的一般情况的单元体画出的莫尔应力圆。应力圆的应用见题 16.4、题 16.5、题 16.8、题 16.10、题 16.12、题 16.14、题 16.16、题 16.17 和题 16.19。

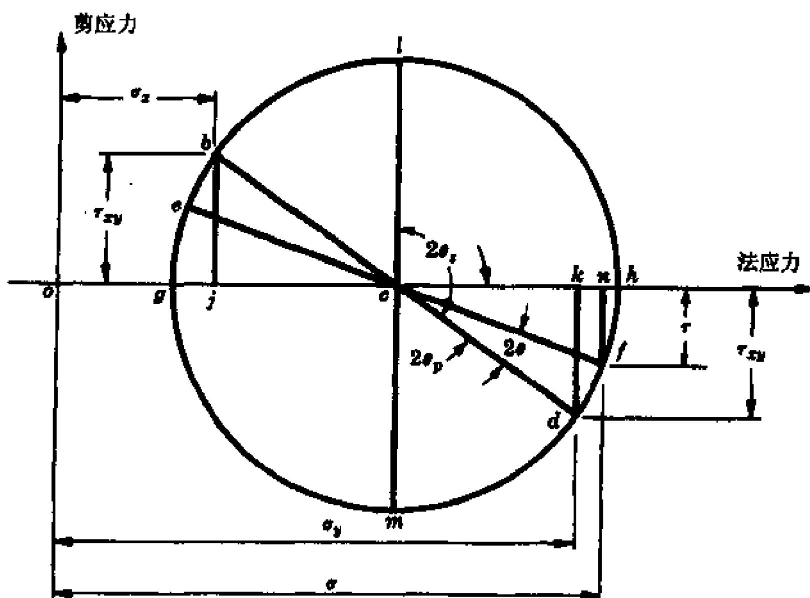


图 16-5

16.13　用于莫尔圆的符号法则

前面已讲到,法应力的拉应力被认为是正的、压应力是负的。在图 16-5 中,拉应力应画在原点的右侧,压应力画在原点的左侧。对于剪应力,要特别指出,此处的符号规则与上述有关公式中用到的不同。这将提到一个承受图 16-6 所示切应力的平面单元体,如果剪应力使单元体顺时针转动则为正的,使单元体逆时针转动的剪应力将是负的。因而图 16-6 中的单元体,铅直界面上的剪应力是正的,水平界面上的剪应力是负的。

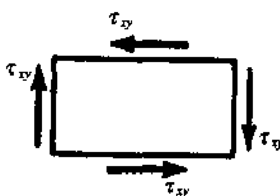


图 16-6

16.14　主应力的莫尔圆解法

当如图 16-5 的莫尔圆被画出后,主应力将由图中的线段 og 和 oh 表示。这既可以由图形的比例尺解出,也可以由图形的几何关系计算,将在题 16.14 中讲述有关细节,应用可见题 16.4、题 16.5、题 16.8、题 16.10、题 16.12、题 16.14、题 16.16、题 16.17 和题 16.19。

16.15　任意斜截面上应力的莫尔圆解法

为了求得与 x 轴成逆时针 θ 角的斜截面上的法应力和剪应力,在图 16-5 的莫尔圆上,自直径 bd 逆时针方向量取 2θ 角。直径 bd 的端点坐标,表示原始的 xy 方向上的应力条件,亦即:它们表示 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}。2θ 角度相应于直径 ef,f 点的坐标表示在与 x 轴成 θ 角的斜截面上的法应力和剪应力,亦即,法应力 σ 用横坐标 on 表示,切应力 τ 用纵坐标 nf 表示。这将在题 16.14 中详细讨论,应用见题 16.4、题 16.5、题 16.6、题 16.8 和题 16.17。

16.16 例　　题

题 16.1 考虑承受轴向拉伸的等截面直杆。试求与杆轴成 θ 角的斜截面内的法应力和剪应力，同时求最大剪应力的方向。

解 ☞ 这是与第 1 章中考虑过的相同的弹性体，但在当时只研究了与轴向载荷一致的法应力。在图 16-7(a)中，P 表示作用在杆上的轴向载荷，A 表示垂直于杆轴的截面面积，且由第 1 章知，法应力 σ_x 由下式给出：$\sigma_x = P/A$。

现在，假设用一个截面去替代垂直于杆轴的截面，我们作一个与杆轴成 θ 角的斜截面，如图 16-7(b)中的 mn 所示。此时杆件在水平上仍是平衡的，显然，作用在斜截面上的水平分布应力如图所示，将此应力的数值记作 σ'，斜截面的面积为$(A/\sin\theta)$，由水平方向力的平衡，有

$$\sigma'(A/\sin\theta) = P, \qquad 或\ \sigma' = (P\sin\theta)/A$$

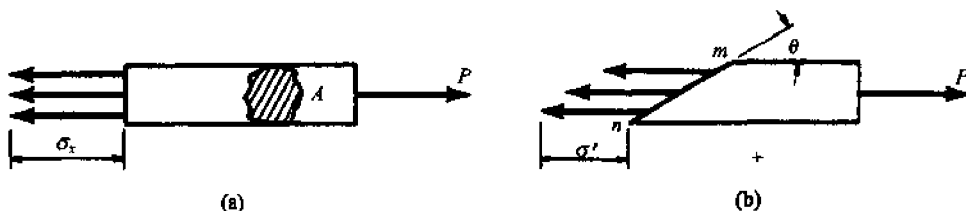


图 16-7

在图 16-8 中，只考虑应力矢量 σ'，将其分解为两个分量，其中一个垂直于斜截面 mn，另一个与该截面相切。用字母 σ 表示第一个分量，亦即法应力；用 τ 表示第二分量，即剪应力。

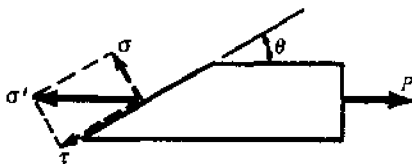


图 16-8

因为 σ'和 τ 之间的夹角是θ，立刻可写出如下关系：

$$\tau = \sigma'\cos\theta \quad 及 \quad \sigma = \sigma'\sin\theta$$

但是 $\sigma' = (P\sin\theta)/A$，将此值代入上两式，得到

$$\tau = (P\sin\theta\cos\theta)/A \quad 及 \quad \sigma = (P\sin^2\theta)/A$$

注意到 $\sigma_x = P/A$，因而可将上述应力写成如下形式：

$$\tau = \sigma_x\sin\theta\cos\theta \quad 及 \quad \sigma = \sigma_x\sin^2\theta$$

由三角学公式，有

$$\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad 及 \quad \sin^2\theta = (1-\cos2\theta)/2$$

于是

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_x\sin2\theta \tag{1}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_y(1-\cos2\theta) \tag{2}$$

这些表达式给出了相对杆轴倾斜 θ 角的平面内的剪应力和法应力。

题 16.2 横截面积 850mm^2 的直杆在其两端受到 60kN 的轴向力拉伸，试求对于加载方向倾斜 30°的平面上的法应力和剪应力。

解 ☞ 由题 16.1 可知，垂直于轴线的横截面之内的法应力为

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{60\times10^3}{850} = 70.6(\text{MPa})$$

与加载方向成 θ 角的平面内的应力，由题 16.1 可知为 $\sigma=(\sigma_x/2)(1-\cos2\theta)$；当 $\theta=30°$时，应力为 $\sigma=(70.6/2)(1-\cos60°)=17.65(\text{MPa})$，同一平面上的剪应力 $\tau=(\sigma_x/2)\sin2\theta$. 当 $\theta=30°$时，应有 $\tau=(70.6/2)(\sin60°)=30.6(\text{MPa})$，将它们及 60kN 的轴向载荷表示在图 16-9 中。

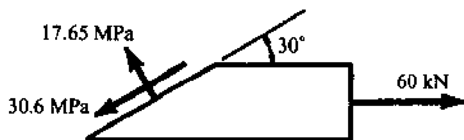


图 16-9

题 16.3 求题 16.2 中轴向受载杆件的最大剪应力。

解 由题 16.1 知，与载荷方向成 θ 角的平面上的剪应力为 $\tau=(\sigma_x/2)\sin2\theta$，当 $2\theta=90°$时，即 $\theta=45°$时，此式有极大值。对于题 16.2 中的载荷，$\sigma_x=70.6\text{MPa}$，当 $\theta=45°$时，剪应力为

$$\tau=(70.6/2)\sin90°=35.3(\text{MPa})$$

亦即，最大剪应力等于最大法应力的 1/2。

45°平面上的法应力为

$$\sigma=(\sigma_x/2)(1-\cos2\theta)=(70.6/2)(1-\cos90°)=35.3(\text{MPa})$$

题 16.4 讨论题 16.1 中(1)式和(2)式的图形表示。

解 根据这些公式，与加载方向倾斜 θ 角的平面上，法应力和剪应力分别为

$$\sigma=(\sigma_x/2)(1-\cos2\theta),\quad \sigma=(\sigma_x/2)\sin\theta$$

为了用图形表示这些公式，按惯例引入一个笛卡儿直角坐标系，法应力为其横坐标、剪应力为其纵坐标。

首先在水平轴的正方向按某个方便的比例尺标出法应力 σ_x（取作拉伸），这个线段的中心，亦即图 16-10 中的 c，作为圆心，整个直径为 σ_x。这个圆用$\overline{oc}$、$\overline{ch}$和$\overline{cd}$表示的半径为$(\sigma_x/2)$，由半径$\overline{oc}$逆时针方向量取 2θ 角时为正值。由这个图形，很快能得出如下关系式：

$\overline{kd}=\tau=(\sigma_x/2)\sin2\theta$

$\overline{ok}=\overline{oc}-\overline{kc}=(\sigma_x/2)-(\sigma_x/2)\cos2\theta=\sigma=(\sigma_x/2)(1-\cos2\theta)$

要注意，在铅直方向及水平方向使用的比例尺应是相等的。

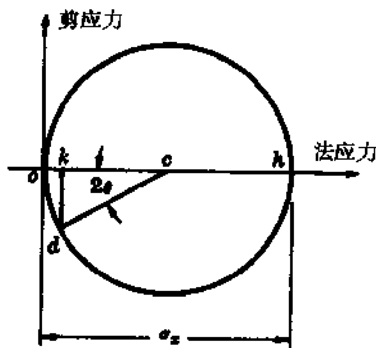


图 16-10

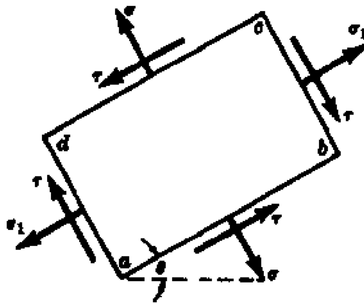


图 16-11

于是，d 点的横坐标及纵坐标分别表示与加载轴成θ 的平面内作用的法应力和剪应力。在画这个图时，拉伸应力为"+"号，压缩应力取作"−"号。现在我们回到题 16.1 并考查单元体的分离体图(图 6-11)，此单元体是在倾斜表面选取的，在该倾斜表面上作用有应力 σ 和 τ。如果剪应力使此单元体顺时针转动，则为正的，使单元体逆时针转动时为负的。这种符号规则只用于此种表示方法，在题 16.1 中的解析处理中不使用此种规则。因为题 16.1 中的剪应力实际上是作用在单元上方的 dc 表面的，它们应是负的。因此在表示法应力和剪应力的圆形图中(图 16-10)，dc 平面内的切应力表示为$\overline{kd}$的纵坐标，为负号。

这种称为莫尔圆的图形，是由莫尔(Mohr.O)于 1882 年首次提出的。它表达了物体内一点处

所有斜截面上的法应力和剪应力的变化规律。此即为题16.1中(1)式和(2)式的图形表示方法。

题 16.5　再次考虑题 16.2 中讨论过的轴向加载杆。用莫尔圆计算 30°斜面上的法应力和剪应力。

解　☞ 在图 16-12 中，法应力 70.6MPa 以某个方便的比例标注在水平轴上。以这个线段作为直径画一个圆。角度 $2\theta=2(30°)=60°$是由$\overline{oc}$逆时针量取的。d 点的坐标是

$$\overline{kd}=\tau=-(70.6/2)\sin60°=-30.6(\text{MPa})$$

$$\overline{ok}=\sigma=\overline{oc}-\overline{kc}=(70.6/2)-(70.6/2)\cos60°=17.65(\text{MPa})$$

相应于剪应力前的负号表明 30°平面的剪应力使以此平面为界面的单元体逆时针转动，这是与图 16-9 中的剪应力的方向是一致的。

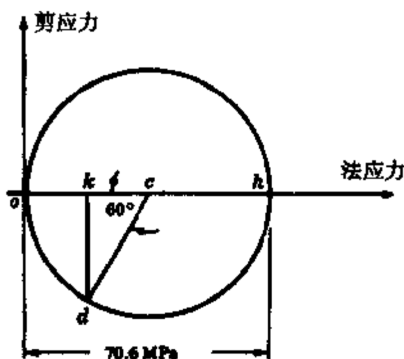


图 16-12

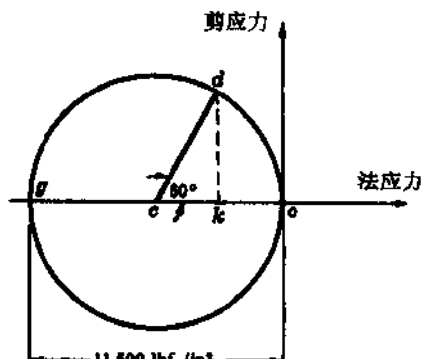


图 16-13

题 16.6　截面积 1.3in² 的杆，在其两端承受 15000lbf 压力的作用。试利用莫尔圆求与载荷方向倾斜 30°的平面上的法应力和剪应力。(忽略杆屈曲的可能性)。

解　☞ 垂直于杆轴的横截面上的法应力为

$$\sigma_x=\frac{P}{A}=-\frac{15000}{1.3}=-11500(\text{lbf/in}^2)$$

用某个方便的比例尺在水平轴的负侧标注出上述的压应力，这个线段的中点，即图 16-13 中的 c 点，作为圆心，圆的直径是 11500(lbf/in²)。

以 c 为顶点的角 $2\theta=2(30°)=60°$是由 co 逆时针量取的，如图 16-13 示。d 点的横坐标表示 30°平面上的法应力，纵坐标表示剪应力。d 点的坐标是

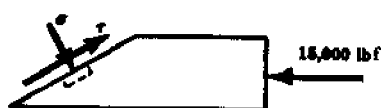


图 16-14

$$\overline{kd}=\tau=(11500/2)\sin60°=4940(\text{lbf/in}^2)$$

$$\overline{ok}=\sigma=\overline{oc}-\overline{ck}=(11500/2)-(11500/2)\cos60°=2870(\text{lbf/in}^2)$$

应指出的是，线段 ok 位于坐标原点的左方，因此法应力是负的。剪应力前的"+"号表示 30°斜面上的剪应力使以此面为边界的单元体(图 16-14 中用虚线表示)顺时针转动。法应力和剪应力及 15000lbf 轴向载荷都画在图 16-14 中。

题 16.7　考虑一个取自受力弹性体内的单元体，该单元体表面上的法应力和剪应力分别是 σ_x 和 τ_{xy}，如图 16-15 所示。(a)求与法应力 σ_x 倾斜 θ 的平面内的法应力和剪应力，(b)求最大和最小法应力的数值及方向，(c)求最大剪应力的数值及方向。

解　☞ (a)待求的作用在倾斜平面上的法应力和剪应力是图 16-15 所示单元体的内部量。按惯例，可用倾斜平面切割单元体，使待求的应力成为新物体(切割后单元体)的外力，亦即须沿着与 x 轴倾斜 θ 角的斜面切割原始的矩形单元体，得到如图 16-16 所示的三角形单元体，分别用法应力 σ 和剪应力 τ 表示原始矩形单元体除去部分对保留部分的影响，于是问题就归结为由已知的 σ_x 和 τ_{xy} 去寻求未知的 σ 和 τ。注意到在三角形单元体的分离体图内，矢量表示作用在倾斜面的应力而不是力，这些应力都假设均匀地分布在他们作用的表面上，单元体在与书纸面垂直方向上的厚度是 t。

引入与倾斜平面垂直的 N 轴和相切的 T 轴，如图 16-16。首先考虑 N 向的力，平衡方程为

$$\sum F_N = \sigma t\mathrm{d}s - \sigma_x t\mathrm{d}y\sin\theta - \tau_{xy} t\mathrm{d}y\cos\theta - \tau_{xy} t\mathrm{d}x\sin\theta = 0$$

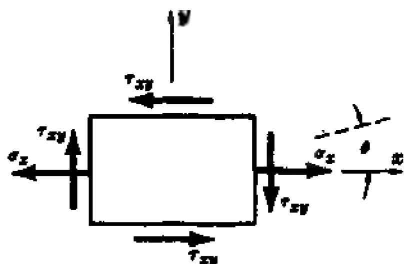


图 16-15

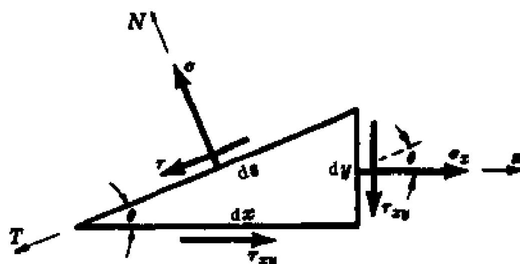


图 16-16

但是 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\sin\theta$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cos\theta$，将这些关系代入上述的平衡方程，有

$$\sigma(\mathrm{d}s) = \sigma_x(\mathrm{d}s)\sin^2\theta + 2\tau_{xy}(\mathrm{d}s)\sin\theta\cos\theta$$

引用关系 $\sin^2\theta = (1-\cos2\theta)/2$, $\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，得到

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2}(1-\cos2\theta) + \tau_{xy}\sin2\theta = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos2\theta + \tau_{xy}\sin2\theta \tag{1}$$

于是，将作用在与 x 轴倾斜 θ 角任意斜截面上的法应力 σ 表示为 σ_x、τ_{xy} 及 θ 的函数。

其次考虑三角形单元沿 T 向作用力的平衡，可得方程

$$\sum F_T = \tau t\mathrm{d}s - \sigma_x t\mathrm{d}y\cos\theta + \tau_{xy} t\mathrm{d}y\sin\theta - \tau_{xy} t\mathrm{d}x\cos\theta = 0$$

将 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\sin\theta$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s\cos\theta$ 代入，得到

$$\tau(\mathrm{d}s) = \sigma_x(\mathrm{d}s)\sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}(\mathrm{d}s)\sin^2\theta + \tau_{xy}(\mathrm{d}s)\cos^2\theta$$

引用关系 $\cos2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$、$\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，上式成为

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2}\sin2\theta + \tau_{xy}\cos2\theta \tag{2}$$

于是，将作用在与 x 轴倾斜 θ 角任意斜截面上的切应力 τ 表示为 σ_x、τ_{xy} 及 θ 的函数。

(b)为了求得法应力 σ 的最大值，认为 θ 是变化的，将(1)式对 θ 求导并令导数为零，有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\theta} = \sigma_x\sin2\theta + 2\tau_{xy}\cos2\theta = 0$$

使得法应力取极大、极小值的 θ 角为

$$\tan2\theta_p = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_x/2} \tag{3}$$

由 θ_p 定义的平面称为主平面，作用在这些平面上的法应力称为主应力。在所考虑的单元之内，它们将是最大和最小的法应力，主应力的数值易于由(3)式的图示法得到，如图 16-17。显然角 $2\theta_p$ 中的任一个的正切都应是(3)式的数值。(3)式有两个解，因而 $2\theta_p$ 有两个值(相差 180°)，亦即有两个 θ_p 值，彼此相差 90°。要指出的是，图 16-17 中的三角形与三角形单元体没有直接关系，单元体的分离体图前面已经考虑过。

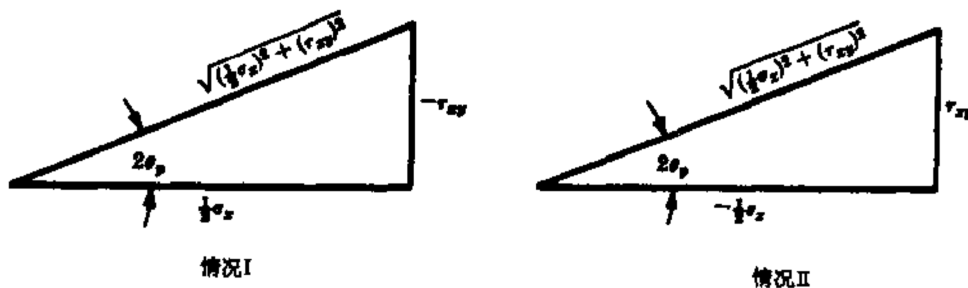


图 16-17

由图 16-17 得到的 $\sin2\theta_p$ 和 $\cos2\theta_p$ 的数值，代入(1)式求得法应力的最大和最小值。注意到

$$\sin2\theta_p = \frac{\mp\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2}}, \qquad \cos2\theta_p = \frac{\pm\sigma_x/2}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

式中上面的符号适合于情况 I，下面的符号适合于情况 II。由(1)式可以得到

$$\sigma = (\sigma_x/2) \mp (\sigma_x/2)\frac{(\sigma_x/2)}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2}} \mp \frac{(\tau_{xy})^2}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{4}$$

$$= (\sigma_x/2) \pm \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

最大的法应力为

$$\sigma_{\max} = (\sigma_x/2) + \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{5}$$

最小的法应力为

$$\sigma_{\min} = (\sigma_x/2) - \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{6}$$

由(5)、(6)式给出的应力称为主应力，它们作用在由(3)式定义的主平面内。将由(3)式确定的一个 θ_p 代入(1)式，即可得到作用在该平面内的一个主应力，另外一个主应力自然作用在另外一个主平面内。将由(3)式和图 16-17 确定的 $2\theta_p$ 代入(2)式，即可看出作用在主平面上的剪应力等于零。

(c)为了求得剪应力的最大值，可以认为 θ 是变化的，将(2)式对 θ 求导数并令其等于零，有

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \sigma_x\cos2\theta - 2\tau_{xy}\sin2\theta = 0$$

给出剪应力最大值的 θ 角，为

$$\tan2\theta_S = \frac{(\sigma_x/2)}{\tau_{xy}} \tag{7}$$

由此式两个解答定义的平面就是极值剪应力作用的平面。

(7)式的图形表示法也是很方便的，满足(7)式的角 $2\theta_S$ 可以表示为图16-18。可以看出

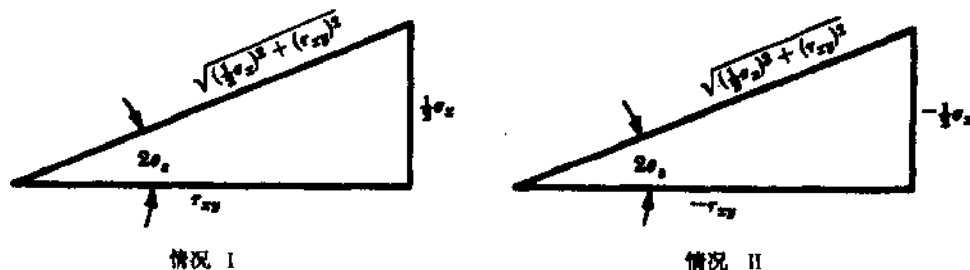


图 16-18

$$\sin2\theta_S = \frac{\pm(\sigma_x/2)}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}}, \qquad \cos2\theta_S = \frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

式中上面的符号(+)适合于情况 I，下面的符号(-)适合于情况 II。将这些数值代入(2)式，得到

$$\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix} = (\sigma_x/2)\frac{\pm(\sigma_x/2)}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}} + (\tau_{xy})\frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

$$= \pm\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{8}$$

式中"+"号表示最大切应力，"-"号表示最小剪应力。

如果将(3)式和(7)式作一比较，显然可知 $2\theta_p$ 和 $2\theta_S$ 相差 90°，这是因为这些角度的正切互为负倒数。因此由角度 θ_p 和 θ_S 定义的平面相差 45°，亦即最大剪应力平面与最大法应力平面相差 45°。

求解最大剪应力平面上的法应力也是很有意义的，这样的平面由(7)式定义。如果将 $\sin2\theta_S$ 和 $\cos2\theta_S$ 代入(1)式，有

$$\sigma = \frac{1}{2}\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_x\frac{\pm\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}} + (\tau_{xy})\frac{\pm(\sigma_x/2)}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}} = \frac{\sigma_x}{2} \tag{9}$$

亦即，在极值剪应力的每个平面上法应力的数值均为 $(\sigma_x/2)$。

题 16.8　讨论题 16.7 中分析的图形表示法。

解　☞ 对于给定的 σ_x、τ_{xy} 值，图形表示法的步骤如下

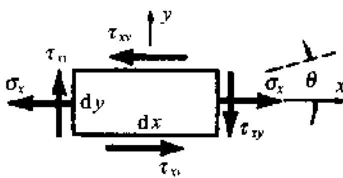


图 16-19

1. 引入一个直角坐标系，水平轴表示法应力，铅直轴表示剪应力。两轴所使用的比例尺应是相同的。
2. 参照在题 16.7 中考虑过的原始单元体，并重新画在图 16-19 中。引用如下符号规则：使单元体顺时针转动的剪应力为正值，使单元体逆时针转动的剪应力为负值。因此，在图 16-19 中，铅直边上的剪应力是正的，水平边上的剪应力是负的。此外，拉伸法应力是正的，压缩的法应力是负的。
3. 对于给定的 σ_x 和 τ_{xy}，在图中标注 b 点，铅垂直平面上的剪应力 τ_{xy} 是正的（σ_x 也作用在该界面上），因此在图 16-20 中这个值应画作正的，同时假设 σ_x 是拉应力。尽管此处所讲的方法当 σ_x 是负值时也是正确的。

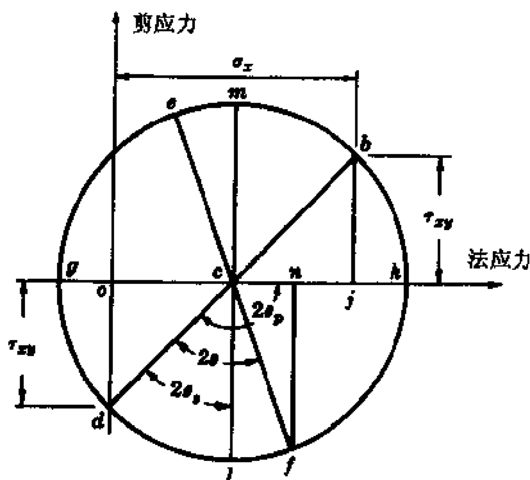


图 16-20

4. 其次用同样的方法在铅直轴的负数边标注 τ_{xy} 的 d 点。此点对应单元体水平界面上的负值剪应力及零值法应力。
5. 画直线 $\overline{bd}$，画出中点 c。以 c 为中心，cb 为半径画一个圆，此圆即为熟知的莫尔应力圆。

首先要说明：应力圆水平直径上的 g 点和 h 点表示主应力。为此，注意到 c 点位于与座标原点相距 $(\sigma_x/2)$ 处，由直角三角形关系，有

$$(\overline{cd})^2 = (\overline{oc})^2 + (\overline{od})^2, \quad 或 \quad \overline{cd} = \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

此外，还有 $\overline{cd} = \overline{ch} = \overline{cg}$，因此点 h 的 x 坐标为 $\overline{oc} + \overline{ch}$，即

$$(\sigma_x/2) + \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

但是，这个表达式恰好就是最大的主应力，与题 16.7 中的(5)式是一致的。类似，点 g 的 x 坐标是 $\overline{oc} - \overline{cg}$，此量是负的，$\overline{og}$ 应位于原点左方。g 点表示压应力，且为

$$(\sigma_x/2) - \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

这正是最小主应力的公式，与题 16.7 中的(6)式是一致的。因此，g 点和 h 点表示原始单元体的主应力。我们看到，$\tan(\angle ocd) = \tau_{xy}/(\sigma_x/2)$，但是由题 16.7 中的(3)式，有 $\tan 2\theta_p = -\tau_{xy}/(\sigma_x/2)$，将这两个式子进行比较，可知因为 $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$，有 $\angle hcd = 2\theta_p$。于是，由直径 $\overline{bd}$（相应于 x、y 方向的应力）发生一个逆时针转动到达表示主平面的直径 $\overline{gh}$，主应力就作用在此主平面上，主平面与 x 轴成 θ_p 角。

对于寻找主应力，莫尔圆是一个很方便的工具，因为对于给定的 σ_x、τ_{xy} 数据，很快就能作一个圆，然后测量 $\overline{og}$ 和 $\overline{oh}$ 即可。使用与画 σ_x、τ_{xy} 时同样的比例尺，即可由这些横坐标表示主应力。

显然，由 $\overline{cd} = \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$ 表示的莫尔圆半径相应于最大的剪应力，如同题 16.7 中的(8)式。实际上，任意平面上的剪应力都是用莫尔圆上的纵坐标表示的，因而我们应认为半径 $\overline{cl}$ 的 $\overline{cm}$ 表示极值剪应力。很明显，$\angle dcl = 2\theta_S$，因此这表明，最大法应力平面与最大剪应力平面之间夹

角的 2 倍(即$\angle lch$)是 90°，亦即由最大法应力平面到最大剪应力平面要转过 45°。

直径$\overline{bd}$的端点表示作用在原始x轴和y轴方向上的应力。下面我们要说明，任意其他直径，例如$\overline{ef}$(与$\overline{bd}$成任意角度 2θ)，表示与x轴倾斜θ的平面上的应力。为此，我们指出，f点的横坐标为

$$\begin{aligned}\sigma &= \overline{oc} + \overline{cn} = (\sigma_x/2) + \overline{cf}\cos(2\theta_p - 2\theta)\\ &= (\sigma_x/2) + \overline{cf}(\cos2\theta_p\cos2\theta + \sin2\theta_p\sin2\theta)\\ &= (\sigma_x/2) + \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + \tau_{xy}^2}(\cos2\theta_p\cos2\theta + \sin2\theta_p\sin2\theta)\end{aligned}$$

根据对莫尔圆中$\triangle_{cod}$的考查，显然有

$$\sin2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}} \quad 及 \quad \cos2\theta_p = \frac{-(\sigma_x/2)}{\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}} \tag{1}$$

将由这两个方程代入前式，得到

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos2\theta + \tau_{xy}\sin2\theta$$

这恰好是与x轴倾斜θ角平面上的法应力，与题 16.7 中的(1)式一致。

f点的纵坐标由下式给出

$$\begin{aligned}\tau &= \overline{nf} = \overline{cf}\sin(2\theta_p - 2\theta)\\ &= \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}(\sin2\theta_p\cos2\theta - \cos2\theta_p\sin2\theta)\end{aligned}$$

将(1)式代入上式，有

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma_x\sin2\theta + \tau_{xy}\cos2\theta$$

这恰好是与x轴倾斜θ角平面上的剪应力，与题 16.7 中的(2)式一致。

因此，莫尔圆上f点的坐标表示与x轴倾斜θ角平面上的法应力和剪应力。

题 16.9　物体内的平面单元体承受x方向法应力 12000 lbf/in²，切应力 4000 lbf/in²，如图 16-21。(a)求与法应力倾斜 30°平面上的法应力和切应力。(b)求最大法应力和最小法应力的数值与方向。

解　(a)按题 16.7 的处理方法，本题中的σ_x = 12000 lbf/in²，τ_{xy} = 4000 lbf/in²。由题 16.7 可知，与x轴倾斜θ角的平面上的法应力为

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos2\theta + \tau_{xy}\sin2\theta$$

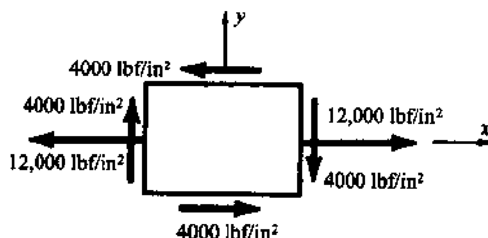


图 16-21

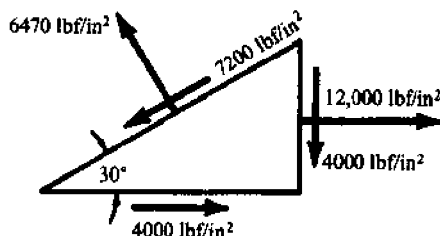


图 16-22

将σ_x、τ_{xy}的数值代入上式，当θ = 30°时，有

$$\sigma = (12000/2) - (12000/2)\cos60° + 4000\sin60° = 6470\ (\text{lbf/in}^2)$$

根据题 16.7 的(2)式，与x轴倾斜θ角的平面上的剪应力是

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2}\sin2\theta + \tau_{xy}\cos2\theta$$

将σ_x、τ_{xy}的数值代入上式，当θ = 30°时，有

$$\tau = (12000/2)\sin60° + 4000\cos60° = 5200 + 2000 = 7200\ (\text{lbf/in}^2)$$

倾斜平面内的法应力及剪应力正方向如图 16-16 所示，根据这个符号规则，30°倾斜面上的力如图 16-22 所示。

(b)本单元内的主应力，亦即最大和最小法应力的数值，是由题 16.7 中的(5)式和(6)式给出

的。由(5)式,最大的法应力为

$$\sigma_{max} = \sigma_x/2 + \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$
$$= 6000 + \sqrt{(6000)^2 + (4000)^2} = 13220\ (\text{lbf/in}^2)$$

由(6)式,最小的法应力为

$$\sigma_{min} = \sigma_x/2 - \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$
$$= 6000 - \sqrt{(6000)^2 + (4000)^2} = -1220\ (\text{lbf/in}^2)$$

这些应力的作用平面的方向是由题 16.7 的(3)式给出的,即

$$\tan 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x/2)} = -\frac{4000}{6000} = -\frac{2}{3}$$

因为 $\tan 2\theta_p < 0$,所以 $2\theta_p$ 的两个解答位于第二和第四象限。在第二象限内 $2\theta_p = 146°20'$;在第四象限 $2\theta_p = 326°20'$,最终得到由 $\theta_p = 73°10'$ 和 $\theta'_p = 163°10'$ 确定的主平面。如果取 $\theta_p = 73°10'$,将其与 σ_x、τ_{xy} 的数值代入题 16.7 中的(1)式,有

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{\sigma_x}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = 6000 - 6000\cos 146°20' + 4000\sin 146°20'$$
$$= 6000 - 6000(-0{:}833) - 4000(0.554) = 13220\ (\text{lbf/in}^2)$$

于是可知,主应力 13220 lbf/in^2 发生在与 x 倾斜 73°10′的斜面上;两个主应力如图 16-23 所示。正如题 16.7 所讲过的,主平面内的切应力为零。

(c)最大和最小剪应力由题 16.7 的(8)式给出,即

$$\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix} = \pm\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{(6000)^2 + (4000)^2} = \pm 7220\ (\text{lbf/in}^2)$$

最大和最小剪应力作用平面的方向由题 16.7 的(7)式给出,即

$$\tan 2\theta = \frac{(\sigma_x/2)}{\tau_{xy}} = \frac{6000}{4000} = \frac{3}{2}$$

因为 $\tan 2\theta_s > 0$,所以 $2\theta_s$ 在第一和第三象限,即 $2\theta_s = 56°20'$,$2\theta'_s = 236°20'$ 或 $\theta_s = 28°10'$,$\theta'_s = 118°10'$。与 x 轴倾斜 θ 角的平面上的切应力是由题 16.7 的(2)式给出的

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

代入 $\sigma_x = 12000\ \text{lbf/in}^2$,$\tau_{xy} = 4000\ \text{lbf/in}^2$ 和 $\theta = 28°10'$,有

$$\tau = (12000/2)\sin 56°20' + (4000)\cos 56°20' = 7220\ (\text{lbf/in}^2)$$

亦即,28°10′的倾斜面上的剪应力是正的。正向切应力如图 16-6 所示。

最大剪应力平面上的法应力由题 16.7 的(9)式给出,即

$$\sigma = \sigma_x/2 = 12000/2 = 6000\ \text{lbf/in}^2$$

作用在最大剪应力平面上的法应力如图 16-24 所示。

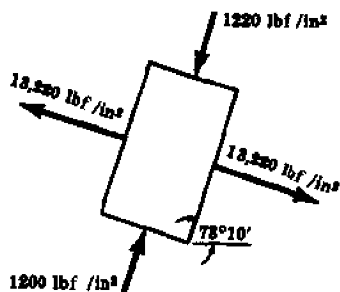


图 16-23

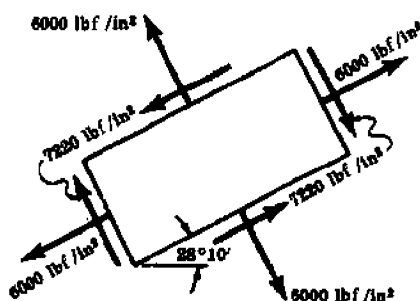


图 16-24

题 16.10 平面单元体承受应力如图 16-25 所示。试利用莫尔圆法求(a)主应力及方向(b)最大剪应力及其作用平面的方向。

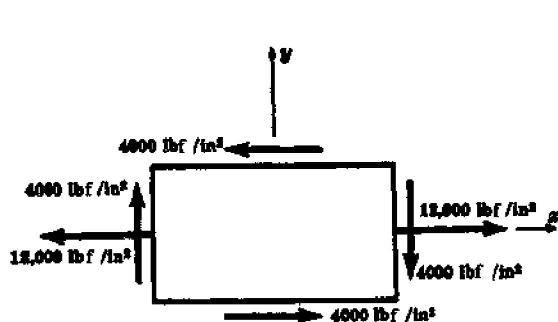


图 16-25

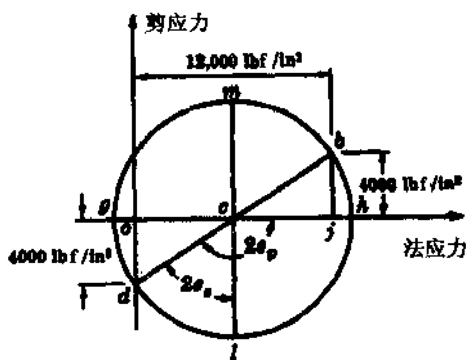


图 16-26

解　根据题 16.8 中讲述的要点，构造莫尔圆的步骤如下，

我们知道，给定单元的铅直界面上的剪应力是正的，水平界面的剪应力是负的；铅直界面上 $\sigma_x=12000$ lbf/in²、$\tau_{xy}=4000$ lbf/in² 的应力，画在图 16-26 中为 b 点。水平界面上 $\tau_{xy}=4000$ lbf/in² 和 $\sigma_y=0$ 的应力条件，画在图中为 d 点。画出直线 $\overline{bd}$，找到其中点 c。

以 c 为圆心，$\overline{cb}=\overline{cd}$ 为半径画一个圆，此圆即为莫尔圆。直径 $\overline{bd}$ 的端点表示原始单元体上的应力条件。

(a)如题 16.8 中讲过的，主应力由点 g 和 h 表示，主应力既可由图 16-26 中测量，也可以用下述方法计算：

c 点的坐标是 6000，于是 $\overline{cd}=\sqrt{(6000)^2+(4000)^2}=7220$。因而最小主应力为

$$\sigma_{\min}=\overline{og}=\overline{oc}-\overline{cg}=6000-7220=-1220\ (\text{lbf/in}^2)$$

最大的主应力是

$$\sigma_{\max}=\overline{oh}=\overline{oc}+\overline{ch}=6000+7220=13200\ (\text{lbf/in}^2)$$

主方向的 $2\theta_p$ 为

$$\tan 2\theta_p=-\frac{4000}{6000}=-\frac{2}{3}\quad \text{或}\quad \theta_p=73°10'$$

测量莫尔圆中的 $\angle dch$ 也可以得到此 θ_p 值，由此可知，由 h 点表示的主应力作用在与原始 x 轴成 73°10′的平面内，各主应力如图 16-27(a)所示。由莫尔圆也可以看出，作用在这些平面上的剪应力是零，原因是 g 点和 h 点都位于莫尔圆的水平轴线上。

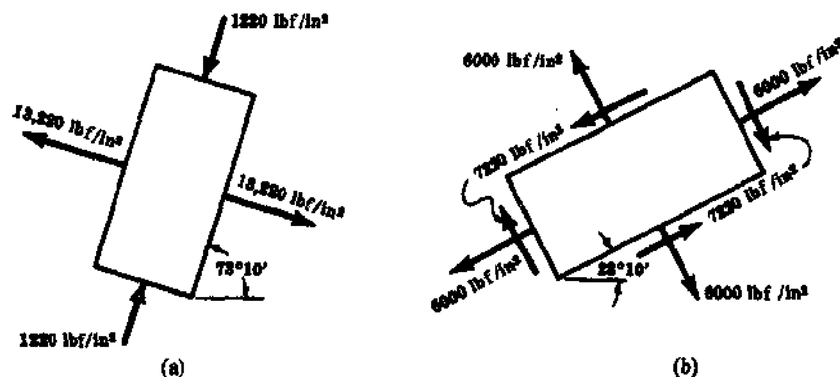


图 16-27

(b)在莫尔圆中，最大剪应力由 $\overline{cl}$ 表示，前已发现，此半径等于 7220 lbf/in²。$2\theta_s$ 角既可以直接由图 16-26 测量得到，也可以由前面已经得到的 $2\theta_p$ 中减去 90°得到，这给出 $2\theta_s=56°20'$，$\theta_s=28°10'$。由 l 点表示的剪应力是负的，因此作用在 28°10′斜面上的剪应力使单元体逆时针转动。此外，l 的横坐标是 6000 lbf/in²，此即为作用在最大剪应力平面上的法应力。最大剪应力如图 16-27(b)所示。

题 16.11　如图 16-28 所示，单元体在 x 方向承受法向压应力 12000 lbf/in²，剪应力 4000 lbf/

in^2;试求(a)与法应力倾斜30°角的斜面上的法应力和剪应力,(b)单元体内最大法应力和最小法应力及各自的方向(c)最大剪应力的数值与方向。

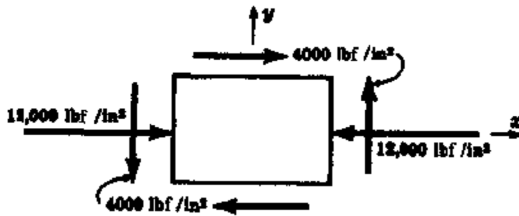


图 16-28

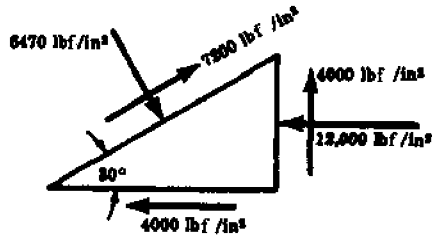


图 16-29

解 ☞ (a)根据题16.7的符号规则,此题应有 $\sigma_x = -12000\ \text{lbf/in}^2$, $\tau_{xy} = -4000\ \text{lbf/in}^2$ 由题16.7中的(1)式,可知30°斜面上的剪应力为

$$\sigma = -12000/2 - (-12000/2)\cos 60° - 4000\sin 60° = -6470\ (\text{lbf/in}^2)$$

由题16.7中的(2)式,可知30°斜面上的剪应力为

$$\tau = (-12000/2)\sin 60° - 4000\cos 60° = -7200\ (\text{lbf/in}^2)$$

斜面上的法应力及剪应力的正方向如图16-16所示,按此符号规则可画出30°斜面上的应力如图16-29所示。

(b)主应力的数值是由题16.7中的(5)式及(6)式给出的,由(5)式

$$\sigma_{max} = -12000/2 + \sqrt{(-12000/2)^2 + (-4000)^2} = 1220\ (\text{lbf/in}^2)$$

由(6)式

$$\sigma_{min} = -12000/2 - \sqrt{(-12000/2)^2 + (-4000)^2} = -13220\ (\text{lbf/in}^2)$$

拉伸主应力通常被认为是最大的,尽管它的绝对值较压应力绝对值小。

主应力作用平面的方向由题16.7中的(3)式给出,即

$$\tan 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x/2)} = -\frac{-4000}{-12000/2} = -\frac{2}{3}$$

因为 $\tan 2\theta_p < 0$,所以由 $2\theta_p$ 确定的角在第二、第四象限,即 $2\theta_p = 146°20'$, $2\theta'_p = 326°20'$,亦即主平面由 $\theta_p = 73°10'$ 和 $\theta'_p = 163°10'$ 确定。如果将 $\theta_p = 73°10'$ 及给定的 σ_x、τ_{xy} 的值代入题16.7中的(1)式,有

$$\sigma = (\sigma_x/2) - (\sigma_x/2)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$= -12000/2 - (-12000/2)\cos 146°20' - 4000\sin 146°20' = -13220\ (\text{lbf/in}^2)$$

因此,主应力 $-13220\ \text{lbf/in}^2$ 发生在与 x 轴倾斜73°10′的斜面上。主应力如图16-30所示,在这些平面上的剪应力等于零。

(c)极值剪应力的数值由题16.7中的(8)式给出,即

$$\tau_{max} = \pm\sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$
$$= \pm\sqrt{(-12000/2)^2 + (-4000)^2}$$
$$\tau_{min} = \pm 7220(\text{lbf/in}^2)$$

这些剪应力作用平面的方向由题16.7中的(7)式给出,即

$$\tan 2\theta_s = \frac{(\sigma_x/2)}{\tau_{xy}} = \frac{-12000/2}{-4000} = \frac{3}{2}$$

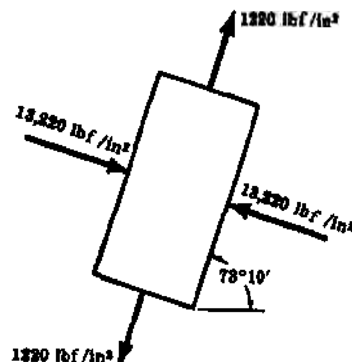


图 16-30

于是 $2\theta_s = 56°20'$, $2\theta'_s = 236°20'$,或 $\theta_s = 28°10'$, $\theta'_s = 118°10'$。由题6.7中的(2)式,作用在与 x 轴成 θ 角的斜面内的剪应力为

$$\tau = (\sigma_x/2)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$
$$= (-12000/2)\sin 56°20' - 4000\cos 56°20'$$
$$= -7220\ (\text{lbf/in}^2)$$

亦即在 28°10′斜面上的剪应力是负的。正向的剪应力如图 16-16 所示。

最大剪应力平面内的法应力由题 16.7 中的(9)式给出，即

$$\sigma = \sigma_x/2 = -12000/2 = -6000\ (\text{lbf/in}^2)$$

每个最大剪应力平面上的法应力如图 16-31 所示。

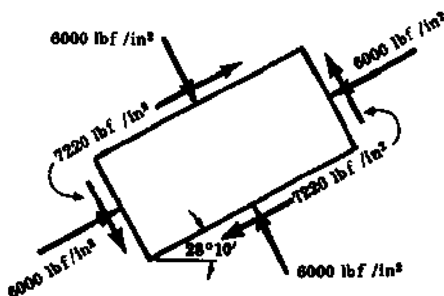


图 16-31

题 16.12 平面单元体承受的应力如图 16-32 所示。试利用莫尔圆，求(a)主应力及主方向(b)最大剪应力及其作用平面的方向。

解 构造莫尔圆的过程已在题 16.8 中给出，当时曾依照如下的过程。给定单元体铅直表面的剪应力是负的，水平界面上的剪应力是正的。铅直界面上的应力 $\sigma_x = -12000\ \text{lbf/in}^2$，$\tau_{xy} = -4000\ \text{lbf/in}^2$，画在图 16-33 的 b 点，水平界面上的应力 $\tau_{xy} = 4000\ \text{lbf/in}^2$ 和 $\sigma_y = 0$ 画在图 16-33 中的 d 点画出线段$\overline{bd}$及其中点 c。以 c 为中心，$\overline{cb} = \overline{cd}$为半径画一个圆，此即为莫尔图。直径$\overline{bd}$的端点表示单元体原始界面(即图 16-32 中的界面)上的应力情况。

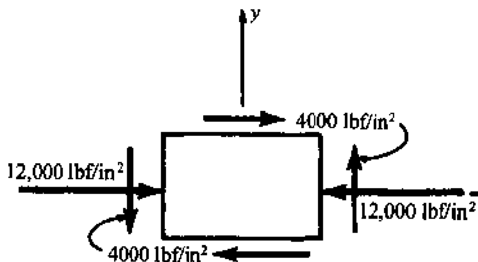


图 16-32

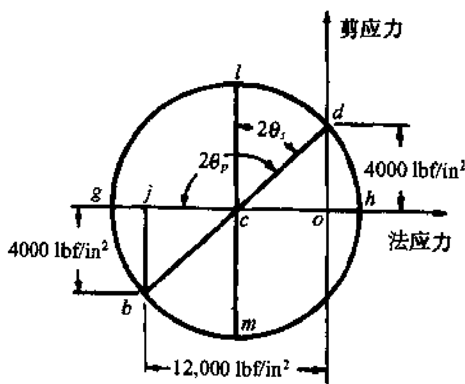


图 16-33

(a)正如在题 16.8 中所指出的，主应力是由点 g 和 h 表示的(图 16-33)。它们既可以由图中直接测量，也可以由 c 点的坐标 -6000 和$\overline{cd} = \sqrt{(6000)^2 + (4000)^2} = 7220$ 来计算，最小主应力是

$$\sigma_{\min} = \overline{og} = \overline{oc} + \overline{cg} = -6000 - 7220 = -13220\ (\text{lbf/in}^2)$$

最大主应力是

$$\sigma_{\max} = \overline{oh} = \overline{ch} - \overline{co} = 7220 - 6000 = 1220\ (\text{lbf/in}^2)$$

前面所指出的 $2\theta_p$ 是由 $\tan 2\theta_p = -4000/6000 = -2/3$ 给出的，因为 $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$，所以 $2\theta_p = 146°20'$，$\theta_p = 73°10'$。这个值也可以直接测量莫尔圆上的$\angle dcg$ 得到。由 g 点表示的主应力 $-13220\ \text{lbf/in}^2$ 作用在与 x 轴倾斜 73°10′的平面上。各主应力如图 16-34 所示。因为 g 点和 h 点位于莫尔圆的水平轴线上，显然可知图 16-34 单元体界面上的剪应力等于零。

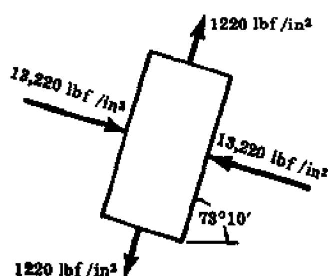


图 16-34

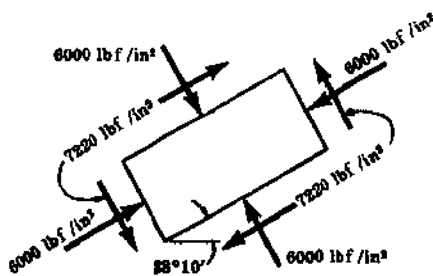


图 16-35

(b)在莫尔圆上用半径$\overline{cl}$表示最大剪应力,已知其等于 7220 lbf/in²。角 $2\theta_s$ 既可以由应力圆直接测量得到,也可以由 $2\theta_p$ 中减去 90°得到,可得出 $\theta_s=28°10'$。由点 L 表示的剪应力是正的,因此在 28°10′平面上的剪应力使单元体顺时针转动。此外,由莫尔圆可知 l 点的横坐标是 -6000 lbf/in²,此即为发生在最大剪应力平面上的法应力,如图 16-35 所示。

题 16.13 考虑一个取自受力物体的平面单元体。通常,这样的单元体在其两个相互垂的界面上同时受到法应力和剪应力的共同作用。将这些应力记作 σ_x、σ_y 和 τ_{xy},其正方向如图 16-36 所示。(a)试求与 x 轴倾斜 θ 角的平面上的法应力和剪应力,(b)此外还求最大和最小法应力以及它们作用的方向,(c)最后求最大剪应力及方向。

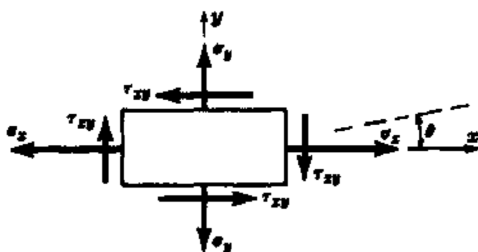


图 16-36

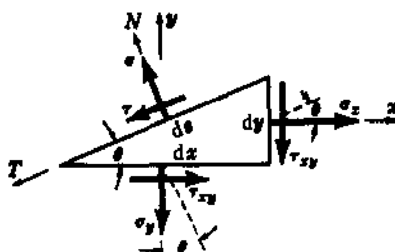


图 16-37

解 ☞ (a)显然,待求的作用在斜截面上的应力是图示单元内部的量。遵照通常的作法,作一个切面,使待求的量对于新切面来说成为外部的量。我们沿与 x 轴倾斜 θ 角的平面切割原始单元体,得到图 16-37 所示的三角形单元体。因为已移走矩形单元体的部分材料,必须考虑它对保留的三角形单元体的影响,这影响通常是作用在倾斜面上的法向力和剪向力,分别用 σ 和 τ 表示相应于这些力的法应力和剪应力,于是,问题就归结为,由已知应力 σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 去求未知应力 σ 和 τ,在第 17 章中将讲述求解 σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 的方法。要特别指出的是,分离体图(图 16-37)表明作用在个界面上的是应力,而不是力,且假设每一个应力都是均匀地分布在它所作用的平面上。

引入与图示倾斜平面垂直和相切的 N 轴和 T 轴,并令 t 表示单元体在垂直于书纸方向上的厚度。将 N 方向的力求和,平衡方程为

$$\sum F_N = \sigma t\mathrm{d}s - \sigma_x t\mathrm{d}y\sin\theta - \tau_{xy} t\mathrm{d}y\cos\theta - \sigma_y t\mathrm{d}x\cos\theta - \tau_{xy} t\mathrm{d}x\sin\theta = 0$$

在平衡方程中换入 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}s\sin\theta$、$\mathrm{d}x=\mathrm{d}s\cos\theta$,得到

$$\sigma\mathrm{d}s = \sigma_x\mathrm{d}s\sin^2\theta + \sigma_y\mathrm{d}s\cos^2\theta + 2\tau_{xy}\mathrm{d}s\sin\theta\cos\theta$$

引入恒等式 $\sin^2\theta=(1-\cos2\theta)/2$、$\cos^2\theta=(1+\cos2\theta)/2$ 、$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$,得到

$$\sigma = \sigma_x(1-\cos2\theta)/2 + \sigma_y(1+\cos2\theta)/2 + \tau_{xy}\sin2\theta$$

或

$$\sigma = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos2\theta + \tau_{xy}\sin2\theta \tag{1}$$

因而可知:作用在与 x 轴倾斜 θ 角的任意斜面上的法应力 σ 是 σ_x、σ_y、τ_{xy} 和 θ 的函数。

其次,考虑作用在三角形单元体沿 T 方向的力之和,有

$$\sum F_T = \tau t\mathrm{d}s - \sigma_x t\mathrm{d}y\cos\theta + \tau_{xy} t\mathrm{d}y\sin\theta - \tau_{xy} t\mathrm{d}x\cos\theta + \sigma_y t\mathrm{d}x\sin\theta = 0$$

与前面处理方法相同,替换式中的 dx 和 dy,得到

$$\tau ds = \sigma_x ds\sin\theta\cos\theta - \tau_{xy}ds\sin^2\theta + \tau_{xy}ds\cos^2\theta - \sigma_y ds\sin\theta\cos\theta$$

引入前述的三个恒等式及 $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$,最后的方程成为

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin2\theta - \tau_{xy}\cos2\theta \tag{2}$$

因而可知:作用在与 x 轴倾斜 θ 角任意斜面上的剪应力 τ 也是 σ_x、σ_y、τ_{xy} 和 θ 的函数。

(b)为了求出法应力 σ 的最大值,可以假设 θ 角是变化的,将(1)式对 θ 求微分,并令其导数等于零,即

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y)\sin2\theta + 2\tau_{xy}\cos2\theta = 0$$

使法应力取得最大、最小值的 θ 值由下式给出:

$$\tan2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \tag{3}$$

由 θ_p 定义的平面称为主平面,作用在主平面上的应力称为主应力,它们是被考虑单元体内法应力的最大和最小值。考虑如图 16-38 所示的、(3)式的图形表示法,很容易得到主应力的数值。显然,两个角的正切值都会满足(3)式,因此(3)式有两个解,即两个 $2\theta_p$(相差 180°)或两个 θ_p(相差 90°)。要注意的是,图 16-38 并不提供三角形单元体的直接关系,该单元体的分离体图如图 16-37 所示。

将由上述两个图得出的 $\sin2\theta_p$ 和 $\cos2\theta_p$ 代入(1)式,给出法应力的最大、最小值。注意到

$$\sin2\theta_p = \frac{\mp\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}},\cos2\theta_p = \frac{\pm(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

式中,上行符号适用于情况Ⅰ,下行符号适用于情况Ⅱ,由(1)式,得到

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{4}$$

最大法应力为

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{5}$$

最小法应力为

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{6}$$

由(5)式、(6)式给出的就是主应力,它们发生在由(3)式定义的主平面上。将由(3)式解出的一个 θ_p 代入(1)式,即可判定两个主应力中的那一个作用在这个平面上,另一个主应力必然作用在另一个主平面上。

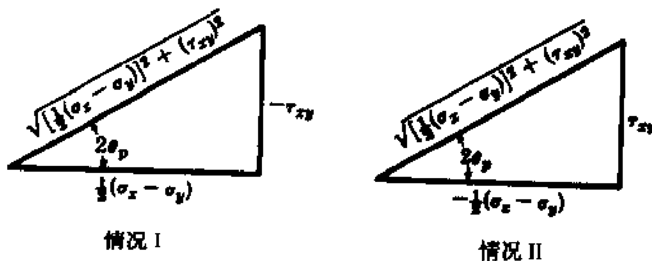


图 16-38

(c)将由(3)式、或由图 16-38 解出的 $2\theta_p$ 代入(2)式,即可知主平面上的剪应力等于零。令

$$\frac{d\tau}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y)\cos2\theta - 2\tau_{xy}\sin2\theta = 0$$

给出剪应力最大值的 θ 值,由下式解出:

$$\tan2\theta_s = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \tag{7}$$

此式两个解答定义的平面就是极值剪应力作用的平面。

(7)式的图形表示法很方便，满足该式的 $2\theta_s$ 的两个值可表示为图 16-39。由这些图有

$$\sin 2\theta_s = \frac{\pm(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}},$$

$$\cos 2\theta_s = \frac{\pm \tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}}$$

式中上行符号(+号)适用于情况Ⅰ，下行符号(−号)适用于情况Ⅱ。将此数值代入(2)式，得到

$$\left.\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{8}$$

此处"+"表示最大剪应力，"−"表示最小剪应力。

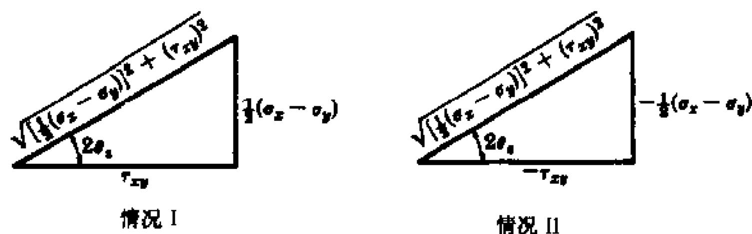


图 16-39

如果将(3)式和(7)式作一比较，显然可知 $2\theta_p$ 和 $2\theta_s$ 相差 90°，因为这两个角度的正切函数互为负倒数。因此，由 θ_p 和 θ_s 定义的平面相差 45°，亦即极值剪应力平面与极值法应力平面成 45°角。

求出极值剪应力平面上的法应力也是很有意义的，这些平面是由(7)式定义的，如果将 $\sin 2\theta_s$ 和 $\cos 2\theta_s$ 的值代入(1)式，得法应力

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \tag{9}$$

亦即在每一个极值剪应力作用平面内，法应力为 $(\sigma_x + \sigma_y)/2$。

题 16.14 讨论题 16.13 中解析式的图形表示法。

解 ☞ 对于给定的 σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 值，按如下方法作图形表示法。

1. 引入一个直角坐标系，用横坐标表示法应力、纵坐标表示剪应力。两个坐标轴所使用的比例尺应是相同的。
2. 参照题 16.13 中考虑过的原始矩形单元，重新画在图 16-40 中。使用的符号法则为：使单元体顺时针转动的剪应力为正，使单元体逆时针转动的剪应力为负。图 16-40 中铅直界面上的剪应力是正的，水平界面上的剪应力是负的。此外，对于法应力，拉伸为正，压缩为负。

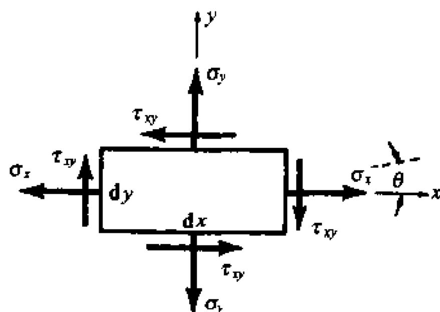


图 16-40

3. 首先，对于给定的 σ_x、τ_{xy} 值，在图上标出相应的 b 点，铅直界面上的剪应力 τ 是正的(σ_x 也作用此界面上)，因此在图 16-41 中标注此值为正数。
4. 对于给定的 σ_y 和 τ_{xy} 值，用同样的方法在图中标注相应的 d 点。在画出图 16-41 时，基于假设 $\sigma_y > \sigma_x$，尽管 $\sigma_y < \sigma_x$ 也可同样处理。水平界面上的剪应力 τ 是负的(σ_y 也作用此界面上)，因此，这个值标注在参考轴的下面。

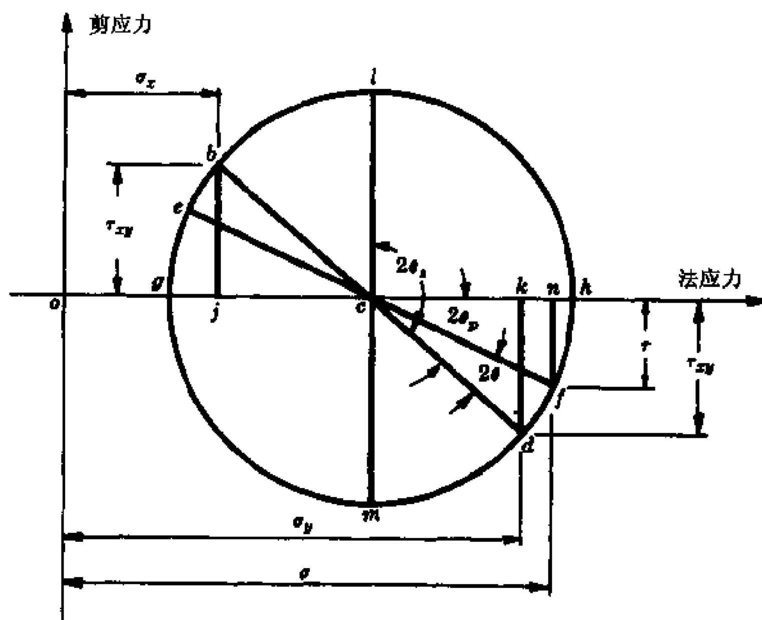


图 16-41

5. 其次画线段$\overline{bd}$，标注其中点 c。并以 c 为中心，$\overline{cb}$为半径画一个圆，此圆即为莫尔圆。

首先我们要说明，莫尔圆的水平直径端点 g 和 h 表示主应力。为此，注意到 c 点位于与坐标原点相距$(\sigma_x+\sigma_y)/2$ 处，且线段$\overline{jk}$的长度是$(\sigma_y-\sigma_x)$，因此$\overline{ck}$的长度是$(\sigma_y-\sigma_x)/2$。由直角三角形关系式，有

$$(\overline{cd})^2=(\overline{ck})^2+(\overline{kd})^2 \quad 或 \quad \overline{cd}=\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)/2]^2+(\tau_{xy})^2}$$

且$\overline{cg}=\overline{ch}=\overline{cd}$于是，$h$ 点的 x 坐标是$(\overline{oc}+\overline{ch})$，或$(\sigma_x+\sigma_y)/2+\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)/2]^2+(\tau_{xy})^2}$此式恰好是题 6.13 中(5)式给出的最大主应力。类似地，g 点的 x 坐标是$\overline{oc}-\overline{gc}$或

$$(\sigma_x+\sigma_y)/2-\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)/2]^2+(\tau_{xy})^2}$$

此式恰好是题 16.13 中(6)式给出的最小主应力。可以看出，$\tan\angle kcd=\overline{dk}/\overline{ck}=\tau_{xy}/[(\sigma_x-\sigma_y)/2]$。但是由题 6.13 中的(3)式，有

$$\tan 2\theta_p=-\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)/2}$$

将这两关系式比较，可知$\angle kcd=2\theta_p$。亦即：由直径$\overline{bd}$(相应于 x、y 方向的应力)逆时针可转动到表示主平面的直径$\overline{gh}$，主应力作用在该平面上，主平面与 x 轴倾斜 θ_p 角。

对于给定的应力 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}，可以很快地作一个应力圆，用与 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}相同的比例尺测量$\overline{og}$和$\overline{oh}$的横坐标即可得到主应力，因此莫尔圆是求解主应力的方便工具。

现在可以看出，莫尔圆的半径$\overline{cd}=\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)/2]^2+(\tau_{xy})^2}$对应于题 16.13 中(8)式给出的极值剪应力。实际上，任意一个截面上的剪应力都可以用莫尔圆的纵座标表示，因此我们应认为半径线$\overline{cl}$和$\overline{cm}$表示极值剪应力。显然，$\angle dcl=2\theta_s$，这表明极值法应力和极值剪应力之间夹角的 2 倍等于 90°，因此极值剪应力平面与极值法应力平面的方向相差 45°。

显然，直径$\overline{bd}$的端点表示作用在初始 x、y 方向上的应力。现在我们要证明：任意的其他直径的端点，如直径$\overline{ef}$(与直径$\overline{bd}$成 2θ 角)的端点，表示与 x 轴倾斜 θ 角的斜面上的应力。为此，注意到 f 点的横坐标为

$$\begin{aligned}\sigma&=\overline{oc}+\overline{cn}=(\sigma_x+\sigma_y)/2+\overline{cf}\cos(2\theta_p-2\theta)\\&=(\sigma_x+\sigma_y)/2+\overline{cf}(\cos 2\theta_p\cos 2\theta+\sin 2\theta_p\sin 2\theta)\\&=(\sigma_x+\sigma_y)/2+\sqrt{[(\sigma_x+\sigma_y)/2]^2+\tau_{xy}^2}(\cos 2\theta_p\cos 2\theta+\sin 2\theta_p\sin 2\theta)\end{aligned}$$

但是由研究莫尔圆中 Δckd 可以看出

$$\sin 2\theta_p=\frac{\tau_{xy}}{\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)/2]^2+(\tau_{xy})^2}},\cos 2\theta_p=\frac{(\sigma_y-\sigma_x)/2}{\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)/2]^2+(\tau_{xy})^2}} \qquad (1)$$

将 τ_{xy}和(σ_y　σ_x)/2 的值代入前述方程，有

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

这恰好是题 6.13 中的(1)式导出的、与 x 轴倾斜 θ 角的平面上的法应力。

其次，注意到 f 点的纵坐标由下式给出：

$$\tau = \overline{nf} = \overline{cf}\sin(2\theta_p - 2\theta) = \overline{cf}(\sin 2\theta_p \cos 2\theta - \cos 2\theta_p \sin 2\theta)$$

$$= \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}(\sin 2\theta p \cos 2\theta - \cos 2\theta_p \sin 2\theta)$$

将由(1)式得到的 τ_{xy}和($\sigma_y - \sigma_x$)/2 代入此式，得到

$$\tau = \tau_{xy}\cos 2\theta + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta$$

这恰好是题 16.13 中(2)式导出的，与 x 轴倾斜 θ 角的平面上的剪应力。

因此，莫尔圆上的 f 点的坐标表示与 x 轴倾斜 θ 角的斜面上的法应力和剪应力。

题 16.15　承受图 16-42 所示应力作用的平面单元体。试求(a)主应力和主方向(b)极值剪应力及其作用平面的方向。

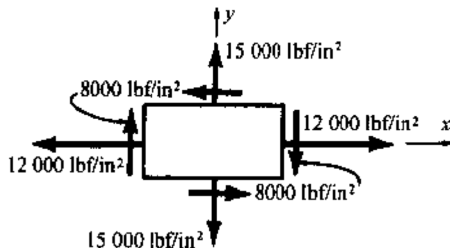


图 16-42

解　☞ (a)根据题 16.13 中的应力表示法，可有

$$\sigma_x = 12000 \text{ lbf/in}^2, \sigma_y = 15000 \text{ lbf/in}^2, \tau_{xy} = 8000 \text{ lbf/in}^2$$

根据题 16.13 中的(5)式，最大法应力为

$$\sigma_{max} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= (12000 + 15000)/2 + \sqrt{[(12000 - 15000)/2]^2 + (8000)^2}$$

$$= 13500 + 8150 = 21650 \text{ (lbf/in}^2)$$

根据题 16.13 中的(6)式，最小法应力为

$$\sigma_{min} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= 13500 - 8150 = 5350 \text{ (lbf/in}^2)$$

由题 16.13 中的(3)式可知，应力 21650 lbf/in² 和 5350 lbf/in² 作用的主平面方向为

$$\tan 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = -\frac{8000}{(12000 - 15000)} = 5.33$$

于是 $2\theta_p = 79°24'$、$259°24'$或 $\theta_p = 39°42'$、$129°42'$ 。

为了求得上述主应力中的哪一个作用在哪个平面之内，研究题 16.13 中的(1)式，具体地说亦即

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

将 $\theta = 39°24'$和σ_x、σ_y 及 τ_{xy}的给定值代入上式，得到

$$\sigma = (12000 + 15000)/2 - (12000 - 15000)/2 \cdot \cos 79°24' + 8000 \sin 79°24'$$

$$= 21650 \text{ (lbf/in}^2)$$

于是，沿主平面画出的单元体及相应的主应力如图 16-43 的示。在这些界面上的剪应力等于零。

(b)由题 16.13 中的(8)式可知，最大和最小剪应力为

$$\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix} = \pm\sqrt{\left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right]^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{\left[\frac{12000 - 15000}{2}\right]^2 + (8000)^2}$$

$$= \pm 8150\ (\text{lbf/in}^2)$$

由题 16.13 中的(7)式，可知极值剪应力作用平面由下式给出：

$$\tan 2\theta_s = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = -0.188$$

于是 $2\theta_s \doteq 169°24', 349°24'$ 或 $\theta_s = 84°42', 174°, 42'$。显然这些平面与最大和最小法应力作用平面成 45°角。

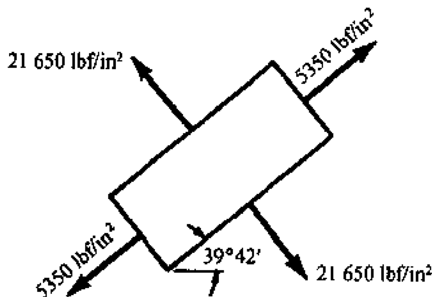


图 16-43

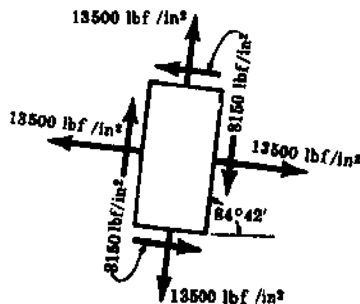


图 16-44

为了确定 82°42′的平面上剪应力是正的，或是负的，应使用题 16.13 中的(2)式，即

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y)/2 \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

将 $\theta = 84°42'$ 及 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 的给定值代入上式，得到

$$\tau = (12000 - 15000)/2 \cdot \sin 169°24' + 8000\cos 169°24'$$
$$= -8150\ (\text{lbf/in}^2)$$

负号表明，剪应力的方向与图 16-36 中设定的正方向相反。最后由题 16.13 中的(9)式可以得到极值剪应力平面内的法应力为

$$\tau = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (12000 + 15000) = 13500\ (\text{lbf/in}^2)$$

极值剪应力的单元体如图 16-44 所示。

题 16.16　平面单元体承受图 16-45 所示的应力。利用莫尔圆求(a)主应力及方向，(b)极值剪应力及其作用面的方向。

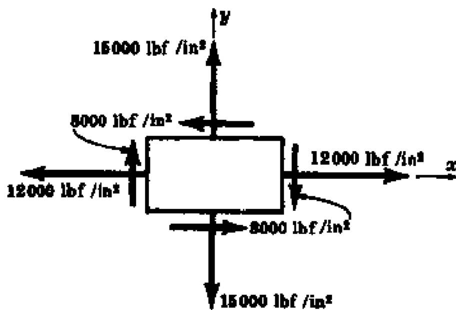


图 16-45

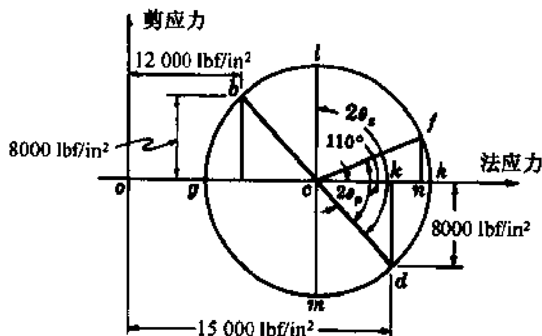


图 16-46

解　☞ 构造莫尔圆的过程是在题 16.14 中讲解的。按该题中的方法，可以知道：此题单元铅直界面上的剪应力是正的，水平界面上的剪应力是负的。因而，用铅直界面上的应力条件 $\sigma_x = 12000\ \text{lbf/in}^2$，$\tau_{xy} = 8000\ \text{lbf/in}^2$ 画出图 16-46 中的 b 点，用水平界面上的应力条件 $\sigma_y = 15000\ \text{lbf/in}^2$，$\tau_{xy} = -8000\ \text{lbf/in}^2$ 画出 d 点。画出线段 bd，其中点为 c，以 c 为圆心，$\overline{cb} = \overline{cd}$ 为半径画圆，此即为莫尔圆。直径 $\overline{bd}$ 的端点表示图 16-45 原始单元体上的应力条件。

(a)正如在题 16.14 所指出的，主应力由点 g 和 h 表示。主应力既可以由图 16-46 直接测量，也可以按如下方法求得。c 点得坐标是 13500，$\overline{ck} = 1500$，$\overline{cd} = \sqrt{(1500)^2 + (8000)^2} = 8150$。于是，最小主应力是

$$\sigma_{\min} = \overline{og} = \overline{oc} - \overline{cg} = 13500 - 8150 = 5350\ (\text{lbf/in}^2)$$

同时最大主应力是

$$\sigma_{max} = \overline{oh} = \overline{oc} + \overline{ch} = 13500 + 8150 = 21650 \ (\text{lbf/in}^2)$$

角度 $2\theta_p$ 由 $\tan 2\theta_p = 8000/15000 = 5.33$ 解出，由此可有 $\theta_p = 39°42'$，这个值也可以由测量莫尔圆中的$\angle dck$ 得到。由此可以看出，由 h 点表示的主应力作用在与 x 轴倾斜 39°42′的斜面上，因此主应力如图 16-47 所示。因为 g 点和 h 点位于莫尔圆的水平轴上，显然，图 16-47 中单元体界面上的剪应力等于零。

(b)最大剪应力是由莫尔圆中的$\overline{cl}$表示的。已经求得此半径为 8150 lbf/in²。角度 $2\theta_s$ 既可以由上述图形直接测量得到，也可以将 $2\theta_p$ 加上 90°得到，$2\theta_p$ 已经在前面求得。这将给出 $2\theta_s = 169°24'$ 或 $\theta_s = 84°42'$。由 l 点表示的剪应力是正的，因此作用在 84°42′平面上的剪应力使单元体顺时针转动。

此外，由莫尔圆可知，l 点的横坐标使 13500 lbf/in²，此即为最大剪应力作用平面上的法应力。于是，极值剪应力如图 16-48 所示。

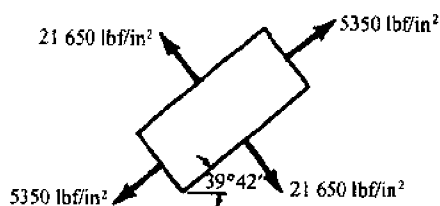


图 16-47

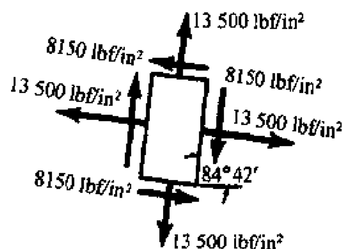


图 16-48

题 16.17　对于题 16.16 中讨论的单元体，试求由 x 正方逆时针 55°斜截面内的法应力和剪应力。

解　根据题 16.14 中讨论的莫尔圆的性质，可知直径$\overline{bd}$的端点表示原始 x, y 界面上的应力条件。在任意与 x 轴倾斜 θ 角的平面内，应力条件是由 f 点的坐标表示的，半径$\overline{cf}$与原始直径$\overline{bd}$成 2θ 角。在莫尔圆中，角度 2θ 是与表示倾斜面的角度同方向测量的，具体地说就是逆时针方向。因此在题 16.16 中画出的应力圆中，可由线段$\overline{cd}$量取逆时针角度 $2(55°) = 110°$，画出点 f，f 点的横坐标表示待求的 55°平面上的法应力，既可以直接测量得到，也可以由下述方法得到：

$$\overline{on} = \overline{oc} + \overline{cn} = 13500 + 8150\cos(110° - 79°24') = 20500 \ (\text{lbf/in}^2)$$

f 点的纵坐标表示待求的 55°平面上的剪应力，并可由下述关系得到

$$\overline{fn} = 8150\sin(110° - 79°24') = 4150 \ (\text{lbf/in}^2)$$

因而，55°斜截面上的应力如图 16-49 所示。

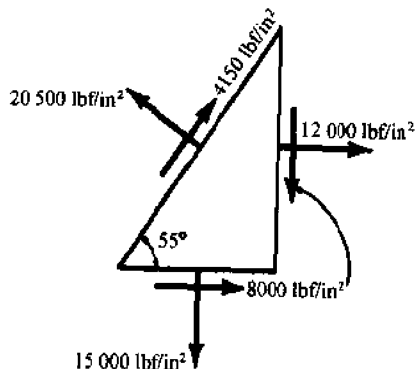


图 16-49

题 16.18　平面单元体承受图 16-50 所示的应力，试求(a)主应力及主方向，(b)极值剪应力及其作用面的方向。

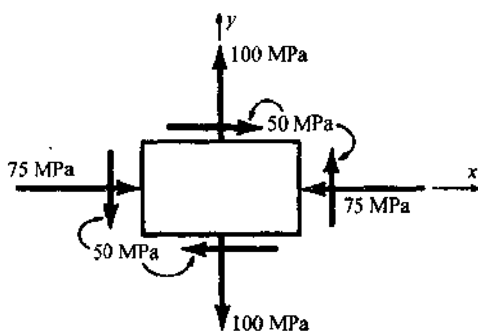


图 16-50

解 ☞ (a)根据题 16.13 的符号规则，此题 $\sigma_x = -75$ MPa, $\sigma_y = 100$ MPa, $\tau_{xy} = -50$ MPa。最大法应力由题 16.13 的(5)式给出，即

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2} \\ &= (-75 + 100)/2 + \sqrt{[(-75 - 100)/2]^2 + (-50)^2} \\ &= 12.5 + 100.8 = 113.3\ (\text{MPa})\end{aligned}$$

最小法应力由题 16.13 的(6)式给出，即

$$\begin{aligned}\sigma_{min} &= (\sigma_x + \sigma_y)/2 - \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + (\tau_{xy})^2} \\ &= 12.5 - 100.8 = -88.3\ (\text{MPa})\end{aligned}$$

由题 16.13 中的(3)式可知，应力 113.3 MPa 和 −88.3 MPa 作用的主平面方向由下式给出：

$$\tan 2\theta_p = -\frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = -\frac{-50}{(-75 - 100)/2} = -0.571$$

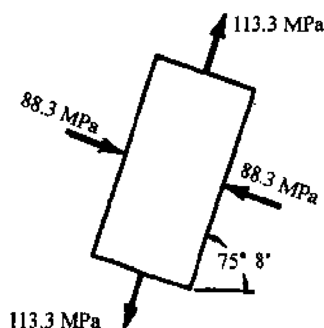


图 16-51

于是 $2\theta_p = 150°15', 330°15'$，或 $\theta_p = 75°8', 165°8'$

为了确定主应力和主平面之间的对应关系，转而研究题 16.13 中的(1)式，具体地说

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - (\sigma_x - \sigma_y)/2 \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

将 $\theta = 75°8'$ 和 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 的数值代入，得到

$$\begin{aligned}\sigma &= (-75 + 100)/2 - (-75 - 100)/2 \cdot \cos 150°15' \\ &\quad + (-50)\sin 150°15' = 88.3\ (\text{MPa})\end{aligned}$$

因此，由主平面画出的、并承受上述主应力的单元体如图 16-51 所示。此单元体界面上剪应力为零。

(b)由题 16.13 中的(8)式给出的最大、最小剪应力为

$$\begin{matrix}\tau_{max} \\ \tau_{min}\end{matrix} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{-75 - 100}{2}\right)^2 + (-50)^2}$$

$$= \pm 100.8(\text{MPa})$$

由题 16.13 中的(7)式，可知极值剪应力作用平面由下式给出

$$\tan 2\theta_s = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = 1.75$$

亦即 $2\theta_s = 60°15', 240°15'$ 或 $\theta_s = 30°8', 120°8'$ 。此即表示这些平面与最大和最小法应力平面相差 45°。

为了确定 30°8′平面上的剪应力是正或是负，可研究题 16.13 中的(2)式，即

$$\tau = (\sigma_x - \sigma_y)/2 \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

将 $\theta = 30°8'$ 与 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 值代入，得到

$$\tau = (-75 - 100)/2 \cdot \sin 60°15' + (-50)\cos 60°15' = -100.8\ \text{MPa}$$

结果中的负号表示,30°8′平面上的剪应力的指向与图 16-36 中所假设的正方向相反。极值剪应力作用平面上的法应力由题 16.13 中的(9)式给出,即

$$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = (-75 + 100)/2 = 12.5 \text{ MPa}$$

于是,极值剪应力作用单元体的方向如图 16-52 所示。

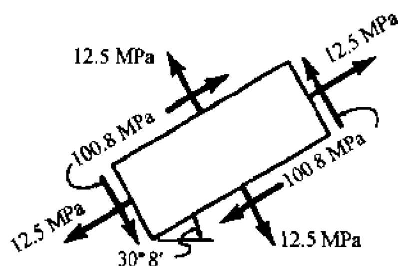


图 16-52

题 16.19 平面单元承受图 16-53 所示的应力作用,利用莫尔圆求(a)主应力及主方向,(b)极值剪应力及其作用面的方向。

解 ☞ 对于构造莫尔圆的过程,仍应参考题 16.14。按该题的符号规则,此题单元体铅直界面上的剪应力是负的,水平界面上的剪应力是正的。于是单元体铅直界面上 $\sigma_x = -75$ Mpa、$\tau_{xy} = -50$ MPa 的应力条件画出图 16-54 中的 b 点,水平界面上的应力 $\sigma_y = 100$ MPa、$\tau_{xy} = 50$ MPa 的应力条件画出 b 点。画出线段$\overline{bd}$,及其中点 c,以 c 为圆心,$\overline{cb} = \overline{cd}$为半径画一个圆,此即莫尔圆。直径$\overline{bd}$的端点表示上述原始单元体上的应力。

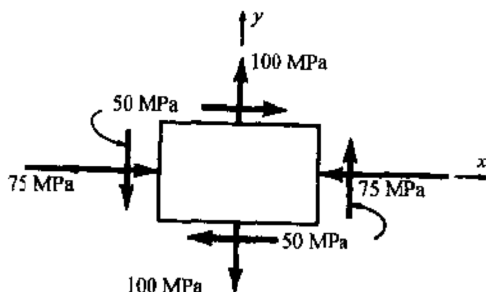


图 16-53

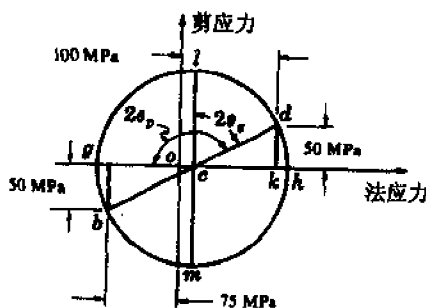


图 16-54

(a) 正如题 16.14 中所指出的主应力由点 g 和 h 表示,既可以由莫尔圆上直接测量,也可以由下述算法解出:c 点坐标为 12.5,$\overline{ck} = 87.5$,于是

$$\overline{cd} = \sqrt{(87.5)^2 + (50)^2} = 1008 \text{ (MPa)}$$

于是最小主应力为

$$\sigma_{\min} = \overline{og} - \overline{cg} = 12.5 - 100.8 = -88.3 \text{ (MPa)}$$

同时最大主应力为

$$\sigma_{\max} = \overline{oh} = \overline{oc} + \overline{ch} = 12.5 + 100.8 = 113.3 \text{ (MPa)}$$

角度 $2\theta_p$ 由 $\tan 2\theta_p = -50/87.5 = -0.571$ 给出,由此式得 $\theta_p = 75°8'$,这个值也可以由测量莫尔圆上的$\angle dcg$ 得到,由此可知由点 g 表示的主应力作用在与原始 x 轴倾斜 75°8′的平面上,主应力如图 16-55 所示。因为点 g 和 h 的纵坐标均为零,在这些平面上的剪应力等于零。

(b)在莫尔圆中,最大剪应力由$\overline{cl}$表示,已知此半径为 100.8 MPa。角度 $2\theta_s$ 既可在上述图中直接测量得到,也可以由 $2\theta_p$ 中减去 90°得到,$2\theta_p$ 已在前面解出。这样可以得到 $2\theta_s = 60°15'$ 或 $\theta_s = 30°8'$。由点 l 表示的剪应力是正的,因此 30°8′界面上的剪应力使单元体顺时针转动。

此外,由莫尔圆可知点 l 的横坐标是 12.5 MPa,此即为最大剪应力作用平面上的法应力。极值剪应力如图 16-56 所示。

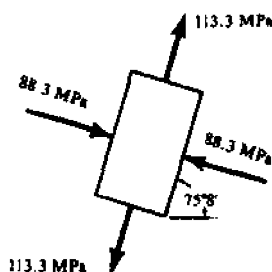


图 16-55

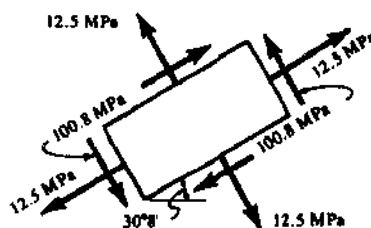


图 16-56

题 16.20　研制一个 FORTRAN 程序，该程序能针对图 16-36 所示单元体计算主应力和主方向。

解　☞ 待研程序的输入数据应包括图 16-36 所示的两个法应力和一个剪应力，为研制程序方便，法应力的符号规则仍如以前，拉伸为正；对于剪应力最简单的符号法则是：水平指向的剪应力使单元体顺时针转动为正；亦即和题 16.13 中的约定相反。在题 16.13 中主应力是由式(5)给出的，主方向是由式(3)给出的。研制的程序打印如下：

```
00010*************************************************************************
00020                        PROGRAM STRES2D (INPUT,OUTPUT)
00030*************************************************************************
00040*
00050*          AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
00060*          DATE  : JANUARY 26,1989
00070*
00080*   BRIEF DESCRIPTION:
00090*      THIS FORTRAN PROGRAM  MAY BE USED TO SOLVE A SIMPLE 2-D STRESS
00100*   PROBLEM WHERE THE USER IS PROMPTED FOR THE STRESS CONDITIONS FOR A
00110*   SINGLE OR SET OF POINTS, AND THE PRINCIPAL STRESS  AND ROTATING ANGLE
00120*   ARE CALCULATED.
00130*
00140*   INPUT:
00150*      THE USER WILL BE ASKED TO INPUT THE NUMBER OF STRESS SETS AND THE
00160*   NORMAL AND SHEAR STRESSES AT EACH POINT.
00170*
00180*   OUTPUT:
00185*      THE PRINCIPAL STRESSES AND ROTATING ANGLE FOR EACH SET OF PTS. WIL
00190*   BE PRINTED.
00200*
00210*   VARIABLES:
00220*      X(100),Y(100),S(100)   --- NORMAL AND SHEAR STRESS ARRAYS
00230*            NUM              --- THE NUMBER OF STRESS SETS
00240*            PI               --- 3.14159
00250*
00260*   SUBROUTINES CALLED:
00270*      PRINCIP --- CALCULATES THE PRINCIPAL STRESSES AND THE ROTATING
00280*                  ANGLE FOR A SINGLE OR SET OF POINTS.
00290*
00300*************************************************************************
00310**********                  MAIN PROGRAM                    ************
00320*************************************************************************
00330*
00340*          VARIABLE DECLARATIONS
00350*
00360      REAL X(100),Y(100),S(100),PI
00370      INTEGER NUM
00380*
00390      PI = 3.14159
00400*
00410*          USER INPUT
00420*
00430      PRINT*,'PLEASE ENTER THE NUMBER OF STRESS SETS:'
00440      READ*,NUM
00450      DO 10 N=1,NUM
00460         PRINT*,'PLEASE ENTER THE NORMAL STRESSES IN THE X,Y DIRECTIONS'
00470         PRINT*,'AND THE SHEAR STRESS;'
00480         READ*,X(N),Y(N),S(N)
00490 10   CONTINUE
00500*
00510*          CALLING SUBROUTINE PRINCIP TO CALCULATE THE PRINCIPAL
00520*          STRESSES AND THE ROTATING ANGLE
00530*
```

```
00540       CALL PRINCIP(X,Y,S,NUM)
00550*
00560       STOP
00570       END
00580*********************************************************************
00590           SUBROUTINE PRINCIP(XX,YY,SS,NUM)
00600*
00610*       THIS SUBROUTINE WILL EVALUATE THE PRINCIPAL STRESSES AND ROTATING
00620*       ANGLE FOR A SINGLE OR SET OF POINTS.
00630*
00640*           VARIABLE DECLARATIONS
00650*
00660       REAL PI,XX(100),YY(100),SS(100),P1(100),P2(100),T(100)
00670       INTEGER NUM
00680*
00690*           CALCULATIONS
00700*
00710       PI = 3.14159
00720       DO 15 N=1,NUM
00730          A=((XX(N)-YY(N))/2.0)**2
00740          B=SQRT(A+(SS(N)**2))
00750          C=(XX(N)+YY(N))/2.0
00760          P1(N)=C+B
00770          P2(N)=C-B
00780          A1=2*SS(N)/(XX(N)-YY(N))
00790          T(N)=90*ATAN(A1)/PI
00800          IF (XX(N).EQ.YY(N)) THEN
00810             T(N) = 45.0
00820          ENDIF
00830 15    CONTINUE
00840*
00850*           PRINTING OUTPUT
00860*
00870       PRINT 30
00880       DO 20 N=1,NUM
00890          PRINT 40,N,XX(N),YY(N),SS(N),P1(N),P2(N),T(N)
00900 20    CONTINUE
00910*
00920*           FORMAT STATEMENTS
00930*
00940 30    FORMAT(/,2X,'NO.',5X,'SIGXX',7X,'SIGYY',7X,'SIGXY',7X,'SIG(1)',
00950+            7X,'SIG(2)',7X,'THETA',/)
00960 40    FORMAT(2X,I2,3X,5(F9.2,3X),F9.2)
00970*
00980*           END SUBROUTINE PRINCIP
00990*
01000       RETURN
01010       END
```

题 16.21　对于承受图 16-57 应力的单元体，利用题 16.20 中的 FORTRAN 程序，计算主应力和主方向。

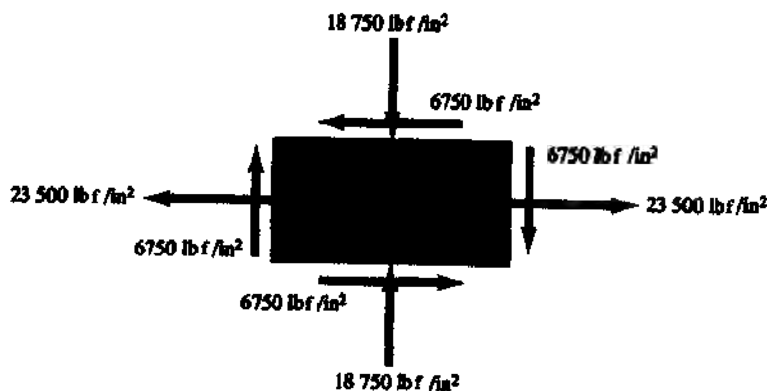


图 16-57

解　☞ 如果应用题 16.20 中的符号法则，并注意到图 16-57 给出的应力情况，本题有 $\sigma_x = 23500\ \text{lbf/in}^2$，$\sigma_y = -18750\ \text{lbf/in}^2$，且 $\tau_{xy} = -6750\ \text{lbf/in}^2$。将这些数据代入题 16.20 中的自提示程序，计算机运行如下：

```
 READY.
run
 PLEASE ENTER THE NUMBER OF STRESS SETS:
? 1
 PLEASE ENTER THE NORMAL STRESSES IN THE X,Y DIRECTIONS
 AND THE SHEAR STRESS:
? 23500,-18750,-6750
```

NO.	SIGXX	SIGYY	SIGXY	SIG(1)	SIG(2)	THETA
1	23500.00	-18750.00	-6750.00	24552.20	-19802.20	-8.86

```
SRU      0.734 UNTS.

 RUN COMPLETE.
```

16.17 习　　题

题 16.22　一截面为 50 mm×75 mm 的等截面杆，承受两端轴向拉伸载荷为 500kN。试求杆内最大剪应力。（答案：66.7 MPa）

题 16.23　对于题 16.22 中的杆件，试求与轴线倾斜 11°的倾斜面上的法应力和剪应力。（答案：4.87 MPa, 24.97 MPa）

题 16.24　边长为 1 in 的正方形截面杆件，承受压缩载荷为 8000 lbf。试求与轴线倾斜 30°的斜截面上的法应力和剪应力。（杆件较短，略去作为柱发生屈曲的可能性）（答案：$\sigma=-2000$ lbf/in^2, $\tau=-3460$ lbf/in^2）

题 16.25　利用莫尔圆，重新解题 16.24。（答案：见图 16-58, $\sigma=\overline{ko}=-2000$ lbf/in^2, $\tau=\overline{dk}=3460$ lbf/in^2）

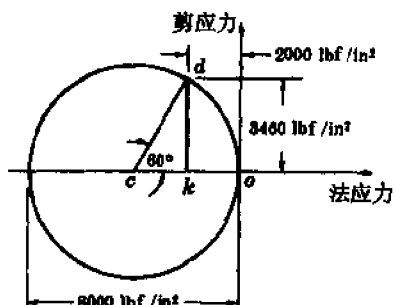


图 16-58

题 16.26　物体内部的一个平面单元，承受应力 $\sigma_x=20$ MPa, $\sigma_y=0$, $\tau_{xy}=30$ MPa。用解析方法求与 x 倾斜 45°的平面上的法应力和剪应力。（答案：$\sigma=40$ MPa, $\tau=10$ MPa）

题 16.27　平面单元体承受的应力是 $\sigma_x=50$ MPa, $\sigma_y=50$ MPa。试用解析法求解单元内的最大剪应力。（答案：0）

题 16.28　平面单元体承受的应力是 $\sigma_x=12000$ lbf/in^2, $\sigma_y=-12000$ lbf/in^2。试用解析法求解单元内的最大剪应力，以及最大剪应力作用平面的方向。（答案：12000 lbf/in^2, 45°）

题 16.29　对于题 16.28 中的单元体，试用解析法求解作用在与 x 轴成 30°倾斜平面上的法应力和剪应力。（答案：$\sigma=-6000$ lbf/in^2, $\tau=10400$ lbf/in^2）

题 16.30　对于承受应力 $\sigma_x=8000$ lbf/in^2, $\sigma_y=-8000$ lbf/in^2 的平面单元体，画莫尔圆，由莫尔圆求作用在与 x 轴倾斜 20°平面上的应力。（答案：见图 16-59, $\sigma=\overline{on}=-6130$ lbf/in^2, $\tau=\overline{nf}=-5130$ lbf/in^2）

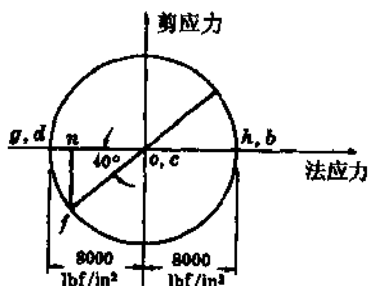


图 16-59

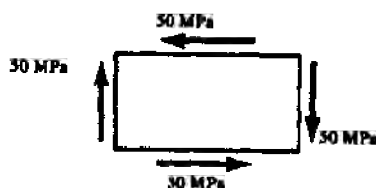


图 16-60

题 16.31　平面单元体取自承受扭转的薄壁圆柱壳体，有如图 16-60 的剪应力。试求单元体内部的主应力及主方向。（答案：50 MPa, 45°）

题 16.32　平面单元体承受图 16-61 所示的应力。试用解析方法求(a)主应力与主方向(b)最大剪应力及作用平面的方向。(答案:(a)σ_{max} = 1.2 MPa, 50°40′, σ_{min} = −126.2 MPa, 140°40′; (b)τ_{max} = 63.7 MPa, 5°40′)

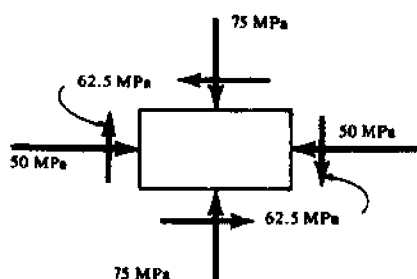


图 16-61

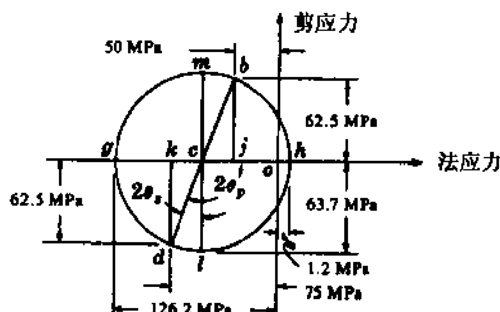


图 16-62

题 16.33　用莫尔圆法重新求解题 16.32。(答案:见图 16-62)

题 16.34　一平面单元体承受图 16-63 所示的应力。试利用题 16.20 中的 FORTRAN 程序求主应力及主方向。(答案:SIG(1):198.12;SIG(2):66.88;THETA:24.82)

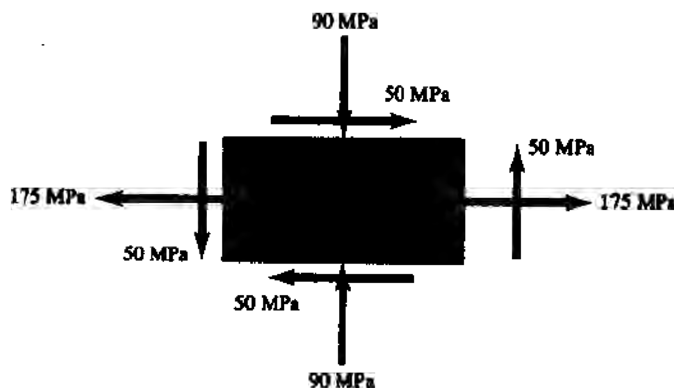


图 16-63

题 16.35　一平面单元体承受图 16-64 所示的应力。试利用题 16.20 中的 FORTRAN 程序求主应力及主方向。(答案:SIG(1):20388.68;SIG(2): −31738.68;THETA:14.20)

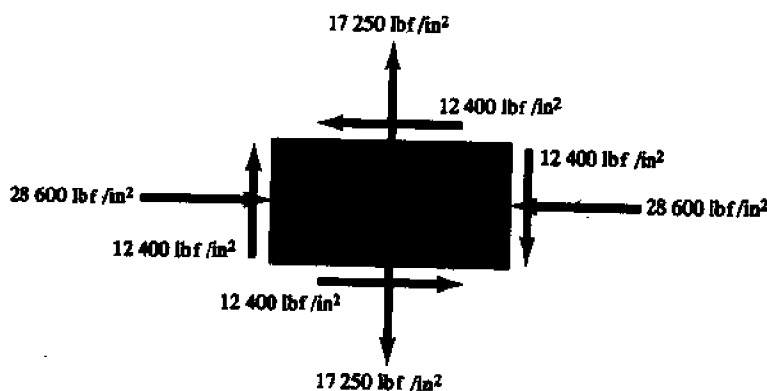


图 16-64

第 17 章　组合载荷构件；失效理论

17.1　轴向偏心受载构件

在第 1、第 2 章中考虑直杆承受拉伸或压缩载荷时，总是要求力的作用线通过构件横截面的形心。在本章中，我们将考虑如下情况：作用在杆件上的力既可以是拉伸，也可以是压缩。但其作用线不通过杆件截面的形心。此种偏心加载的典型例子如图 17-1 所示。对于那些垂直于载荷方向的横截面，任一点处的合成应力等于同轴力 P 产生的法向应力加上力偶 Pe 产生的弯曲应力。

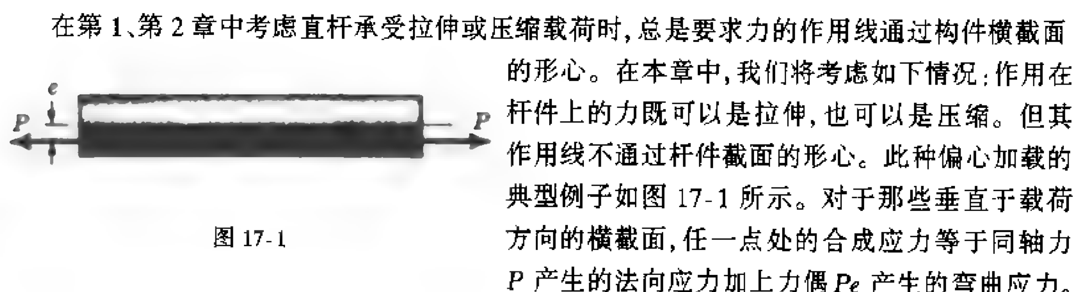


图 17-1

第一项应力由第 1 章导出的公式计算，具体地说就是 $\sigma = P/A$，第二项应力由第 8 章的弯曲应力公式计算，具体地说即 $\sigma = My/I$。应用见题 17.1。

17.2　承受内压及轴向拉伸组合作用的圆柱壳

在第 3 章中曾考虑过承受均匀内压的薄壁圆柱壳，当时曾指出，由内压中引起的轴向应力为 $\sigma = pr/2t$，环向应力为 $\sigma = pr/t$。如果承受内压的同时，还承受轴向力 P 的拉伸，那么还应再附加纵向应力 $\sigma = P/A$，式中 A 表示壳的横截面积。因而合成的纵向应力等于两项纵向应力的代数和，合成的环向应力等于由内压引起的环向应力。

17.3　扭转与轴向拉伸（或压缩）组合作用的圆柱壳

在第 5 章中曾考虑过承受扭转的薄壁圆柱壳内的应力。当时曾指出，在垂直于圆柱轴线的横截面内的剪应力 $\tau_{xy} = T\rho/J$。如果扭转的同时还有轴向拉伸力 P，那么纵向应力为 $\sigma = P/A$。这种载荷如图 17-2 所示，在这种情况下，由两种载荷产生的应力作用在不同方向上，且必须使用第 16 章中得到的公式。在这种意义上，得到由于两种载荷同时作用的主应力将是可能的。应用见题 17.2。

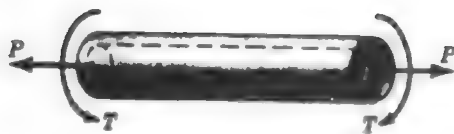


图 17-2

17.4　承受轴向拉伸与扭转的圆轴

此种载荷如图 17-3 所示。由于轴向拉伸力 P，产生由 $\sigma = P/A$ 式给出的均匀纵向拉应力，其中 A 表示杆的横截面积。由第 5 章可知，在垂直于轴线的横截面上，存在由 $\tau_{xy} = T\rho/J$ 给出的剪应力。此处又是由于两种载荷产生的应力作用在不同方向上，必须应用第 16 章的结

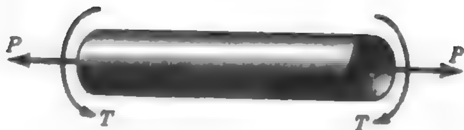


图 17-3

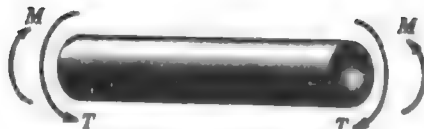


图 17-4

果去求得任意点处的主应力，或去求得与轴的母线倾斜某个角度的倾斜面上的应力状态。

17.5 弯扭组合作用的圆轴

此种载荷如图 17-4 所示。由第 5 章知道，在垂直于轴线的整个横截面上，扭转剪应力为 $\tau_{xy}=T\rho/J$。由第 8 章知道，还存在垂直于横截面的，亦即在轴向方向上的弯曲应力 $\sigma=My/I$。因为这两项应力作用在不同的方向上，必须应用第 16 章的结果去得到轴内任意点处的主应力，或得到与轴母线倾斜的平面上的应力状态。应用见题 17.3.

17.6 组合加载构件的设计

到目前为止，我们还只是讨论了分析方法，亦即承受组合载荷的构件的主应力计算问题。相反的问题，亦即承受组合载荷的构件的设计问题，将会更复杂，并且必然与实验测定的材料的性质有关。对于所有组合载荷的情况，不可能测定其力学性能，材料性能只是在一些很简单拉伸、压缩或剪切实验中测定。于是现在的问题是如何将承受组合加载弹性体的强度和这些简单载荷条件下的强度指标联系起来。各种组合载荷作用下的强度和材料的简单机械性质之间的联系称之为失效理论。这样的理论很多都是可用的，但是我们将只讨论三种最广泛应用的理论，其中一个理论应用于脆性材料，另外两个理论适用于韧性材料的设计。

17.7 最大法应力理论

这个理论叙述为：承受两轴或三轴应力作用的材料，当其最大法应力达到同种材料单向拉伸实验发生失效的应力值时，将会发生失效。通常将失效定义为屈服或断裂，这要看两者哪一个发生。这个理论与脆性材料的实验资料符合很好。应用请见题 17.11。

17.8 最大剪应力理论

这个理论叙述为：承受两轴或三轴应力作用的材料，当最大剪应力达到同种材料单向拉伸或压缩实验失效时的剪应力值时，将会发生失效。这个理论广泛地应用于韧性材料的设计。应用见题 17.11

17.9 哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇理论(最大畸变能理论)

对于承受主应力 σ_1、σ_2、σ_3 的单元体，哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇(Huber-Von Mises-Hencky)理论叙述为：当

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=(\sigma_{yp})^2$$

时，将会产生材料屈服，式中 σ_{yp}是材料的屈服点。这个理论与韧性材料的实验资料吻合很好。应用见题 17.12。

17.10 例 题

题 17.1 如图 17-5 所示的矩形块，具有铅直对称轴，其下端基础是固定的。承受共轴的压力 220 kN 与 C 点处力偶 M 的共同作用，C 为顶截面的中心。如果最大的许可压应力为 180 MPa，试求力偶 M 的许可值。

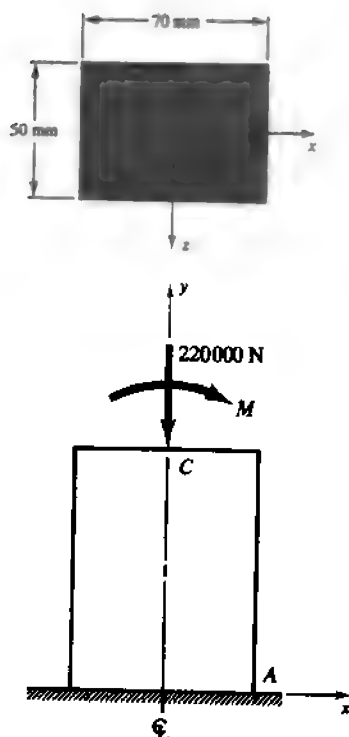


图 17-5

解 ☞ 压力 P 引起的压应力在整个截面上是均匀分布的。由第 1 章可知,铅直方向的法应力为

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = \frac{220000\ \text{N}}{(0.07\text{m})(0.05\text{m})} = 62.86\ \text{MPa}$$

位于 xy 平面内的力偶将导致 z 轴(中性轴)的弯曲,由第 8 章知 z 轴右侧到处都应有压力。在 A 点处,此项应力为

$$\sigma_2 = \frac{Mc}{I} = \frac{M(0.035\ \text{m})}{(0.05\text{m})(0.07\text{m})^3/12}$$

A 点合成的压应力是($\sigma_1 + \sigma_2$),且此项应力不能超过 180 MPa,即

$$180 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 62.86 \times 10^6 \text{N/m}^2 + \frac{M(0.035\text{m})^2}{(0.05\text{m})(0.07\text{m})^3/12}$$

解出　$M = 4.70\ \text{kN·m}$

题 17.2　考虑外径 $R_0 = 140$ mm,内径 $R_i = 125$ mm 的圆柱壳,它同时承受轴向压力 68 kN和扭转力偶 35 kN·m 的共同作用,如图 17-6 所示。试求壳内的主应力和峰值剪应力。

解 ☞ 68 kN 轴向压力产生的均匀分布压应力为

$$\sigma_1 = \frac{-68000\ \text{N}}{\pi[(0.140\ \text{m})^2 - (0.125\text{m})^2]} = -5.44\ \text{MPa}$$

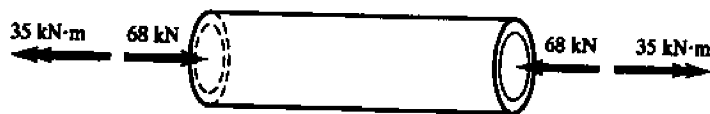


图 17-6

如图 7-17 所示。由题 5.2 可知由 35 kN·m 扭转力偶引起的扭转剪应力为 $\tau = T\rho/J$。此题的极惯性矩为

$$J = \frac{\pi}{2}[(0.140\ \text{m})^4 - (0.125)^4] = 0.0002199\text{m}^4$$

如果使用题 5.6 中的近似公式,可得 $J = 0.0002191\text{m}^4$。

于是壳的最外层纤维的剪应力由下式给出:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} = \frac{(35000\ \text{N}\cdot\text{m})(0.140\ \text{m})}{0.0002199} = 22.3\ \text{MPa}$$

这些应力亦如图 17-7 所示。

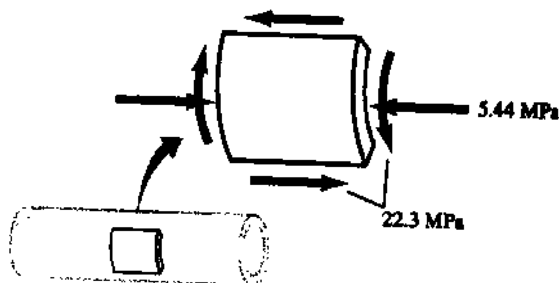


图 17-7

由题 16.13 可知，主应力为

$$\sigma=\frac{-5.44+0}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-5.44-0}{2}\right)^2+(22.3)^2}$$

$$\sigma_{max}=19.75\ \mathrm{MPa},\quad \sigma_{min}=-25.19\ \mathrm{MPa}$$

峰值剪应力是 22.47 MPa。

题 17.3 考虑空心圆轴，它的外径是 3 in，内径等于外径的 1/2。该轴承受扭矩20000 lbf·in 及弯矩 30000 lbf·in 的共同作用。试求物体内的主应力及最大剪应力。

解答 扭矩引起的剪应力在空心轴的外层纤维内取得最大值。由题 5.2 可知，剪应力为 $\tau_{xy}=T\rho/J$。由题 5.1 知道，对于圆环形截面，有

$$J=\frac{\pi}{32}(D_0^4-D_i^4)=\frac{\pi}{32}[3^4-(1.5)^4]=7.46\ (\mathrm{in}^4)$$

式中 D_0 表示截面的外直径、D_i 表示截面的内直径。在外部纤维处扭转剪应力为

$$\tau_{xy}=\frac{T\rho}{J}=\frac{20000(1.5)}{7.46}=4000(\mathrm{lbf/in^2})$$

令弯矩位于铅直平面内，那么梁的上部和下部的纤维将承受峰值弯曲应力，这些应力可由公式 $\sigma_x=My/I$ 计算。由题 7.9 可知圆环截面的惯性矩 I 为

$$I=\frac{\pi}{64}(D_0^4-D_i^4)=\frac{\pi}{64}[3^4-(1.5)^4]=3.73\ (\mathrm{in}^4)$$

代入数据后

$$\sigma_x=\frac{My}{I}=\frac{30000(1.5)}{3.73}=12000(\mathrm{lbf/in^2})$$

圆轴最低处的单元体承受的应力如图 17-8 所示。由题 16.7 可知，对这个单元体主应力是

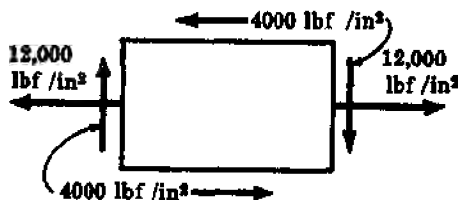


图 17-8

$$\sigma_{max}=\sigma_x/2+\sqrt{(\sigma_x/2)^2+(\tau_{xy})^2}=12000/2+\sqrt{(12000/2)+(4000)^2}$$
$$=132000(\mathrm{lbf/in^2})$$

$$\sigma_{min}=\sigma_x/2-\sqrt{(\sigma_x/2)^2+(\tau_{xy})^2}=12000/2-\sqrt{(12000/2)+(4000)^2}$$
$$=-12000(\mathrm{lbf/in^2})$$

这些应力发生在题 16.7 中(3)式定义的平面内

$$\tan 2\theta_p=-\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x/2}=-\frac{4000}{12000/2}=-\frac{2}{3}\ 或\ \theta_p=73°10',163°10'$$

将有关数据代入题 16.7 中的(1)式，并令 $\theta=73°10'$ 得到

$$\sigma=12000/2-(12000/2)\cos146°20'+4000\sin146°20'$$
$$=13200\ (\mathrm{lbf/in^2})$$

于是最大的拉应力为 13200 lbf/in²，发生在与圆轴的轴线倾斜 73°10′的平面内。另一个主应力为 $\sigma_{min}=-1200\ \mathrm{lbf/in^2}$，发生在与轴线倾斜 163°10′的平面内。

极值剪应力由题 16.7 中的(8)式给出，即

$$\tau=\pm\sqrt{(\sigma_x/2)^2+(\tau_{xy})^2}=\pm\sqrt{(12000/2)^2+(4000)^2}$$
$$=\pm 7200\ (\mathrm{lbf/in^2})$$

发生在与主应力作用平面成 45°的平面内。

题 17.4 如图 17-9 所示的薄壁圆柱壳具有铅直对称轴，其下端是固定的，并承受图示的三个集中力。试求 A、B、C 和 D 点的法应力。

解 ☞ 由 z 上方向下看 xy 平面。此处引入作用在上顶表面中心 E 点，数值为 $2P$ 的两个力。在 xy 平面内由三个力组成的力系如图 17-10(a)所示，包含在虚线内的两个力形成一个数值为 $(2P)(D/2)=PD$ 的力偶。于是，顶面上的载荷(与原始力 $2P$ 对应)可以看作是由中心向下的力 $2P$ 和数值为 PD 的力偶，如图 17-10(b)所示。因此作用在壳上的总的载荷有集中力 $2P$，力偶 PD 以及集中力 $1.5P$ 和 $2P$。

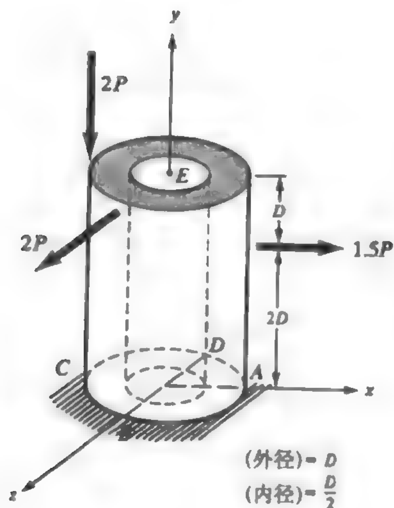


图 17-9

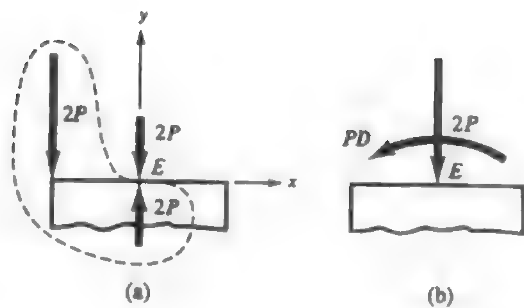


图 17-10

这四个力的作用效果是

(a)中心力 $2P$ 在任意横截面内引起均匀分布的压应力。

(b)如图 17-10(b)所示的力偶 PD 引起关于平行于 z 轴的中性轴的弯曲。

(c)力 $1.5P$ 引起关于平行于 z 轴的中性轴的弯曲。

(d)力 $2P$ 引起关于平行于 x 轴的中性轴的弯曲。

由截面的几何特性计算，有 $A=0.589D^2\ \text{in}^2$，$I_x = I_z = 0.0460D^4\text{in}^4$

由效果(a)，有

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} = -\frac{2P}{0.589\ D^2} = -3.396\frac{P}{D^2}$$

由(b)，弯曲应力为

$$\sigma'_A = \frac{Mc}{I} = \frac{(PD)(D/2)}{0.0460\ D^4} = 10.87\frac{P}{D^2}$$

$$\sigma'_C = \frac{Mc}{I} = -\frac{(PD)(D/2)}{0.0460\ D^4} = -10.87\frac{P}{D^2}$$

由(c)，弯曲应力是

$$\sigma''_A = \frac{Mc}{I} = -\frac{(1.5P)(2D)(D/2)}{0.0460\ D^4} = -32.61\frac{P}{D^2}$$

$$\sigma''_C = \frac{Mc}{I} = \frac{(1.5P)(2D)(D/2)}{0.0460\ D^4} = 32.61\frac{P}{D^2}$$

上述应力在 A 及 C 点处如图 17-11 所示，于是

$$\sigma_A = -3.396\frac{P}{D^2} + 10.87\frac{P}{D^2} - 32.61\frac{P}{D^2} = -25.14\frac{P}{D^2}$$

$$\sigma_C = -3.396\frac{P}{D^2} - 10.87\frac{P}{D^2} + 32.61\frac{P}{D^2} = -18.34\frac{P}{D^2}$$

由效果(d)，弯曲应力为

$$\sigma'''_B = \frac{Mc}{I} = -\frac{(2P)(3D)(D/2)}{0.0460\ D^4} = -65.22\frac{P}{D^2}$$

$$\sigma'''_D = -\frac{Mc}{I} = \frac{(2P)(3D)(D/2)}{0.0460\ D^4} = 65.22\frac{P}{D^2}$$

这些应力必然引起法向应力，于是 B 点及 D 点处的合成法向应力为：

$$\sigma_B = -3.396\frac{P}{D^2} - 65.22\frac{P}{D^2} = -68.62\frac{P}{D^2}$$

$$\sigma_D = -3.396\frac{P}{D^2} - 65.22\frac{P}{D^2} = 61.82\frac{P}{D^2}$$

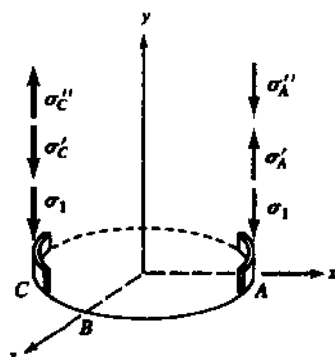


图 17-11

题 17.5　图 17-12(a)所示圆轴以等角速旋转,皮带的张力将引起弯曲和扭转组合状态。略去轴及皮带的自重,并假设轴承只能产生集中约束反力,轴的直径是 1.25 in。试求轴内的主应力。

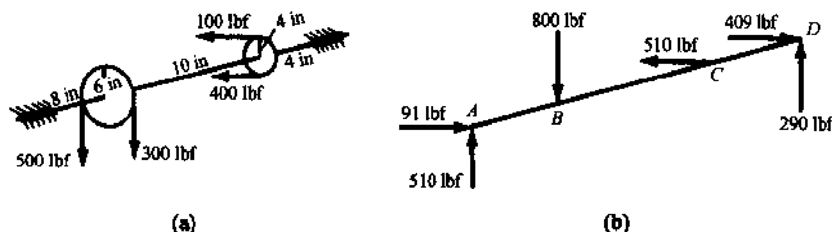


图 17-12

解　作用在轴上的横向力是不平行的,由这些力引起的弯矩必须以矢量的形式叠加,以得到合成弯矩。这种矢量叠加只须沿梁的长度选取少量的几个特征点即可。引起弯曲的载荷及由其引起的约束反力如图 17-12(b)所示。并认为这些力都是通过轴线的。图 17-13 中上面的虚线段及下面的虚线段分别表示铅直和水平平面内的弯矩。

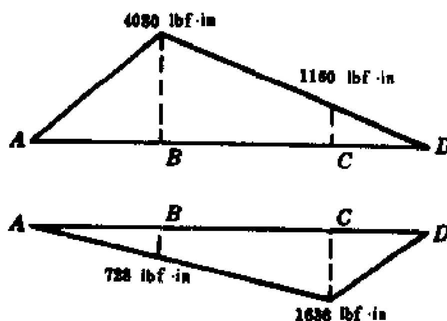


图 17-13

B 处及 C 处的合成弯矩为

$$M_B = \sqrt{(4080)^2 + (728)^2} = 4140\ (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

$$M_C = \sqrt{(1160)^2 + (1636)^2} = 2000\ (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

两个皮带轮之间的扭矩为常数,并且等于

$$T = (400 - 100)(4) = 1200\ (\text{lbf}\cdot\text{in})$$

因为 B 点和 C 点的扭矩是相同的,危险单元体位于 B 点外侧纤维处。最大弯曲应力为

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{(4140)(1.25/2)}{\pi(1.25)^4/64} = 21500\ (\text{lbf/in}^2)$$

发生在轴外侧纤维内的最大剪应力由下式给出:

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J} = \frac{1200(1.25/2)}{\pi(1.25)^4/32} = 3100(\text{lbf/in}^2)$$

在题 16.13 中曾给出主应力是

$$\sigma_{\max} = (\sigma_x/2) + \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= 21500/2 + \sqrt{(21500/2)^2 + (3100)^2} = 22000(\text{lbf/in}^2)$$

$$\sigma_{min} = (\sigma_x/2) - \sqrt{(\sigma_x/2)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$= 21500/2 - \sqrt{(21500/2)^2 + (3100)^2} = -400\ (\text{lbf/in}^2)$$

题 17.6　讨论脆性材料的失效判据*。

解　☞ 与实验资料极其吻合的判据是由英国工程师兰金(Rankine. W. J. R)提出来的,并称之为最大法应力理论。该理论叙述为:当最大的法应力达到同种材料单向拉伸实验失效应力时,将会发生材料失效(或屈服、或断裂——取决于哪个先发生)。相应地,如果载荷是压缩的,当最小的法向应力达到单向压缩实验失效应力时,将会发生材料失效。显然,这个判据只考虑了最大的(或最小的)主应力,而忽略了其他主应力的影响。

题 17.7　对于韧性材料讨论最大剪应力失效理论。

解　☞ 只要材料的拉伸屈服点等于压缩的屈服点,这一判据就与实验吻合得很好。这一判据是由库仑(Coulomb.C.A)于 1773 年首次提出的,其后特雷斯卡(Tresca. H)又于 1864 年提出。实际上,这一判据经常被称为特雷斯卡判据。该判据可叙述为:对于承受两轴或三轴应力的材料,当任意点的最大剪应力达到同种材料单向拉伸或压缩失效剪应力时,将会发生失效。在题 16.13 中曾说明:最大剪应力等于最大与最小法应力之差的 1/2,并且永远作用在与主平面倾斜 45°的平面上。因而如果 σ_{yp}表示单向拉伸或压缩时材料的屈服点,那么相应的最大剪应力为 $\sigma_{yp}/2$。根据最大剪应力判据,可列式为

$$\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{\sigma_{yp}}{2}$$

或

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_{yp} \tag{1}$$

式中 σ_{max}、σ_{min}分别表示最大和最小主应力。可以看出,对于三轴应力的分析,必须判断三个应力中哪些可使(1)式左侧的应力差为最大。

题 17.8　对于韧性材料讨论哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇判据

解　☞ 此理论分别由哈贝尔(Huber. M. T)于 1904 年在波兰、冯·密塞斯(Von. Mises. R)于 1913 年在德国、亨奇(Hekey. H)于 1925 年各自独立提出的。对于两轴或三轴应力问题,此理论与韧性材料失效实验资料的符合程度要好于在题 17.7 中讨论的最大剪应力理论。

为了导出这一广泛适用的判据,首先要求出单向拉伸试件单位体积内的应变能。如果在此实验中的轴向拉伸应力是 σ_1、相应的轴向应变是 ϵ_1,那么试件单位体积内功等于单位面积上力的平均值(即 $\sigma_1/2$)与力方向的位移(即 ϵ_1)的乘积。于是此功 $U = \sigma_1\epsilon_1/2$,并以内部应变能的形式储藏起来。

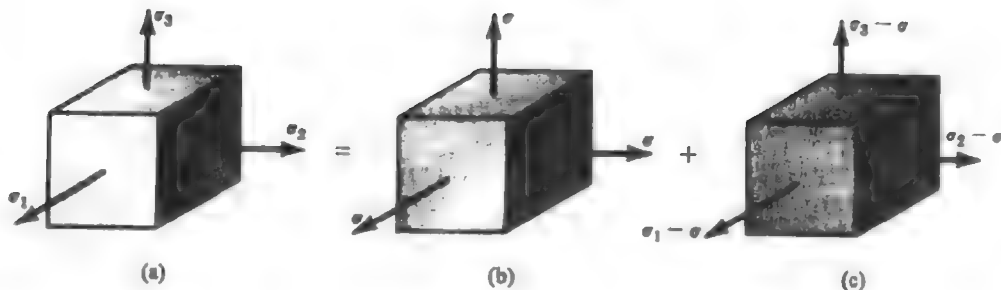


图 17-14

承受三轴主应力 σ_1、σ_2、σ_3 的单元体单位体积的应变能,可由求和法(因为应变能是标量)得到

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\epsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\epsilon_3 \tag{a}$$

* 本书中关于此判据的讲法与目前我国国内的学术观点有很大区别。——译者注

式中 ε_1、ε_2 和 ε_3 分别是主应力方向上的应变。如果按题 1.23 中给出的应力-应变关系，将应变用应力来表示，(a)式将会变成

$$U = \frac{1}{2E}[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_3)] \tag{b}$$

三轴主应力可表示为图 17-14(a)，此种一般的应力状态又可将之表示为图 17-14(b)与图 17-14(c)所示两个三轴应力状态的叠加。

由(b)式给出的应变能 U 可以分解为两个部分：一部分 U_v，相应于单元体体积变化，而与单元体的畸变无关；另一部分 U_d，相应于单元体的畸变，而与体积改变无关。只要令图 17-14 表示的应力状态的体胀系数等于零，那么它就只表示畸变，而与体积变化无关，于是

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[(\sigma_1 - \sigma) - \mu(\sigma_2 + \sigma_3 - 2\sigma) + (\sigma_2 - \sigma) - \mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma) + (\sigma_3 - \sigma) - \mu(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma)] = 0 \tag{c}$$

求解(c)式，得到

$$\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \tag{d}$$

此即为图 17-14(b)中的均匀应力，它只引起体积改变，而与畸变无关。与(d)式应力相应的应变可由三向胡克定律(题 1.23 给出)求得，为

$$\varepsilon = \frac{(1 - 2\mu)\sigma}{E} \tag{e}$$

相应于图 17-14(b)的单位体积内的应变能，可将(d)、(e)式代入(a)求得，同时要注意

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$$

$$U_v = 3(\sigma\varepsilon/2) = \frac{1 - 2\mu}{6}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \tag{f}$$

仅与畸变相关，而与体积改变无关的应变能为

$$U_d = U - U_v = \frac{1 + \mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] \tag{g}$$

哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇理论认为，当由(g)式给出的畸变能等于单向拉伸实验材料失效的畸变能时，将会发生失效。在单向拉伸实验中：$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$，$\sigma_1 = \sigma_{yp}$，(g)式的右端项成为

$$\frac{1 + \mu}{6E}[2\sigma_{yp}^2] \tag{h}$$

令(g)式的右端项等于(h)式，有

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_{yp}^2 \tag{i}$$

可作为失效判据。此判据有时又称为最大畸变能理论，此理论认为 U_v 不引起失效。

题 17.9 薄壁圆柱压力容器承受内压 5 MPa，圆柱的平均半径为 400 mm。如果材料的屈服点为 300 MPa 并规定安全系数为 3。试利用(a)最大法应力理论(b)哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇理论求所需要的壁厚。

解 ☞ 题 3.1 中解出的应力就是主应力，即

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pr}{h} = \frac{5(400)}{h} = \frac{2000}{h}$$

$$\sigma_2 = \sigma_l = \frac{pr}{2h} = \frac{5(400)}{2h} = \frac{1000}{h}$$

第三个主应力由壳外侧的零变化至内侧的 $-p$。按惯例，在薄壁容器设计中略去这第三个分量，于是可以认为 $\sigma_3 = 0$

(a)利用最大法应力理论，有

$2000/h = 300/3$，可解出 $h = 20$ mm

(b)利用哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇理论，由题 17.8 的(i)式，有

$$(2000/h - 1000/h)^2 + (1000/h - 0)^2 + (2000/h - 0)^2 = 2(300/3)^2$$

解出 $h = 17.3$ mm

题 17.10 如图 17-15(a)所示实心圆轴在其两端承受皮带的张力，在两轴承处为简支，材料的屈服点为 250 MPa，安全系数为 3。试利用最大拉应力理论求所需轴径。

解 ☞ 轴承的约束反力位于铅直平面内，记作 R_B 和 R_C，轴的分离体图如图 17-15(b)所示。

由静力学可知 $R_B = 2.83\text{kN}, R_C = 3.67\text{kN}$。弯矩沿轴长的变化情况如图 17-15(c)所示，类似地扭矩沿轴长应为常数，如图 17-15(d)所示。

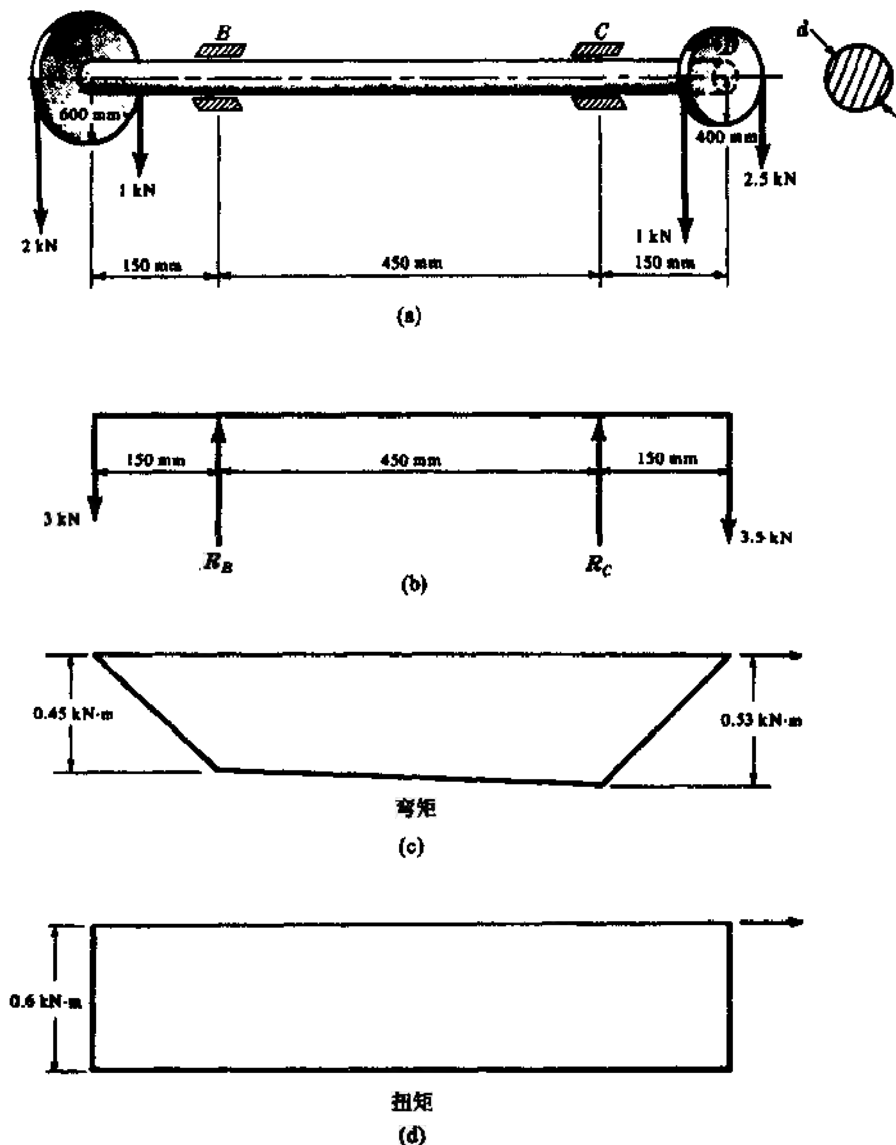


图 17-15

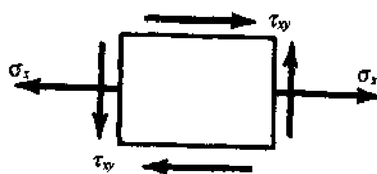


图 17-16

显然，轴的控制应力应在 C 截面的外侧纤维内，该截面最上边缘单元应力 σ_x、τ_{xy} 情况的俯视图如 17-16所示。

法应力 σ_x 是由于弯曲作用引起的，由题 8.1 可知

$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(0.53\times 10^3)(10^3)(d/2)}{\pi d^4 64} = \frac{5.4\times 10^6}{d^3}\text{MPa} \tag{a}$$

另外的法应力 σ_y、σ_z 等于零。由题 5.2 可知，皮带张力扭转引起的剪应力 τ_{xy} 是

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{(0.6\times 10^3)(10^3)(d/2)}{\pi d^4/32} = \frac{3.06\times 10^6}{d^3}\text{MPa} \tag{b}$$

遵照最大法应力理论，当最大法应力等于轴向拉伸屈服时的法应力数值时，将会发生屈服。由题 16.13 可知，最大法应力与最大主应力相同，即

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \tag{c}$$

将(a)、(b)式代入(c),并引入安全系数3,得到

$$\frac{250}{3}=\frac{5.4\times10^6+0}{2d^3}-\sqrt{\left(\frac{5.4\times10^6-0}{2d^3}\right)+\left(\frac{3.06\times10^6}{d^3}\right)^2}$$

可解出 $d=43$ mm

题 17.11 对于题17.10中的圆轴,试用最大剪应力理论求所需轴径。(安全系数仍为3)。

解 ☞ 最大法应力如题17.10中的(c)式,最小法应力为

$$\sigma_{\min}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)+(\tau_{xy})^2}$$

此处要特别指出,另一个主应力是零,而 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$ 之间的差值将是最大的可能差值。将有关数据代入题17.7中的(1)式,得到

$$2\sqrt{\left(\frac{5.4\times10^6-0}{2d^3}\right)^2+\left(\frac{3.06\times10^6}{d^3}\right)^2}=\frac{250}{3}$$

解出 $d=46$ mm

题 17.12 对于题17.10中的圆轴,试用哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇理论求所需轴径。(安全系数仍为3。)

解 ☞ 此理论的判据为题17.8中的(i)式,其中 σ_1、σ_2 和 σ_3 是主应力。本题的三个主应力为

$$\sigma_1=\sigma_{\max}=\left(\frac{5.4\times10^6+0}{2d^3}\right)+\sqrt{\left(\frac{5.4\times10^6-0}{2d^3}\right)^2+\left(\frac{3.06\times10^6}{d^3}\right)^2}$$

$$=\frac{6.8\times10^6}{d^3}$$

$$\sigma_2=0$$

$$\sigma_3=\sigma_{\min}=\left(\frac{5.4\times10^6+0}{2d^3}\right)-\sqrt{\left(\frac{5.4\times10^6-0}{2d^3}\right)^2+\left(\frac{3.06\times10^6}{d^3}\right)^2}$$

$$=-\frac{1.4\times10^6}{d^3}$$

将有关数据代入题17.8的(i)式,有

$$\left[\frac{6.8\times10^6}{d^3}-0\right]^2+\left[0-\frac{-1.4\times10^6}{d^3}\right]^2+\left[\frac{6.8\times10^6}{d^3}-\frac{-1.4\times10^6}{d^3}\right]^2=2\left(\frac{250}{3}\right)^2$$

解出 $d=45$ mm

17.11 习　题

题 17.13 如图17-17所示,边长为300 mm的立方体承受偏心压力1.15 MN的作用,偏心距是60 mm。试求外侧纤维 m 和 n 的应力。(答案:$\sigma_m=3.3$ MPa, $\sigma_n=-36.7$ MPa)

题 17.14 如果要求题17.13中 m 处的合应力等于零,试求所需要的偏心距。(答案:50 mm)。

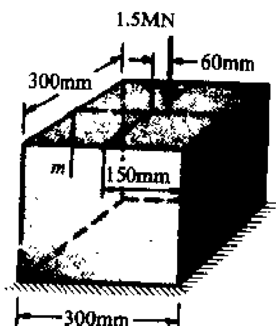


图 17-17

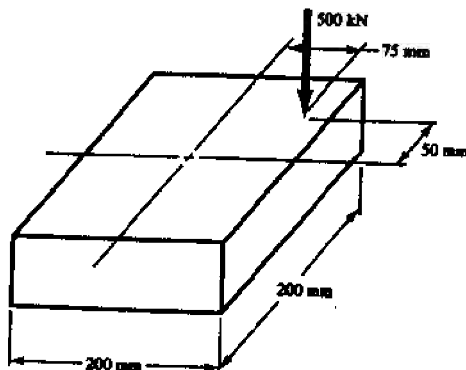


图 17-18

题 17.15　如图 17-18 所示的短柱，截面为 200 mm × 200 mm 的正方形，偏心压力500 kN作用在距一个对称轴 50 mm，距另一个对称轴 75 mm 处。试求横截面中的峰值拉应力和峰值压应力。
(答案：34.75 MPa，－59.0 MPa)

题 17.16　如图 17-19 所示的空心矩形截面柱具有平行于 y 方向的铅直对称轴，其下端是固定的。此柱承受单独的铅直偏心载荷 $P = 180$ kN 作用。试求 A 点处的合成铅直应力(A 点位于柱体下端的角点附近)。(答案：－111.9 MPa)

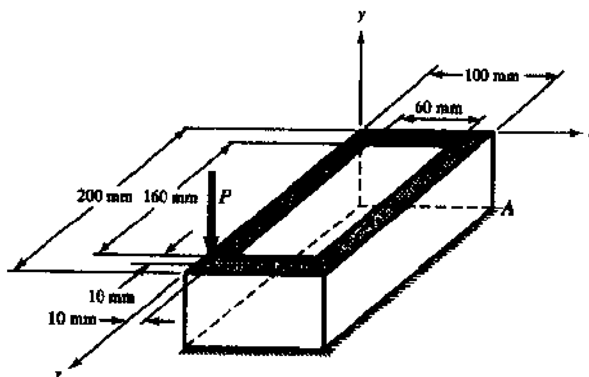


图 17-19

题 17.17　在题 17.2 中，如果轴向压力是 200 kN，许可剪应力是 100 MPa，试求许可的扭转力偶矩。
(答案：1570 kN·m)

题 17.18　薄壁圆柱壳的直径为 10 in，壁厚为 0.1 in，承受内压为 100 lbf/in^2，同时还承受轴向拉伸，如果限制两种作用的合成最大拉应力不超过 20000 lbf/in^2，试求许可的拉伸载荷。(答案：55000 lbf)

题 17.19　薄壁圆柱壳承受轴向压力 5000 lbf 及扭转力偶 30000 lbf/in 的共同作用。圆柱壳的直径为 12 in，壁厚 0.125 in。试求壳中的主应力及最大剪应力。(不考虑壳发生屈曲的可能性。)
(答案：$\sigma_{max} = 104$ lbf/in^2，$\sigma_{min} = -10720$ lbf/in^2，$\tau = 5412$ lbf/in^2)

题 17.20　直径 2.5 in 的圆轴同时承受 40000 lbf 的轴向拉力及 35000 lbf/in 扭转力偶的共同作用。试求轴内的主应力及最大剪应力。(答案：$\sigma_{max} = 16180$ lbf/in^2，$\sigma_{min} = -8020$ lbf/in^2，$\tau = 12100$ lbf/in^2)

题 17.21　实心圆轴同时承担 20000 lbf/in 的扭转力偶及 3000 lbf/in 的弯矩共同作用，轴的直径为 3 in。试求主应力及轴内的最大剪应力。(答案：$\sigma_{max} = 12450$ lbf/in^2，$\sigma_{min} = -1150$ lbf/in^2，$\tau = 6800$ lbf/in^2)

题 17.22　如图 17-20 所示的圆轴以等角速度转动，并承受由图示的皮带轮引起的弯曲和扭转的共同作用，轴和皮带轮的重量均可忽略。轴承只可能提供集中的约束反力。该轴的直径是 1.75 in。试求轴内的主应力。(答案：$\sigma_{max} = 16600$ lbf/in^2，$\sigma_{min} = -750$ lbf/in^2)

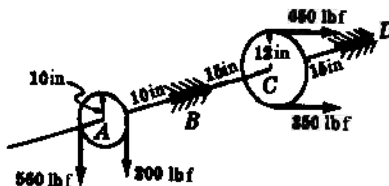


图 17-20

题 17.23　平均直径为 150 mm 的薄壁圆柱壳压力容器同时承受 1 kN·m 扭矩及 3 MPa 内压的共同作用。如果许可的拉伸应力是 150 MPa。试按最大法应力理论确定需要的壁厚。(答案：1.5 mm)

题 17.24　对于题 17.23 试用最大剪应力理论确定需要的壁厚。(答案：1.55 mm)

题 17.25　对于题 17.23 试用哈贝尔-冯·密塞斯-亨奇理论确定需要的壁厚。(答案：1.34 mm)